MEMORIE

DI

MATEMATICA E FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

TOMO VIII. PARTE II.

MODENA
PRESSO LA SOCIETA' TIPOGRAFICA.
MDCCXCIX.

MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA.

TENTATIVO SUL PROBLEMA DELLE PRESSIONI, CHE SOFFRONO GLI APPOGGI COLLOCATI AGLI ANGOLI DI UNA FIGURA, DERIVATE DA UN PESO POSTO DENTRO LA SUA AJA.

Di Francesco Malfatti.

Ricevuta li 18. Dicembre 1798.

1. TOrna ora in campo un Problema, su cui hanno inutilmente versato le indagini de' più sublimi Geometri: che ha costretto il grande Eulero per presentarne una soluzione a ricorrere nel Tomo decimo ottavo de' nuovi Commentarii di Pietroburgo ad una ipotesi affatto arbitraria, anzi ridotta all' assurdo dal Ch. Paoli nel Tomo sesto delle Memorie della Società Italiana: che ha fatto dire al celebre d' Alembert nel Tomo quinto de' suoi Opuscoli non potersi colle sole note leggi della Statica risolvere fuorchè in un caso particolare, e a Bossut nel Tomo pri-

mo del suo Trattato di Meccanica, che, eccettuato quel caso, rimane esso pel Geometra un Problema indeterminato: le soluzioni del quale finalmente date, non ha molto, dal dotto Paolo Delanges e dal Lorgna ne' Tomi quinto e settimo della suddetta nostra Società non hanno forzato l'assenso e l'approvazione della Repubblica Matematica: cosicchè considerasi sino a quest'ora come Problema non risoluto. Malgrado il ritegno che dovea pur farmi un' impresa ad altri sì mal riuscita, non mi sono scoraggito, ed ho voluto tentare il Problema per una via forse non calcata da alcuno, la quale a me è sembrata l'unica per arrivare a qualche certa conclusione. Merita l'argomento, che non sia abbandonato, perchè utile all'Architettura e perchè per la sua difficoltà si è reso famoso. Se io non vado errato ne' miei raziocinj, i quali sottopongo all'esame e alla decisione degl'Intendenti, mi compiacerò della mia fortuna nell'avere incontrato quel metodo che possa esser considerato come equivalente all'economia e al magistero della Natura nella distribuzione delle sue forze. In caso contrario, sul riflesso che de' Tifi di me più esperti hanno rotto in questo scoglio, voglio sperare, che traendo origine i miei tentativi dal desiderio di esser utile alla Statica col dilatarne i confini, non mi sarà recato a vergogna di avere col mio ardimento accresciuto il numero de' naufragj Matematici.

2 Il Problema è questo: Dato un peso situato dentro l'aja di un piano rettilineo orizzontale, e sostenuto negli angoli da appoggj immobili e in direzion verticale; determinare la quantità di pressione, che soffre ciascuno de' detti appoggj. Per maggior facilità si suppone il piano senza massa e il corpo pesante concentrato nel suo centro di gravità, la direzion della quale segni nel piano medesimo un punto animato e premente, da cui derivano agli appoggj le respettive pressioni. Se questi son tre non collocati tutti in una sola retta, cosicchè il piano sia un triangolo, il Problema riceve una facile soluzione, o si proceda col metodo de' momenti, riferendo il peso e gli appoggj a tre diversi piani di rotazione situati arbitrariamente, come hanno fatto i mentovati Geometri Delanges e Paoli, o piaccia piuttosto di valersi del sistema de' vetti comunicanti sulle traccie del

Bossut e dell' Eulero. Ma se tutti e tre gli appoggj sono disposti in una sola retta, sulla qual pure sia il peso, il Problema, di determinato ch' egli era, diventa indeterminato, nè v' è stato modo di conoscere la vera misura delle pressioni, onde ciascuno d' essi è caricato. Indeterminato pure si è concluso esser quello de' quattro appoggj o collocati o non collocati in linea retta, e maggiormente indeterminato se si fa crescere il numero di questi appoggj.

3 Daremo un esempio della indeterminatezza del Problema nella figura quadrilatera AEFC (Fig. I), ove il lato AC è parallelo all' opposto EF, e gli altri lati AE, FC tra loro eguali sono egualmente inclinati sulla AC. Divisa per metà in O la AC, si ecciti la OQ perpendicolare ai lati paralleli, si intenda collocato il peso in un punto P della OQ, e i quattro appoggj in A, E, F, C, ai quali si guidin le rette PA, PE, PF, PC. In questa figura, che Pappo chiama un bomisco, deve aversi equilibrio tra le forze derivate da P agli appoggj per qualunque verso. Il perchè, stabiliti quattro assi di rotazione, ciascun de' quali sia normale alla sua distanza da P e passi per il punto d' appoggio, coll' ajuto del teorema Statico de' momenti avrem quattro equazioni, le quali vedrem quanto servono per la determinazione delle pressioni, che chiamo A, E, F, C. Comincio dall' appoggio A. Ad AP sia normale l' asse di rotazione DH, su cui cadano le perpendicolari EH, FG, CD, e congiungo FA. Pongo $AP = PC = a$, $PE = PF = b$, $\text{sen.}APO = \text{sen.}k$, $\text{sen.}EPQ = \text{sen.}h$. Quindi nasce $\text{sen.}EPA = \text{sen.}(h + k)$, $\cos.EPA = -\cos.(h + k)$, $\text{sen.}EPF = \text{sen.}2h$, $\cos.EPF = \cos.2h$, $\text{sen.}APF = \text{sen.}(k - h)$, $\cos.APF = -\cos.(k - h)$. Inoltre, posto r il Raggio, sarà $\text{sen.}PAF = \dfrac{b\,\text{sen.}(k - h)}{AF}$, $\cos.PAF = \dfrac{ar + b\cos.(k - h)}{AF} = \text{sen.}FAG$. Ma $r : \text{sen.}FAG :: AF : FG$. Dunque avremo $FG = \dfrac{ar + b\cos.(k - h)}{r}$. Si ha pure $\text{sen.}PAE = \dfrac{b\,\text{sen.}(k + h)}{AE}$, $\cos.PAE = \dfrac{ar + b\cos.(k + h)}{AE} = \text{sen.}EAH$; ed essen-

do r : sen.EAH : : AE : EH , analiticamente risulta EH $= \frac{ar + b\cos.(k + h)}{r}$. Così, perchè sen.PAO = cos.k, sen.CAD = sen.k, di più AO $= \frac{a \text{ sen}.k}{r}$, e AC $= \frac{2a \text{ sen}.k}{r}$; sarà CD $= \frac{2a(\text{sen}.k)^2}{r^2}$. Ma per la legge de' momenti ; E.EH + F.FG + C.CD = AP , chiamato 1 il peso P . Dunque colle sostituzioni de' trovati valori si avrà la prima equazione :

$$Er\left(ar + b\cos.(k + h)\right) + Fr\left(ar + b\cos.(k - h)\right) + 2Ca(\text{sen}.k)^2 = ar^2.$$

Siccome poi C è analogo ad A, ed F ad E, se immaginiamo un secondo asse di rotazione perpendicolare a CP , si vede chiaro che nel bomisco dev' essere la seconda equazione de' momenti :

$$Fr\left(ar + b\cos.(k + h)\right) + Er\left(ar + b\cos.(k - h)\right) + 2Aa(\text{sen}.k)^2 = ar^2.$$

4 Il terzo asse di rotazione attorno ad E sia TM perpendicolare a PE , e su d' esso cadano le normali AT , CL , FM , e si conduca CE . Si vede a un tratto essere l' angolo EPC = all' angolo APF , e quindi sen.EPC = sen.$(k - h)$, cos.EPC = — cos.$(k - h)$, onde sen.PEC $= \frac{a \text{ sen}.(k - h)}{CE}$, ed inoltre cos.PEC $= \frac{br + a\cos.(k - h)}{CE}$ = sen.CEL ; e perchè r : sen. CEL : : CE : CL , sarà CL $= \frac{br + a\cos.(k - h)}{r}$. Così r : sen.h : : b : EQ $= \frac{b \text{ sen}.h}{r}$; che dà EF $= \frac{2b \text{ sen}.h}{r}$. Ma è l' angolo FEM = EPQ, e vale l' analogìa PE : EQ : : EF : FM . Dunque FM $= \frac{2b(\text{sen}.h)^2}{r^2}$. Oltracciò sen.PEA:

$= \frac{a \,\text{sen.}(k + h)}{\text{AE}}$, $\cos.\text{PEA} = \frac{br + a\cos.(k+h)}{\text{AE}} =$ sen.AET; ed essendo r : sen.AET : : AE : AT, abbiamo $\text{AT} = \frac{br + a\cos.(k+h)}{r}$. Ora il canone de' momenti esige, che sia A . AT + C . CL + F . FM = PE. Sicchè avrem la terza equazione:

$$\text{A}r\left(br + a\cos.(k+h)\right) + \text{C}r\left(br + a\cos.(k-h)\right) + 2\text{F}b(\text{sen.}h)^2 = br^2.$$

E per la ragione che nel bomisco F, C sono analoghi ad E, A, anche pel quarto asse attorno a F sarà pronta l'equazione quarta:

$$\text{C}r\left(br + a\cos.(k+h)\right) + \text{A}r\left(br + a\cos.(k-h)\right) + 2\text{E}\,b(\text{sen.}h)^2 = br^2.$$

5 Poste in ordine le nostre quattro equazioni, sono esse le seguenti:

1.ª $\text{E}r\left(ar + b\cos.(k+h)\right) + \text{F}r\left(ar + b\cos.(k-h)\right) + 2\text{C}a(\text{sen.}k)^2 = ar^2$;

2.ª $\text{E}r\left(ar + b\cos.(k-h)\right) + \text{F}r\left(ar + b\cos.(k+h)\right) + 2\text{A}a(\text{sen.}k)^2 = ar^2$;

3.ª $\text{A}r\left(br + a\cos.(k+h)\right) + \text{C}r\left(br + a\cos.(k-h)\right) + 2\text{F}b(\text{sen.}h)^2 = br^2$;

4.ª $\text{A}r\left(br + a\cos.(k-h)\right) + \text{C}r\left(br + a\cos.(k+h)\right) + 2\text{E}b(\text{sen.}h)^2 = br^2$.

Ora osservando che è $r\left(\cos.(k+h) + \cos.(k-h)\right) = 2\cos.k\cos.h$, sommate le due prime, poi le due ultime, e dividendo per 2 le due somme si ottiene

$(\text{E} + \text{F})\,(ar^2 + b\cos.k\cos.h) + a\,(\text{A} + \text{C})\,(\text{sen.}k)^2 = ar^2$;

$(\text{A} + \text{C})\,(br^2 + a\cos.k\cos.h) + b\,(\text{E} + \text{F})\,(\text{sen.}h)^2 = br^2$.

Dunque sarà $E + F = \frac{ar^2 - (A + C) a (\text{sen}.k)^2}{ar^2 + b \cos.k \cos.h} =$

$\frac{br^2 - (A + C)(br^2 + a \cos.k \cos.h)}{b (\text{sen}.h)^2}$; e quindi poi

$(A+C)\left(-ab (\text{sen}.h)^2 (\text{sen}.k)^2 + abr^4 + ab (\cos.k)^2 (\cos.h)^2 + a^2 r^2 \cos.k \cos.h + b^2 r^2 \cos.k \cos.h\right) = abr^4 + b^2 r^2 \cos.k \cos.h - a b r^2 (\text{sen}.h)^2$; ove fatte le riduzioni, $(A + C)\left(abr^2 (\cos.h)^2 + abr^2 (\cos.k)^2 + a^2 r^2 \cos.k \cos.h + b^2 r^2 \cos.k \cos.h\right) = abr^2 (\cos.h)^2 + b^2 r^2 \cos.k \cos.h$;

cioè, dopo la divisione pei fattor comune $ar^2 \cos.h + br^2 \cos.k$, sarà $(A + C)(a\cos.k + b\cos.h) = b \cos.h$,

ossia $A + C = \frac{b \cos.h}{a \cos.k + b \cos.h}$; e questo valore

ci fa conoscer l' altro $E + F = \frac{a \cos.k}{a \cos.k + b \cos.h}$.

Introdotto il valor di C dato per A, e quel di F dato per E con queste due ugualità finali nelle quattro formole dei momenti, le troverem tutte identiche, e concluderemo, che il quarto piano di rotazione, di cui ci siamo serviti, è affatto inutile pe 'l ritrovamento della quarta pressione, il che rende incognite tutte le altre, e lascia pe 'l Geometra, che non si vale d' altro principio che di quel de' momenti, il Problema delle pressioni indeterminato.

6 Ma per rimovere quest' inciampo, perchè non chiamerem noi in soccorso l' assioma fisico; che le operazioni della Natura, posta in circostanze per ogni verso eguali, sono eguali? Questo principio di per se luminoso ed evidente ci si offre spontaneamente nel nostro bomisco. Rispetto al punto P gli appoggj in A e in C son collocati a distanze eguali, le quali o colla perpendicolare QPO, o colla EF, o coi lati EA, FC costituiscono di quà e di là eguali

li

li angoli; il che dee pur dirsi di P riferito alle eguali distanze AP, PC che egualmente s' inclinano sul lato AC, e sui lati stessi AF, FC. Dunque qualunque sia l' influenza, che le pressioni derivate da P agli appoggj in E, F aver possano sul quantitativo delle altre che vengono distribuite in A, C, non v' è ragion sufficiente per asserire che indur possa disuguaglianza tra queste pressioni; il che vuolsi dire egualmente rispetto alle pressioni in E, F, che devon' essere tra loro eguali. Onde, fatto $C = A$, $F = E$, il problema, indeterminato coll' uso dell' unica legge dei momenti, combinato col principio dell' indifferenza contenuto nel nostro assioma diventa effettivamente determinato; poichè si ottiene $A = \frac{b \cos.h}{2(a \cos.k + b \cos.h)} = C$; $E = \frac{a \cos.k}{2(a \cos.k + b \cos.h)} = F$. Se il bomisco si trasforma in un quadrato, che abbia il peso P nel centro della figura, come si può egli negare, che ciascun appoggio venga caricato della 4.ª parte del peso totale? Ora questa appunto è la conseguenza che si deduce dalle formole modificate all' ipotesi di tale trasformazione. Perchè allora si fa $h = k$, $b = a$, e diventa $A = C = E = F = \frac{1}{4}$, come ci suggerisce la ragione.

7 Non si speri per altro di trar vantaggio dal principio della ragion sufficiente associato alla dottrina de' momenti, in tutte le figure e in tutte le collocazioni del peso P. Esso si occulta quasi sempre agli occhi del Geometra; anzi nel bomisco medesimo o nel quadrato, se P è fuor della retta QO che divide per mezzo la figura, ritorniamo un' altra volta all' oscuro, nè sappiam per ora diradar le tenebre che circondano il problema.

8 Queste tenebre non comprendon però nel loro recinto la Figura triangolare qualunque AEC (Fig. 2), dovunque sia posto, purchè dentro l' aja, il peso P. La ragione si è, che 3 sole sono le distanze di P dagli appoggj, e per conseguenza 3 i piani di rotazione ai quali si può riferire lo stesso punto, dai quali risultano 3 equazioni, che non contengono niente d' identico e servono a ritrovare le 3

pressioni. Per il quadrilatero ci è forza di ricorrere al 4.° piano, e per ciò appunto il problema è indeterminato; su di che sarà bene leggere la eccellente general dimostrazione, che dà il nostro celebre Socio Paoli nel precitato VI Tomo, della impossibilità di schivare le equazioni identiche, ove un punto di una figura si riferisca a più di 3 piani di rotazione.

9 Sono note a tutti i Geometri le pressioni, onde son caricati gli appoggj A, E, C nel triangolo (Fig. 2) derivanti dal peso P; e fatto AP $= a$, PE $= b$, PC $= c$, sen.APE $=$ sen.i, sen.EPC $=$ sen.l, che fa essere sen.APC $= -$ sen.$(i+l)$, si sa che son verissime le 3 seguenti equazioni; Press. in A $= \frac{bc\,\text{sen.}l}{ab\,\text{sen.}i - ac\,\text{sen.}(i+l) + bc\,\text{sen.}l}$; Pr. in E $= - \frac{ac\,\text{sen.}(i+l)}{ab\,\text{sen.}i - ac\,\text{sen.}(i+l) + bc\,\text{sen.}l}$; Pr. in C $=$ $\frac{ab\,\text{sen.}i}{ab\,\text{sen.}i - ac\,\text{sen.}(i+l) + bc\,\text{sen.}l}$, nelle quali sarà bene avvertire, che i numeri delle pressioni in A, E, C vengono formati dal prodotto de' due lati che sono in opposizione al punto ov' è la pressione, moltiplicato nel seno dell' angolo da essi compreso, essendo il denominator comune la somma di tutti i numeratori. Nel triangolo poi AEC, o in qualunque altra figura chiamerem da quì innanzi P il centro delle pressioni o semplicemente il *centro*; gli angoli fatti dalle distanze, aventi il vertice comune nel centro, angoli *centrali*; e detratti quegli angoli centrali, i quali hanno per lato comune la distanza del centro dal punto di ciascuna pressione, denominerem tutti gli altri centrali, angoli *opposti*. Così nel triangolo AEC relativamente alla pressione in A, l' angolo opposto è l' unico angolo EPC, e rispetto alle altre in E, C gli angoli opposti sono APC, APE. Ma nel bomisco (Fig. I), riguardo all' appoggio A, gli angoli opposti son tre, EPF, FPC, EPC; e a C corrispondono i 3 angoli opposti APE, EPF, APF, &c. Oltracciò essendo nella Fig. 2 tre le distanze del centro dagli appoggj espresse coi simboli a, b, c,, ed avendosi ne' numeratori delle pressioni i tre prodotti, ab per C, ac per E, bc per A, chiamerem questi prodotti gli *ambi* delle distanze; e se quattro

saran le distanze, come accade nel quadrilatero, che siano a, b, c, d, e risultino nel calcolo i prodotti abc, abd, acd, bcd, li chiameremo i *terni* delle distanze. Così le *quaderne*, le *cinquine*, &c., se 4, 5, &c. distanze si coalizzino a formarle.

10 Un'altra riflessione ci sarà molto utile, ed è, che nel triangolo in vece della legge statica de' momenti, che c' impegna in lungo e laborioso calcolo, possiamo adoperar la legge dei vetti semplici, che da quella deriva, o la fa derivare. Ma non è già vero, che qualunque retta, la quale passi per il peso P, come MPN, possa far figura di vette, che diremo in appresso vette *primario*, onde combinato esso cogli altri vetti ANC, AME, cui darem nome di vetti *comunicanti*, ci faccia conoscere le vere pressioni della Natura. I vetti primarj che ce le fanno ottenere, sono le rette, che congiungono gli appoggj col centro e terminano ai lati opposti, come APT, EPO, CPS. Per esempio, coll'assumere per vette primario la EPO, chiamato al solito 1 il peso P, risulta, usando del canone de' vetti semplici, Press. in A $= \frac{EP}{EO} \cdot \frac{CO}{AC}$; Press. in E $= \frac{PO}{EO}$, P. in C $= \frac{EP}{EO} \cdot \frac{AO}{AC}$; ed equivalenti pressioni avremo, se ci varremo di ciascun degli altri vetti primarj APT, CPS; il che è conforme alle dimostrazioni di quasi tutti i Geometri, che trattano del nostro argomento. Così nel bomisco (Fig. 1) non qualunque retta, che passi per P e termini ai lati, ha la proprietà di guidarci alle giuste pressioni; ma sibbene la QPO, o la SPI normale alla QO. Colla 1^a, poichè $PQ = \frac{b \cos.h}{r}$; $PO = \frac{a \cos k}{r}$; $QO = \frac{b \cos.h + a \cos.k}{r}$; $\frac{CO}{AO} = \frac{1}{2} = \frac{AO}{CO}$; $\frac{QF}{EF} = \frac{1}{2} = \frac{EQ}{EF}$, ci nasce, per la legge de' vetti semplici, Press. in A $= \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC} = \frac{b \cos.h}{2(a \cos.k + b \cos.h)} =$ Pr. in C; Pr. in E $= \frac{PO}{QO} \cdot \frac{QF}{EF} = \frac{a \cos.k}{2(a \cos.k + b \cos.h)} =$ Pr. in F, come al n. 6. Colla 2.^{a}, per ragion delle parallele SI, SF, si fa

$\frac{PQ}{QO} = \frac{ES}{AE}$; $\frac{PO}{QO} = \frac{AS}{AE}$; $\frac{PI}{SI}$ o $\frac{SP}{SI} = \frac{1}{2}$; ed abbiamo Pr. in A $= \frac{PI}{SI} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{b\cos.h}{2(a\cos.k + b\cos.h)} =$ Pr. in C;
Pr. in E $= \frac{PI}{SI} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{a\cos.k}{2(a\cos.k + b\cos.h)}$; espressioni identiche colle precedenti.

11 L'analogia, che sarà sempre la nostra guida, ci fa dunque conoscere, che nel triangolo, nel bomisco, e se si vuol, nel quadrato e nel rettangolo, quando in queste 3 ultime figure il peso sia nella retta che divide per metà i lati paralleli, dipendendo la posizione del vette primario e de' vetti comunicanti dal modo con cui divider si debbono gli angoli centrali APC, APE &c., qualora intraprender si voglia la soluzione generale del problema delle pressioni, sarà necessario sapere per qualunque figura, in qual proporzione debbansi dividere questi angoli, e come coll' ajuto de' punti S, T, O, &c. ne' lati ove terminano le linee dividenti, si possano stabilire i sistemi de' vetti, che danno le vere pressioni della Natura.

12 L'indagine è scabrosa e difficile, nè a primo colpo d'occhio v'ha raggio di speranza alcuna per ben riuscir nell' impresa. Pur tuttavia il principio metafisico della ragion sufficiente mi suggerisce, che potrebbe per avventura essere utilmente adoprato nelle figure ordinate e regolari, quando il peso è collocato nel centro della figura, mentre tale ipotesi induce la necessità, che a ciascun angolo ove sono gli appoggj, essendo essi di numero n, abbiavi la pressione $\frac{1}{n}$. Stabilita questa inconcussa verità, perchè dovrem noi disperare, ora tentando una via, ora un' altra, di imbatterci finalmente in quella, che ci fa con metodo generale determinare le posizioni e grandezze de' vetti primarj non che quelle de' vetti comunicanti, i quali trasferiscono a ciascun angolo la suddetta quantità di pressione? E trovato ciò, trarrem forse di là qualche lume per poter salire dalle figure ordinate alle omonime irregolari, e compiere in esse eziandio le competenti distribuzioni. Dopo molti errori itinerarj una strada finalmente mi si è presentata, che

mi guida diritto al mio scopo, e la quale per la sua generalità e semplicità, quanto il può permettere un sì difficil problema, ha tutti i caratteri di equivalenza alla vera legge fisica delle pressioni. Io andrò esponendo di mano in mano i miei pensamenti; ma comincierò dal premettere alcune verità puramente geometriche, che serviranno ad agevolarci i calcoli necessarj per la soluzione de' susseguenti problemi.

LEMMA I.

13 In qualunque triangolo ABC (Fig. 3), preso dentro l'aja un punto P, e dagli angoli ai lati opposti condotte per P le rette BPD, APN, CPM; sarà

1.° $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{PN}{AN}$.

Si guidi sino alla AN la DQ parallela a BC, e avrassi: PB : BD : : PN : NQ, cioè $\frac{BP}{BD} = \frac{PN}{NQ}$. Di più AC : CD : : AN : NQ, ossia $\frac{CD}{AC} = \frac{NQ}{AN}$. Dunque $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{PN}{NQ} \cdot \frac{NQ}{AN} = \frac{EN}{AN}$.

2.° $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{PM}{CM}$.

Conducendo sino a CM la DL parallela ad AB, si ha tosto $\frac{PB}{BD} = \frac{PM}{ML}$, e ancora $\frac{AD}{AC} = \frac{ML}{CM}$. Onde $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{PM}{ML} \cdot \frac{ML}{CM} = \frac{PM}{CM}$.

3.° $\frac{AP}{AN} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC}$.

La NO, che va alla CM, sia parallela ad AB; il che fa essere $\frac{AP}{AN} = \frac{PM}{MO}$; $\frac{BN}{BC} = \frac{MO}{CM}$; e quindi $\frac{AP}{AN} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{PM}{CM}$.

Ma (2.°) $\frac{PM}{CM} = \frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC}$. Dunque $\frac{AP}{AN} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC}$.

4.° $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$.

Vada alla AN, se occorre, prodotta la BV parallela ad AC, e nasce $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AV} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{AN}{AV}$; $\frac{AN}{AV} = \frac{CN}{BC}$. E però $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$.

5.° $\frac{PD}{BD} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AB}$.

La MK parallela ad AC incontri in K la BD, e sarà $\frac{AM}{AB} = \frac{DK}{DB}$. Perchè poi son simili i triangoli MPK, DPC, è $\frac{CP}{CM} = \frac{DP}{DK}$. Laonde $\frac{DP}{DK} \cdot \frac{DK}{DB} = \frac{PD}{BD} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AB}$. Di più (4.°) $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$. Dunque è ancora $\frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$.

6.° $\frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{BM}{AB}$.

Si faccian simili i triangoli APH, CPN col tirare la AH parallela a BC; e abbiamo $\frac{PN}{AN} = \frac{CP}{CH} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{CM}{CH}$. Ma son pur simili i triangoli AMH, CMB, e quindi $\frac{CM}{CH} = \frac{BM}{AB}$. Dunque $\frac{PN}{AN} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{BM}{AB}$. Finalmente, perchè (1.°) $\frac{PN}{AN} = \frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{AC}$, sarà anche $\frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{BM}{AB}$.

Scolio. Questo lemma racchiude la dimostrazione completa, che per aver le pressioni agli appoggj A, B, C nel

triangolo col metodo de' vetti comunicanti, si può assumere per vette primario APN, o BPD, o CPM, e che con qualunque di questi 3 vetti si ottengono le stesse identifiche pressioni, essendo ciò una delle caratteristiche necessarie per la giustezza de' risultati, mentre non v'è maggior ragione per dire, che dà le vere pressioni piuttosto l'uno che l'altro di questi 3 vetti tirati e situati relativamente agli angoli da cui spiccano e al centro, per cui passano, in affatto simili maniere.

LEMMA 2.

14 Dentro un dato angolo BCA (Fig. 3.) presi ne' lati 2 punti B, A, e da questi ai lati opposti guidate le rette BD, AN intersecantisi in qualche punto P; sarà $\frac{AP}{AN}=\frac{AD.BC}{AD.BC+BN.CD}$; $\frac{PN}{AN}=\frac{BN.CD}{AD.BC+BN.CD}$.

Congiunta la AB sino alla AC, si conduca la NT parallela a BD, e si ha, BC : CD :: BN : DT, onde BN . CD = BC . DT. Ma è anche AP : AN :: AD : AT :: AD : AD + DT :: AD . BC : AD . BC + BC . DT :: AD . BC : AD . BC + BN . CD. Dunque $\frac{AP}{AN}=\frac{AD.BC}{AD.BC+BN.CD}$, e conseguentemente $\frac{PN}{AN}=\frac{BN.CD}{AD.BC+BN.CD}$.

Corol. Pel Lemma 1, è $\frac{PD}{BD}=\frac{AP}{AN}\cdot\frac{CN}{BC}$ (4.°), ovvero sostituendo il valore di $\frac{AP}{AN}$, $\frac{PD}{BD}=\frac{AD.CN}{AD.BC+BN.CD}$. Ma AD . BC + BN . CN = AD . CN + AD . BN + CD . BN = AD . CN + AC . BN. Dunque $\frac{PD}{BD}=\frac{AD.CN}{AD.CN+AC.BN}$, e quindi $\frac{BP}{BD}=\frac{AC.BN}{AD.CN+AC.BN}$.

PROBLEMA.

15 Dato un punto P dentro l' aja d' un trapezio AEFC (Fig. 4.), e preso in un de' lati AE un dato segmento ES, determinare nel lato contiguo EF tal altro segmento EQ, che guidate da S, Q per P ai lati opposti le rette SPT, QPO, sia $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC} = \frac{PQ}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$.

Congiungo la FS, da C per P tiro una retta, che incontri la FS in δ, poi da A per δ la retta $A\delta Q$, che termina al lato EF in Q, sarà EQ il segmento ricercato.

Si conducan le rette CS, CQ. Nel triangolo CSF si verifica questa equazione $\frac{P\delta}{C\delta} = \frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC}$ (lem. 1. n. 3.°). Parimente nel triangolo AQC ha luogo quest' altra $\frac{P\delta}{C\delta} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$ (lem. 1. n. 2.°). Dunque sarà anche $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$.

Corol. 1. Dall' essere 1.° $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC} = \frac{OP}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$, deriva 2.° $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{FC} = \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$. Imperciocchè, guidata la AF, e considerato il triangolo AEF, abbiamo $\frac{S\delta}{FS} = \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$ (lem. 1. n. 3.). Il triangolo poi SFC ci dà $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{CF} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{S\delta}{FS}$ (lem. 1. n. 5.), onde $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{CF} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$. Ma dal triangolo AQC risulta $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} = \frac{OP}{OQ}$ (lem. 1. n. 5.). Dunque $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{CF} = \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$.

3.° $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$. Si considerino i 3 triangoli, SFC, EAF, AQC. Il 1.° ci somministra $\frac{PT}{ST} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS}$ (lem. 1. n. 6.); cioè $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS} \cdot \frac{ES}{AE}$. Il 2.°, $\frac{F\delta}{FS} : \frac{ES}{AE} = \frac{Q\delta}{AQ}$ (lem. 1. n. 6.); che fa essere $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ}$. Ma dal 3.° triangolo si ritrae $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$ (lem. 1. n. 6.). Dunque $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$.

4.° $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{PO}{QO} \cdot \frac{QF}{EF}$. Dei 3 triangoli SFC, AEF, AQC, considerato il 1.° si presenta l' egualità $\frac{PT}{ST} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS}$ (lem. 1. n. 6.); ossia $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS} \cdot \frac{AS}{AE}$. Dal 2.° emana $\frac{F\delta}{FS} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{QF}{EF}$; e però $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{QF}{EF}$. Ma il 3.° dà $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} = \frac{PO}{OQ}$ (lem. 1. n. 5.). Dunque $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{PO}{QO} \cdot \frac{QF}{EF}$.

Corol. 2. Dalla soluzione del problema e dal corol. 1. risulta, che essendo EQ, ES i due segmenti analoghi ne' due lati contigui AE, EF, i quali salvano la condizione proposta, avran pure la stessa qualità i due segmenti AS, AO; così CO, CT; FT, FQ; e poichè dati i due primi EQ, ES, e condotte le rette AQ, SF che si segano in δ, si è dimostrato, che la retta CP tirata pe 'l punto P dall' angolo opposto C cade in δ, sarà altresì vero, che la FP prodotta s' incontrerà nel punto, ove s' incrociano le altre due

rette EO, CS; e similmente si discorra per le due ultime EP, AP rispetto ai punti d' intersezione, che avrebbero le AT, OF, e le CQ, ET.

Scolio. Si supponga ora in P il peso, e i 4 appoggj in A, E, F, C. Se, presa EQ ad arbitrio, si volesse assumere QPO come vette primario, il problema presente col corol. 1. ci fa conoscere, che col prendere eziandio per vette primario SPT si otterrebbero le stesse pressioni come coll' altro. Imperocchè con QO la pressione in A diventa $\frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$, e con ST si fa essa $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE}$. Ma (corol. 1. n. 3.°) si ha $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$. Dunque l'uno o l' altro vette dà in A la stessa quantità di pressione; e lo stesso vuolsi dir pure per le altre in C, F, E. Aggiungo di più, che assumendo ancora come vette primario la CPδ, essendo gli altri vetti comunicanti AδQ, EQF, le nostre pressioni non variano. Perchè figurando CPδ come vette primario, la pressione in A sarebbe $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$ (corol. 1. n. 3.). Così si dica per le altre tre. Ma perchè si è presa la EQ ad arbitrio, arbitrarie son pure queste pressioni e variabili in quantità a misura che si taglia in EF un segmento maggiore o minore di EQ: Onde se non ci vien fatto di rinvenire un criterio per istabilir nel trapezio la grandezza di questo segmento, o che è lo stesso, per dividere l' angolo centrale EPF in conformità della legge osservata dalla Natura, non avrem fatto alcun progresso per la risoluzione generale del quesito; e col nostro discorso si sarà solo ad evidenza dimostrato, che l' unica teoria del vette non basta per rendere generalmente determinato il problema. Nel bomisco e nel rettangolo, in qualche collocazione del peso P, abbiam potuto determinare la EQ $= \frac{EF}{2}$, perchè oltre la regola del vette è venuto in nostro soccorso il principio metafisico della ragion sufficiente, che ci ha fatto ottenere l' intento. Ma pel trapezio siam privi di questo ajuto; e resta tuttavia a saper-

si, in qual modo debbasi divider l' angolo EPF, e render con ciò cognita la EQ.

LEMMA 3.

16 In qualunque triangolo RST (Fig. 5), guidata da un angolo S al lato opposto qualunque SV, e chiamati x, y gli angoli TSV, RSV; sarà $\frac{TV}{RV} = \frac{ST\,\text{sen}.x}{SR\,\text{sen}.y}$.

Imperciocchè sta TV : RV in ragion composta $\left(\begin{array}{l} TV : SV \\ SV : RV \end{array}\right.$.

Ma $\left(\begin{array}{l} TV : SV :: \text{sen}.x : \text{sen}.STV \\ SV : RV :: \text{sen}.SRV : \text{sen}.y \end{array}\right.$. Dunque TV : RV in comp. $\left(\begin{array}{l} \text{sen}.x : \text{sen}.STV \\ \text{sen}.SRV : \text{sen}.y \end{array}\right.$; o anche TV : RV in comp. $\left(\begin{array}{l} \text{sen}.x : \text{sen}.y \\ \text{sen}.SRV : \text{sen}.STV \end{array}\right.$ Ora essendo sen.SRV : sen.STV :: ST : SR, avremo TV : RV in comp. $\left(\begin{array}{l} \text{sen}.x : \text{sen}.y \\ TS : RS \end{array}\right.$, e quindi $\frac{TV}{RV} = \frac{ST\,\text{sen}.x}{SR\,\text{sen}.y}$.

Corol. 1. Perchè $TV : RV :: ST\text{sen}.x : SR\,\text{sen}.y$, si ha anche $TV : TR :: ST\text{sen}.x : ST\,\text{sen}.x + SR\,\text{sen}.y$; onde $\frac{TV}{TR} = \frac{ST\text{sen}.x}{ST\text{sen}.x + SR\text{sen}.y}$; e per conseguenza $\frac{RV}{TR} = \frac{SR\,\text{sen}.y}{ST\text{sen}.x + SR\text{sen}.y}$.

Corol. 2. Si può dire TR : RV in comp. $\left(\begin{array}{l} TR : SR \\ SR : SV \\ SV : RV \end{array}\right.$. Ma $TR : SR :: \text{sen}.(x+y) : \text{sen}.STR$; $SV : RV :: \text{sen}.SRT : \text{sen}.y$.

Dunque TR : RV in comp. $\left(\begin{array}{l} \text{sen}.(x+y) : \text{sen}.STR \\ SR : SV \\ \text{sen}.SRT : \text{sen}.y \end{array}\right.$; ossia TR : RV in comp. $\left(\begin{array}{l} \text{sen}.(x+y) : \text{sen}.y \\ \text{sen}.SRT : \text{sen}.STR \\ SR : SV \end{array}\right.$; e perchè sen. SRT : sen. STR :: ST : SR, ne viene per conseguenza, che TR : RV in comp. $\left(\begin{array}{l} \text{sen}.(x+y) : \text{sen}.y \\ ST : SR \\ SR : SV \end{array}\right. :: ST\,\text{sen}.(x+y) : SV\,\text{sen}.y$.

Inoltre pel corol. 1. $TR : RV :: ST\text{sen}.x + SR\text{sen}.y : SR\,\text{sen}.y$; onde $ST\text{sen}.x + SR\,\text{sen}.y : SR\,\text{sen}.y ::$

ST sen.$(x+y)$: SVsen.y; e quest' ultima analogia da $SV = \frac{SR\,.\,ST\text{sen}.(x+y)}{ST\text{sen}.x + SR\text{sen}.y}$. Di più, poichè abbiamo TR : RV : : ST sen.$(x+y)$: SVsen.y, sarà $\frac{RV}{TR} = \frac{SV\text{sen}.y}{ST\text{sen}.(x+y)}$. Ma TV : RV, ovvero $\frac{TV}{TR} : \frac{RV}{TR}$: : STsen.x : SRsen.y, e sostituito il valore di $\frac{RV}{TR}$, si ha $\frac{TV}{TR} : \frac{SV\text{sen}.y}{ST\text{sen}.(x+y)}$: : STsen.x: SRsen.y. Dunque $\frac{TV}{TR} = \frac{SV\text{sen}.x}{SR\text{sen}.(x+y)}$.

LEMMA 4.

17 Dividere un dato angolo MPD per modo che i seni delle porzioni dell' angolo, MPO NPO, siano in ragion data di $m:n$.

Sul lato PN dell' angolo si ponga PD $= m$, e nell' altro lato MP prodotto si collochi PH $= n$, poi si congiunga DH. La retta PO parallela a DH divide l' angolo MPD nel modo ricercato. Perchè per ragion delle parallele PO, DH, gli angoli MPO, OPN sono respettivamente eguali agli angoli PHD, PDH. Ma sta sen.PHD : sen.PDH : : PD : PH : : $m:n$. Dunque anche sen.MPO : sen.OPN : : $m:n$.

18 Cadano ora sotto alla nostra considerazione le figure ordinate e regolari, supponendo sempre il peso nel centro, e gli appoggj agli angoli della figura. E poichè la teoria de' vetti comunicanti nel bomisco, nel triangolo, e nel rettangolo, pei casi superiormente esaminati, ci ha condotti alle medesime conseguenze, alle quali giungevasi coll' altra de' momenti, abbracciando il primo metodo cerchiamo come debbasi in ciascuna figura collocare il sistema di questi vetti, onde per mezzo di essi venga dal peso trasferita a ciascun appoggio la pressione $\frac{1}{n}$, posto n il numero de' lati. La prima difficoltà che s' incontra in quest' indagine, è quella di determinare ne' lati della figura gli opportuni

segmenti, o di dividere come conviene gli angoli, che abbiam chiamato centrali. Ma riflettendo, che ove il peso sia nel centro questi segmenti sono la metà del lato sì nel triangolo equilatero come nel quadrato, e che la linea dividente gli angoli centrali è a ciascun di essi lati perpendicolare, noi veggiam chiaramente, che l' analogia c' invita a stabilire, dover ciò essere eziandio nelle altre figure regolari. Oltracciò nel trapezio (Fig. 4) abbiamo osservato, che relativamente ai segmenti analoghi EQ, ES, tirate FS, AQ, che s' incrociano in δ, si può assumere per vette primario CPδ, essendo i vetti comunicanti AQ, EF. Ciò pure si verifica nel triangolo AEC (Fig. 2), ove δ cade in P e si fa $P\delta = 0$. Perchè preso CPδ come vette primario, i comunicanti sono OPE, AOC, e ne risultano le pressioni seguenti: Pr. in C derivante dal solo vette $CP\delta = \frac{P\delta}{PC} = 0$; Pr. in E $= \frac{CP}{CP} \cdot \frac{PO}{OE} = \frac{PO}{OE}$; Pr. in A $= \frac{CP}{CP} \cdot \frac{PE}{EO} \cdot \frac{CO}{AC} = \frac{PE}{EO} \cdot \frac{CO}{AC}$; altra Press. in C $= \frac{CP}{CP} \cdot \frac{PE}{EO} \cdot \frac{AO}{AC} = \frac{PE}{EO} \cdot \frac{AO}{AC}$; le quali pressioni son le medesime con quelle già trovate. Dunque non è fuor di proposito lo estendere al generale delle figure, nelle quali si suppongon già eseguite le convenienti divisioni degli angoli centrali, questa assunzione di vette primario nella direzion di Pδ, dalla quale ne vien subito determinato un braccio, che è Pδ; e ci rimane solo l' altra difficoltà di stabilir la grandezza del secondo braccio e la posizione degli altri vetti comunicanti, che insiem col primario ne formano l' intero sistema.

19 Quest' ultima è stata a me utilissima per fissar le mie regole e le mie costruzioni. Quanto alle figure regolari, noi le distribuiremo prima in due classi, cioè di figure pari-latere e di figure impari-latere. Suddivideremo quelle di num.° di lati pari in altre 2 specie; la 1.ª delle denominate da un numero pari-pari, come il quadrato, l' ottogono, il dodecagono &c.; la 2.ª delle denominate da un num.° pari-dispari, come l' essagono, il decagono &c. Così distin-

guo due nuove specie di figure impari-latere; la 1.ª di quelle, il cui num.° di lati n è tale, che $n+1$ sia num.° pari-pari, come il triangolo equilatero, l' eptagono &c.; la 2.ª di quelle, che fanno essere $n+1$ un num.° pari-dispari, come il pentagono, l' enneagono &c. Tratterem di ciascuna delle suddette specie separatamente, perchè, sebbene alcune proprietà siano a tutte comuni, altre son peculiari alla specie e diversificano alquanto le geometriche preparazioni.

20 Regola I. che serve a stabilire nelle figure ordinate pari-latere e denominate da un num.° pari-pari il sistema de' vetti comunicanti, che trasferiscono dal peso collocato nel centro della figura pressioni eguali agli angoli del poligono, ove son situati gli appoggj.

Per veder con chiarezza l' andamento del metodo, fa mestieri aver sotto all' occhio una figura di un gran numero di lati. Io ho scelto quella di 24 (Fig. 7), sulla quale ragioneremo come se fosse una figura di num.° di lati n, onde adattar si possano le nostre operazioni sì alle superiori che alle inferiori figure comprese nella stessa categoria.

21 Camminando sulle traccie additateci dal triangolo equilatero e dal quadrato, immagino prima di tutto divisi per metà tutti i lati n, e tutti gli angoli centrali del poligono, con che restano determinati per ogni lato i veri segmenti, che ci guidano alla soluzion del problema. Prendo poi un lato qualunque AH, e alla sinistra due altri lati, AE, EF consecutivi all' assunto, i cui punti di mezzo sono L, Q. Conduco in oltre due rette AQ, LF, che s' intersecano in δ, e da δ pel centro P una retta indefinita: La δP, secondo la nostra regola deve essere un braccio del vette primario. Suppongo Pβ l' altro braccio, onde tutto il vette sia $\beta\delta$. Si vede subito, che dovendo questo vette portar le pressioni agli appoggj in A e in F, i vetti comunicanti rispetto ai due lati AE, EF sono AδQ, FQE; sicchè essendo al solito $P=1$, n il num.° de' lati della figura, fa d' uopo che sia $\frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{Q\delta}{AQ}=\frac{1}{n}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{A\delta}{AQ}\cdot\frac{FQ}{EF}=\frac{1}{n}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{A\delta}{AQ}\cdot\frac{EQ}{EF}=\frac{1}{n}$. Congiungo le rette PQ, PL, δE. E' chiara l'eguaglianza delle linee AQ, FL; chiaro che i triangoli AQE, FLE sono respetti-

vamente equilateri, e perciò che riescono eguali gli angoli δFQ, δAL. Di più l' angolo δQF si fa eguale all' angolo δLA; e perchè FQ, AL sono eguali, il son pure le rette Fδ, δA; il che rende equilateri respettivamente i triangoli FEδ, AEδ, e l' angolo AEF vien bisecato dalla Eδ. Ma nelle figure ordinate la retta, che dal centro va all' angolo della figura, lo divide per metà. Dunque Pδ prodotta va ad E. Ora indicando col simbolo R l' angolo retto, nella fig. di num.° di lati n diventa l' angolo $QPE = \frac{4R}{2n} = \frac{2R}{n}$. Fatto pertanto AP eguale al raggio trigonometrico r, e $\frac{2R}{n} = x$, sarà $sen.QP\delta = sen.x = EQ$; $cos.QP\delta = cos.x = PQ$; $sen.AP\delta = sen.2x$; $sen.APQ = sen.3x$. E perchè $P\delta = \frac{PA \cdot PQ\ sen.APQ}{PA\ sen.AP\delta + PQ\ sen.QP\delta}$ (lem. 3. corol. 2), colle sostituzioni otterremo $P\delta = \frac{r\ cos.x\ sen.3x}{r\ sen.2x + sen.x\ cos.x} = \frac{2r\ cos.x\ sen.3x}{2r\ sen.2x + 2\ sen.x\ cos.x} = \frac{2r\ cos.x\ sen.3x}{2r\ sen.2x + r\ sen.2x}$, pei canoni trigonometrici; cioè $P\delta = \frac{2\ cos.x\ sen.3x}{3\ sen.2x}$. Il citato corol. 2 ci dà anche $\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{P\delta\ sen.QP\delta}{AP\ sen.APQ}$; cioè $\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{2\ sen.x\ cos.x\ sen.3x}{3r\ sen.2x\ sen.3x} = \frac{r\ sen.2x\ sen.3x}{3r\ sen.2x\ sen.3x} = \frac{1}{3}$; e quindi $\frac{A\delta}{AQ} = \frac{2}{3}$. Ma dev' essere $\frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ} = \frac{1}{n}$. Dunque $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{3}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n}$; $P\beta = \frac{3P\delta}{n-3}$; Con che restano determinate in generale per tutte le figure regolari la direzione e la lunghezza del vette primario $\beta\delta$; e verificandosi le 3 equazioni $\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{1}{3}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{FQ}{FE} = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{EQ}{EF} = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$, abbiamo a

buon conto eguali le pressioni ne' tre punti d' appoggio A, E, F.

22 Posti N, I i punti di mezzo dei lati HC, CB che seguitano alla destra del lato AH, ripetendo la stessa operazione praticata nella sinistra, conduco le rette HI, NB, che s' intersecano in θ, e guido al centro la retta θP. Dal punto di mezzo O dell' assunto lato AH faccio passar pel centro la OP; poi da θ per β tiro una linea, che prodotta incontri la OP nel punto γ, e dico che sarà $\theta\gamma$ un altro vette comunicante del primario $\beta\delta$, cosicchè avran luogo le equazioni seguenti: $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{I\theta}{HI} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{BI}{BC} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{CI}{BI} = \frac{1}{n}$; il che dimostro così. Poichè Pθ protratta va al punto C, e l' ang.° OPθ = $3x$, sarà l' ang.° γPθ = 2R — $3x$. Ma anche γPβ = OPδ = $3x$. Dunque l' ang.° θPβ = 2R — $6x$, e quindi sen.γPβ = sen.$3x$; sen γPθ = sen.$3x$; sen.θPβ = sen.$6x$. Ora $\frac{\gamma\beta}{\theta\gamma} = \frac{P\beta}{P\theta}\frac{\text{sen.}\gamma P\beta}{\text{sen.}\gamma P\theta}$ (lem. 3 corol. 2.), cioè $\frac{\gamma\beta}{\theta\gamma} = \frac{P\beta}{P\delta}\frac{\text{sen.}3x}{\text{sen.}3x}$, perchè P$\theta$ = Pδ. Dunque $\frac{\gamma\beta}{\theta\gamma} = \frac{P\beta}{P\delta} = \frac{3}{n-3}$ (21); e quindi $\frac{\theta\beta}{\theta\gamma} = \frac{n-6}{n-3}$. In oltre, essendo $\frac{I\theta}{HI} = \frac{1}{3}$, $\frac{H\theta}{HI} = \frac{2}{3}$, $\frac{BI}{CB}$, o $\frac{CI}{CB} = \frac{1}{2}$, avremo colle sostituzioni $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{I\theta}{HI} = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{BI}{BC} = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n} = \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{CI}{BC}$. Onde sono eguali a $\frac{1}{n}$ anche le pressioni, che soffrono i punti H, C, B derivate da P per mezzo dei vetti $\beta\delta$, $\theta\gamma$, HI, CB.

23 Stabiliti in generale i vetti, i quali combinati col primario ci fanno risultare pei nostri poligoni regolari le pressioni uguali ne' 6 punti F, E, A, H, C, B, è neces-

cessario, che i due principali $\beta\delta$, $d\gamma$ ci servano coll' unione di altri vetti comunicanti a produrre la pressione $\frac{1}{n}$ anche su ciascuno degli altri appoggj di numero $n-6$; che ci rimangono da caricare; e bisogna a questo fine determinare la posizione e la grandezza di questi vetti. La regola, che non manca di esser semplice, è la seguente.

24 Immaginiam la $O\gamma$ prolungata sino al nuovo incontro con un lato superiore del poligono in V. E' chiaro, che V sarà alla metà di questo lato, e che tra V ed O saran frapposti sì alla destra che alla sinistra num.° n di mezzi lati, essendo questo num.° di mezzi lati pari-pari, perchè tale supponiamo quello de' lati della figura. Sottendo pertanto la QX a 4 mezzi lati, la XZ ad altri 4 seguenti, e così progredisco sinchè arrivo ad V, dove deve necessariamente cadere il termine dell' ultima sottesa, perchè frapponendosi tra O e Q 4 mezzi lati, il num.° di quelli, che sono tra Q ed V, è $n-4$, che è numero pari-pari. La stessa operazione faccio alla sinistra, cominciando da I, e arriverò parimente al punto V. Nella figura di 24 lati, che abbiam sotto l' occhio, alla sinistra e alla destra cinque riescono queste sottese, i mezzi lati corrispondenti son 20, ai quali se alla sinistra aggiungiam gli altri 4 tra Q ed O, o alla destra gli altri 4 tra O ed I, abbiamo per l' una e per l' altra parte 24 mezzi lati, che costituiscono la metà dell' intero perimetro del nostro poligono regolare. Sottesa la QX, guido al centro la retta XP; indi dal punto Y, che è al termine de' 2 mezzi lati dopo X, conduco parimente al centro la YP, e segno il punto X', ove essa sega la XZ. Da Y andando avanti, numero 6 mezzi lati, arrivo al punto Z', poi congiungo X'Z'. Oltre Y prendo altri 2 mezzi lati, che terminano in Z, e da questo punto faccio andare al centro la ZP, la quale taglia la X'Z' in X''. Cominciando da Z, numero altri 8 mezzi lati, arrivo a Z'', e meno la X''Z''. Distando Y' 2 mezzi lati da Z, secondo il solito, tiro la Y'P, che sega la X''Z'' in X'''. Conto da Y', dove siam giunti, 10 mezzi lati seguenti e arrivo a Z'''. Condotta poi la X'''Z''', faccio da Z' che è distante 2 altri mezzi lati da Y' andare al centro la retta

Z'P, che taglia la X'''Z''' in X''''. Non essendo ora più ignoto, come si debba procedere, qualora s' abbiano a continuare le operazioni, mi fermo quì; e siccome nella figura di 24 lati son già arrivato al vertice V e alla retta MRV, perchè X''' cade in M, X'''' in R, Z''' in V, le operazioni alla sinistra son terminate. Con simile andamento alla destra determineremo i punti T, T', T'', T''', T'''' &c.; D, D' &c.; S, S', S'', S''', S'''' &c.: e dovendo nel nostro poligono esser ultima la linea WKV, coincidono T''' in W, T'''' in K, S''' in V, e diventa VR = VK, VM = VW, siccome è chiaro. Giunti a queste ultime linee, si unisca R con W, K con M. Le rette MK, RW s' intersecheranno in un punto; ed io dico, che questo punto sarà lo stesso punto γ superiormente già determinato; la qual cosa si dee dimostrare, come anche, che colle eseguite costruzioni si determinano eziandio le posizioni e le grandezze de' vetti comunicanti, i quali costituiscono insiem coi già stabiliti l' intero sistema de' vetti che sciolgono il problema.

25 Ognun vede, che per dare questa dimostrazione, è necessario esprimere analiticamente i valori delle rette che fan parte delle nostre operazioni. Cominciam dalle rette PX, PX', PX'' &c. Quanto alla prima, poichè PX = PQ, e PQ = cos.x, sarà PX = cos.x = $\frac{\text{cos.}x\ \text{sen.}2x}{1.\ \text{sen.}2x}$. Per la 2.ª PX', rifletto essere anche PZ = cos.x, e sen.ZPX' = sen.$2x$. = sen.XPX', onde nasce sen.ZPX = sen.$4x$. Ma

(lem. 3 corol. 2) $PX' = \frac{PX\ .\ PZ\text{sen.}ZPX}{PX\text{sen.}XPX' + PZ\text{sen.}ZPX'}$.

Dunque $PX' = \frac{(\text{cos.}x)^2\ \text{sen.}4x}{\text{cos.}x\ \text{sen.}2x + \text{cos.}x\ \text{sen.}2x}$, ovvero PX' $= \frac{\text{cos.}x\ \text{sen.}4x}{2\ \text{sen.}2x}$. Quanto alla 3.ª PX''; si osservi essere l' angolo Z'PX'' = $4x$, l' angolo X''PX' = $2x$, l' angolo Z'PX' = $6x$, PZ' = cos.x; e perchè PX'' = $\frac{PZ'\ .\ PX'\ \text{sen.}Z'PX'}{PZ'\ \text{sen.}Z'PX'' + PX'\ \text{sen.}X'PX''}$, sarà colle specie PX'' =

$$\frac{\cos.x\ \cos.x\ \text{sen}.4x\ \text{sen}.6x}{2\ \text{sen}.2x\ \left(\cos.x\ \text{sen}.4x + \frac{\cos.x\ \text{sen}.4x\ \text{sen}.2x)}{2\ \text{sen}.2x}\right.} = \frac{\cos.x\ \text{sen}.6x}{3\ \text{sen}.2x},$$

dopo le riduzioni. Vado oltre, e poichè l' ang.° Z″PX″ $= 8x$, l' angolo Z″PX‴ $= 6x$, l' ang.° X‴PX″ $= 2x$, PZ″ $= \cos.x$, risulta $PX''' = \frac{PZ''\ PX''\ \text{sen}.Z''PX''}{PZ''\ \text{sen}.Z''PX''' + PX''\ \text{sen}.X''PX'''}$;

cioè in analisi al netto $PX''' = \frac{\cos.x\ \text{sen}.8x}{4\ \text{sen}.2x}$. Ponghiamo per ordine i termini della serie, e ci nasce $PX = \frac{\cos.x\ \text{sen}.2x}{1\ .\ \text{sen}.2x}$, $PX' = \frac{\cos.x\ \text{sen}.4x}{2\ \text{sen}.2x}$, $PX'' = \frac{\cos.x\ \text{sen}.6x}{3\ \text{sen}.2x}$,

$PX''' = \frac{\cos.x\ \text{sen}.8x}{4\ \text{sen}.2x}$; e continuandola colla legge che è chiara, $PX'''' = \frac{\cos.x\ \text{sen}.10x}{5\ \text{sen}.2x}$; &c. Quando $n = 24$, che è il caso della presente figura, i 4 ultimi termini della serie sono $PX''' = PM = \frac{\cos.x\ \text{sen}.8x}{4\ \text{sen}.2x}$, $PX'''' = PR = \frac{\cos.x\ \text{sen}.10x}{5\ \text{sen}.2x}$. Se fosse $n = 20$, numero che corrisponde alla fig.ª prossimamente minore tra quelle che hanno un numero di lati pari-pari, i 2 ultimi termini sarebbero $PX'' = PM = \frac{\cos.x\ \text{sen}.6x}{3\ \text{sen}.2x}$,

$PX''' = PR = \frac{\cos.x\ \text{sen}.8x}{4\ \text{sen}.2x}$; e proporzionatamente si discorra per le altre figure o superiori o inferiori. Ciò posto, potremo, coll' uso de' teoremi appartenenti alle espressioni de' termini generali delle serie, esibir quella delle ultime linee PM, PR nella fig.ª di lati n; e avremo $PM =$

$$\frac{\cos.x\ \text{sen}.\frac{(n-8)}{2}x}{\frac{n-8}{4}\ .\ \text{sen}.2x}; \ldots \text{ e } PR = \frac{\cos.x\ \text{sen}.\frac{(n-4)}{2}x}{\frac{n-4}{4}\ .\ \text{sen}.2x}.$$

26 Gli angoli ZPX′, Z′PX″, Z″PX‴ &c. seguitan la legge di questa serie $2x$, $4x$, $6x$, $8x$ &c. Quando $n = 24$, l' ultimo è $8x$; quando $n = 20$, l' ultimo è $6x$; e quindi

in generale l'ultimo, cioè $VPR = \frac{(n-8)x}{2}$; che dà $VPM = \frac{(n-4)x}{2}$, perchè $MPR = 2x$. Si cerchi ora l' espressione delle funzioni successive $\frac{ZX'}{XZ}, \frac{Z'X''}{X'Z'}, \frac{Z''X'''}{X''Z''}$, &c. sino all' ultima $\frac{VR}{VM}$. Quanto alla funzione $\frac{ZX'}{XZ}$, perchè ZX' è la metà di XZ, sarà $\frac{ZX'}{XZ} = \frac{1}{2}$. Le altre poi ci vengono somministrate dal 3.° Lemma, e col mezzo d'esso troviamo $\frac{Z'X''}{X'Z'} = \frac{PX''\,\text{sen}Z'PX'}{PX'\,\text{sen}.Z'PX'} = \frac{2}{3}$; $\frac{Z''X'''}{X'Z''} = \frac{PX'''\,\text{sen}.Z''PX''}{PX''\,\text{sen}.Z''PX''} = \frac{3}{4}$; &c. Ecco pertanto la serie delle suddette funzioni; $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots \frac{VR}{VM}$, che è l' ultima. Ma il termine generale di questa serie è $\frac{n-8}{n-4}$; perchè, fatto $n=24$, la serie finisce al 4.° termine $\frac{4}{5}$; fatto $n=20$, si ferma essa nel 3.° $= \frac{3}{4}$; e tali valori appunto si trovano sostituendo successivamente nel termine generale $n=24$, $n=20$. Dunque $\frac{VR}{VM} = \frac{n-8}{n-4}$ per il poligono di lati n. Prendiamo al rovescio questa serie, e fatto primo termine $\frac{n-8}{n-4}$, per avere il prossimo sarà mestieri in vece di n mettere $n-4$ nel 1.° termine; per avere il 3.° in ordine, mettere $n-8$; per il 4.°, $n-12$ &c. Così operando, ecco la serie rovesciata

(A) .... $\frac{n-8}{n-4}, \frac{n-12}{n-8}, \frac{n-16}{n-12} \ldots\ldots \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$. Ma

dall' essere $\frac{ZX'}{XZ} = \frac{1}{2}$, $\frac{Z'X''}{X'Z'} = \frac{2}{3}$, $\frac{Z''X'''}{X''Z''} = \frac{3}{4} \ldots \frac{XR}{VM} = \frac{n-8}{n-4}$, risultano le altre funzioni $\frac{XX'}{XZ} = \frac{1}{2}$, $\frac{XX''}{X'Z'} = \frac{1}{3}$, $\frac{X''X'''}{X''Z''} = \frac{1}{4} \ldots\ldots \frac{MR}{VM} = \frac{1}{\frac{n-4}{4}} = \frac{4}{n-4}$. Dunque prendendo anche quì la serie al rovescio, andrà essa con quest' ordine $\frac{4}{n-4}$, $\frac{4}{n-8}$, $\frac{4}{n-12}$, $\frac{4}{n-16} \ldots\ldots \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

27 Le linee analoghe dalla parte destra della figura sono simili in posizione ed eguali in grandezza a quelle della sinistra; e alle serie nella sinistra delle funzioni

$$\frac{ZX'}{XZ}, \frac{Z'X''}{X'Z'}, \frac{Z''X'''}{X''Z''} \ldots\ldots \frac{VR}{VM}$$

$$\frac{XX'}{XZ}, \frac{XX''}{X'Z'}, \frac{X''X'''}{X''Z''} \ldots\ldots \frac{MR}{VM}$$

corrispondon le serie delle funzioni alla destra

$$\frac{ST'}{TS}, \frac{S'T''}{T'S'}, \frac{S''T'''}{T''S''} \ldots\ldots \frac{VK}{VW};$$

$$\frac{TT'}{TS}, \frac{T'T''}{T'S'}, \frac{T''T'''}{T''S''} \ldots\ldots \frac{WK}{VW}.$$

Quindi poichè $\frac{VK}{VW} = \frac{VR}{VM} = \frac{n-8}{n-4}$; $\frac{WK}{VW} = \frac{MR}{VM} = \frac{4}{n-4}$, queste due ultime serie saranno identiche colle precedenti, e prese al rovescio termineranno esse pure nella frazione $\frac{1}{2}$.

28 Si è veduto essere l' angolo VPM $= \frac{(n-4)}{2} x$, l' angolo VPR $= \frac{(n-8)}{2} x$; e a questo essendo egua-

le VPK, si fa sen.VPK $=$ sen.γPK $=$ sen.$\frac{(n-8)}{2}x$; sen.VPM $=$ sen.γPM $=$ sen.$\frac{(n-4)}{2}x$; e sen.(γPM $+$ γPK) $=$ sen.MPK $=$ sen.$\left(\frac{n-8}{2}+\frac{n-4}{2}\right)x$ $=$ sen.$(n-6)x$. Ricordiamci, che è $x = \frac{2R}{n}$, cioè $nx = 2R$. Onde sen.$(n-6)x$ $=$ sen.$(2R-6x)$ $=$ sen.$6x$; e però sen.MPK $=$ sen.$6x$. Or, siccome P$\gamma = \frac{\text{PM . PKsen.MPK}}{\text{PMsen.M}\gamma + \text{PKsen.KP}\gamma}$(lem.3), coll'uso delle specie analitiche ci risulta il valor di Pγ, che spurgato verrà espresso dalla equazione P$\gamma = \frac{2\cos.x\ \text{sen}.6x}{(n-6)\text{sen}.2x}$.

29. Si conduca $\theta\delta$, e la VP prodotta incontri la $\theta\beta$ in ω. Perchè Pδ, Pθ sono eguali, e l'angolo δPθ è bisecato da Pω, sarà Pω perpendicolare ad $\theta\delta$. Abbiamo oltracciò r : cos.$3x$: : Pθ : Pω, e però Pω $= \frac{\text{P}\theta\cos.3x}{r} = \frac{\text{P}\delta\cos.3x}{r} = \frac{2\cos.x\,\text{sen}.3x\cos.3x}{3r\,\text{sen}.2x} = \frac{\cos.x\,\text{sen}6x}{3\,\text{sen}.2x}$. Sia P$\varphi$ parallela a $\gamma\theta$, e questa analogia ne risulterà $\beta\delta$: Pδ : : $\theta\beta$: Pφ $= \frac{\theta\beta\ .\ \text{P}\delta}{\beta\delta}$. Di più; $\theta\gamma$: Pφ : : $\gamma\omega$: Pω. Dunque $\gamma\omega$: Pω : : $\theta\gamma$: $\frac{\theta\beta\ .\ \text{P}\delta}{\beta\delta}$: : $\frac{\theta\gamma}{\theta\beta}$: $\frac{\text{P}\delta}{\beta\delta}$: : $\frac{n-3}{n-6}$: $\frac{n-3}{n}$ (n. 22,21) : : n : $n-6$; e dividendo, Pγ : Pω : : 6 : $n-6$, ossia Pγ : $\frac{\cos.x\ \text{sen}.6x}{3\text{sen}.2x}$: : 6 : $n-6$; onde P$\gamma = \frac{2\cos.x\ \text{sen}.6x}{(n-6)\text{sen}.2x}$, valore identico col trovato per mezzo delle serie nel numero antecedente, che dimostra cadere appunto l'intersezione delle due rette MK, WR nel già determinato punto γ. Essendo poi pel solito lem. 3, $\frac{\text{K}\gamma}{\text{KM}} = \frac{\text{P}\gamma\text{sen.KP}\gamma}{\text{PMsen.KPM}}$, adoprando i simboli, dopo le riduzioni sarà $\frac{\text{K}\gamma}{\text{KM}} = \frac{n-8}{2(n-6)}$,

e $\frac{M\gamma}{KM} = \frac{n-4}{2(n-6)}$; e conseguentemente $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} =$
$\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} = \frac{n-8}{2n}$.

30 Stabiliamo ora, che il sistema alla sinistra de' vetti comunicanti coi principali $\beta\delta$, $\theta\gamma$ sia composto delle rette XZ, X'Z', X''Z'' &c. e finalmente di MK, cui daremo il nome di vette d'unione, perchè unisce il sinistro al sistema destro de' vetti. Poichè prendendo KM per vette d'unione, non entra in azione la funzione $\frac{VR}{VM} = \frac{n-8}{n-4}$, ma bensì la susseguente $\frac{n-12}{n-8}$, e appresso tutte le altre $\frac{n-16}{n-12}, \frac{n-20}{n-16} \cdots \frac{1}{2}$, nella serie (A) (n. 25) si deve eliminare il 1.° termine $\frac{n-8}{n-4}$, e allora abbiamo $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} \cdots\cdots \frac{ZX'}{ZX} =$
$\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \cdots \frac{1}{2}$.
Con queste funzioni de' nostri vetti trasportiamo la pressione derivata da P al punto X, che è alla metà di F'F'' dove non è appoggio, e va distribuita ai punti F', F'' dove sono gli appoggj, ciascun de' quali dev' essere caricato della pressione $\frac{1}{n}$. Il perchè bisogna che risulti la pressione in X $= \frac{2}{n}$, e conseguentemente il prodotto de' termini della suddetta serie equivaler deve a $\frac{2}{n}$. In essa i 3 primi fattori $\frac{n-3}{n}$, $\frac{n-6}{n-3}$, $\frac{n-8}{2(n-6)}$, rappresentano le funzioni $\frac{P\delta}{\beta\delta}$, $\frac{\theta\beta}{\theta\gamma}$, $\frac{K\gamma}{MK}$ de' vetti $\beta\delta$, $\theta\gamma$, MK inservienti ad ambidue i sistemi, sinistro e destro, de' vetti comunicanti. Il prodotto delle funzioni del sistema sinistro di questi vetti, che ci portano la pressione al punto X, è dunque

$\frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \cdot \frac{(n-20)}{n-16} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; che chiamo p.
Diamo a n i valori nella serie 16, 20, 24, 28 ec., e avremo

$$n = 16 \;;\; p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

fatto $$n = 20 \;;\; p = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{3}$$

$$n = 24 \;;\; p = \frac{12}{16} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{4} \cdot \text{ ec.}$$

Dunque generalmente $p = \frac{1}{\frac{n-8}{4}} = \frac{4}{n-8}$, ove n sia nella serie 16, 20, 24 ec. E quindi risulta la Pressione in X $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{4}{n-8} = \frac{2}{n}$; la quale distribuita agli appoggj F′, F″ egualmente distanti da X, fa essere Pr. in F′ $= \frac{1}{n}$, Pr. in F″ $= \frac{1}{n}$; il che mostra rispetto ai suddetti appoggj F′, F″ esser giusta la posizione del sistema sinistro de' nostri vetti.

31 Esaminata la serie dell' equazione stabilita sopra $p = \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \cdot \frac{(n-20)}{n-16} \cdot \frac{(n-24)}{n-20} \cdots \frac{1}{2}$, osservo aver essa la proprietà, che se in vece di qualunque de' fattori del 2.° membro sostituisco il complemento del fattore all' unità, trascurando tutti i seguenti, non resta niente alterato il valore di p, che resta sempre $= \frac{4}{n-8}$.

Per esempio in vece del 1.° fattore $\frac{n-12}{n-8}$ metto $\frac{4}{n-8}$, che è il complemento all' unità dello stesso 1.° fattore, e trascuro tutti i rimanenti; diventa $p = \frac{4}{n-8}$, come prendendo l' intero prodotto. In vece di $\frac{n-16}{n-12}$, pongo il com-

complemento all' unità $\frac{4}{n-12}$, non curando i seguenti, e nasce $p = \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{4}{n-12} = \frac{4}{n-8}$: il che si verifica per qualunque altro fattore.

32 Ciò posto, ripigliamo l'intera serie delle funzioni de' vetti, e sottoponghiamo ai termini i valori corrispondenti;

$$(B) \ldots\ldots \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{MK} \ldots\ldots\ldots \frac{Z''X'''}{X''Z''} \cdot \frac{Z'X''}{XZ'} \cdot \frac{ZX'}{XZ};$$

$$(C) \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \ldots\ldots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

L' ultimo fattore $\frac{1}{2}$ rappresenta la funzione $\frac{ZX'}{XZ}$, e il prodotto di tutti i fattori della serie (C) il valore della pressione in X. Se in vece di $\frac{ZX'}{XZ}$ sostituisco $\frac{XX'}{XZ}$, ho la pressione in Z. Ma ciò facendo levo $\frac{1}{2}$ e metto $\frac{1}{2}$, che è il complemento a 1 della prima metà. Dunque (n. 31) anche in Z avrò la pressione $\frac{2}{n}$, la quale distribuita agli appoggj F''', F'''' dal vette F'''F'''' fa provare a ciascun d'essi la pressione $\frac{1}{n}$. Il vette che seguita è ZX', la sua funzione già esaurita è $\frac{Z'X''}{X'Z'} = \frac{2}{3}$, che insiem colle altre ha servito a determinare la pressione in X'. L' altra sua funzione, che spetta alla pressione in Z', è $\frac{X'X''}{XZ'} = \frac{1}{3}$. Dunque nella serie (B) in vece di $\frac{Z'X''}{XZ'}$ dobbiamo mettere $\frac{X'X''}{X'Z'}$ e trascurare la funzione unica susseguente $\frac{ZX'}{XZ}$. Ora perchè $\frac{X'X''}{XZ'}$ è il complemento all' unità di

$\frac{Z'X''}{X'Z'}$, nella serie (C) dobbiam surrogare al penultimo fattore $\frac{2}{3}$ il suo complemento all' unità, cioè $\frac{1}{3}$ non valutando l' ultimo fattore $\frac{1}{2}$; e avrem tuttavia il prodotto degli esistenti fattori, ossia la pressione in $Z' = \frac{2}{n}$ (n. 31), della quale il vette F''''' F'''''' ne dà la metà ovvero $\frac{1}{n}$ all' appoggio F''''', e l' altra metà all' appoggio F''''''. Il raziocinio riuscendo sempre il medesimo pei vetti susseguenti $Z''X''$ &c. sino al vette ultimo dalla parte sinistra, che è l' immediatamente precedente a VM, concluderemo, che la pressione in Z'' &c. sino all' ultima, la quale cade alla metà del lato che di un altro dista dall' ultimo aa', è $\frac{2}{n}$, e in conseguenza che tutti gli appoggj alla sinistra di num. $\frac{n-2}{2}$ sentono la stessa pressione $\frac{1}{n}$.

32 Passando dalla sinistra alla destra col vette d' unione KM, di cui sino ad ora abbiam fatto uso, in vece della funzione $\frac{K\gamma}{KM}$ dobbiam prendere la funzione $\frac{M\gamma}{KM}$, poi la funzione $\frac{VK}{VW}$, e fare il prodotto $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{KM} \cdot \frac{VK}{VW}$; indi, siccome le rette TS', $T'S'$, $T''S'$ . . . . . VW sono respettivamente eguali alle rette XZ, $X'Z'$, $X''Z''$ . . . . VM e similmente poste, così diremo essere le funzioni di quelle che portano alla pressione in T nella destra, le medesime con queste che trasferiscono la pressione in X. Ma il valore delle funzioni destre era rappresentato da $\frac{(n-12)}{n-8}$, $\frac{(n-16)}{n-12}$, $\frac{(n-20)}{n-16}$, . . . $\frac{1}{2}$. Dunque anche quel delle sinistre. E perchè $\frac{M\gamma}{KM} = \frac{n-4}{2(n-6)}$ (n. 29), $\frac{VK}{VW} = \frac{n-8}{n-4}$ (n. 27), sarà $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{KM} \cdot \frac{VK}{VW} = \frac{(n-3)}{n}$.

$\frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-4)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-8)}{n-4} = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)}$; onde la press. in T $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \ldots \frac{1}{2}$ = Pr. in X (n. 30) $= \frac{2}{n}$; e distribuita essa agli appoggj B', B'' col vette B'B'', $\frac{1}{n}$ sarà la quantità di pressione che carica B' e B''.

33 Replicando il discorso, che abbiamo fatto ne' precedenti numeri, troveremo le vere pressioni sui punti S, S', S'' &c., ciascuna delle quali è $\frac{2}{n}$, e non rimane che l' ultima in V, che si ottiene colla funzione $\frac{WK}{VW}$ in vece della funzione $\frac{VK}{VW}$, ossia di $\frac{4}{n-4}$ in vece di $\frac{n-8}{n-4}$. Ora $\frac{4}{n-4}$ è il complemento all' unità di $\frac{n-8}{n-4}$, che è il termine precedente al primo della serie $\frac{n-12}{n-8}, \frac{n-16}{n-12} \ldots \frac{1}{2}$. Dunque per la proprietà dimostrata di questa serie, $\frac{4}{n-4} = \frac{(n-8)}{n-4} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \ldots\ldots \frac{1}{2}$; e la pressione in V $= \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{KM} \cdot \frac{WK}{VW} = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-4)}{2(n-6)} \cdot \frac{4}{n-4} = \frac{2}{n}$; che rende ciascuna delle pressioni in a, $a' = \frac{1}{n}$. Alla destra i due appoggj in a', a fanno esservene due di più di que' che sono alla sinistra, e però tutti i destri saranno di num.° $\frac{n+2}{2}$, laddove i sinistri erano $\frac{n-2}{2}$. Questi due numeri in somma fanno n; ed ecco dimostrato, che colla divisata collocazione de' nostri vetti resta ca-

ricato ogni appoggio della pressione $\frac{1}{n}$, in una figura pari-latera ed equilatera di num:° di lati n, essendo questo numero pari-pari.

34 Nell' ottogono (Fig. 8) QX cade su QV, e IT sopra IV. Dunque son nulli tutti gli altri vetti della Fig. generale XZ, X'Z' &c..... MV; TS, T'S' &c..... VW; e coincidendo i punti M, K del vette d' unione della generale, e così W, R nel punto V della ottogona, ivi ancora cadrà il punto γ, onde da V guidata a θ la retta $V\theta$, e prodotta δP sino all' incontro con essa in β, sarà $\beta\delta$ il vette primario, il quale combinato col vette AQ e con EF alla sinistra, indi coi vetti $V\theta$, HI, aa' alla destra, darà le 8 eguali pressioni, ciascuna delle quali è $\frac{1}{8}$, agli angoli dell' ottogono. Che sia $P\gamma = PV$, il ricaveremo eziandio dalla formola generale $P\gamma = \frac{2\cos.x\,\text{sen}.6x}{(n-6)\,\text{sen}.2x} = \frac{\cos.x\,\text{sen}.6x}{\text{sen}.2x}$, perchè $n = 8$. Ora, essendo nell' ottogono $x = \frac{R}{4}$, e quindi $\text{sen}.2x = \text{sen}.\frac{R}{2}$, $\text{sen}.6x = \text{sen}.\frac{3R}{2} = \text{sen}.\frac{R}{2}$, è chiaro che si fa $P\gamma = \cos.x = PV$.

35 Nel quadrato (Fig. 9) fatte le prime operazioni, che prescrive la nostra regola per la determinazione de' punti δ, θ, si vede che I cade in Q, ove è parimente situato il punto V, e dove dico che dee trovarsi anche γ. Perchè avendosi in generale $P\gamma = \frac{2\cos.x\,\text{sen}.6x}{(n-6)\,\text{sen}.2x}$, quando $n = 4$, si fa $x = \frac{2R}{n} = \frac{R}{2}$; onde $\text{sen}.2x = R$, $\text{sen}.6x = \text{sen}.3R = -\text{sen}.R$; sicchè $P\gamma = -\frac{2\cos.x\,\text{sen}.R}{-2\,\text{sen}.R} = \cos.x = PQ$.
Nella costruzione generale veniva determinato il punto β dal concorso delle rette δP, $\gamma\theta$. Ma queste è visibile che pel quadrato concorrono nel punto H. Dunque β cade in H, e δPH è il vette primario. I comunicanti alla

sinistra sono $A\delta Q$, EQF, e questi 3 soli vetti esauriscono colle loro funzioni le 4 pressioni agli angoli del quadrato non avendo luogo le ulteriori delle ZX, $Z'X'$, $Z''X''$ &c., che si presentano nelle figure superiori. Sarà pertanto $\text{Pr. in H} = \frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n} = \frac{1}{4}$; $\text{Pr. in A} = \frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ} = \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$; $\text{Pr. in E} = \frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{QF}{EF} = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \text{Pr. in F}$, come dev' essere.

36 Regola II per istabilire il sistema de' vetti, che servono a portar le pressioni dal peso collocato nel centro della figura regolare agli angoli ove sono gli appoggj, quando essa è denominata da un numero pari-dispari.

Scelgo per figura generale il poligono di 18 lati eguali (Fig. 10); e praticate le stesse preparazioni, che si sono eseguite nella Fig. 7, indi tirata sino al lato sublime aa' la OPV, veggo che la serie delle sottese a 4 mezzi lati, QX, XZ, ZZ', Z'Z'' &c. non può per ragion del num.° de' lati pari-dispari arrivare al punto V, da cui l' ultima terminerà alla distanza di 2 mezzi lati. Nella Fig. di 18 lati le sottese alla sinistra son tre, QX, XZ, ZZ', e il punto Z' è distante da V perimetricamente dei 2 mezzi lati $Z'a$, aV. Lo stesso pur si dica delle sottese alla destra, che comincian da I, e terminano alla distanza di 2 mezzi lati da V, i quali sono nella Fig. di 18 $S'a'$, a'V. Ciò posto, poichè abbiamo tra Q e il punto estremo dell' ultima sottesa un num.° di mezzi lati pari-pari, è chiaro che le altre linee X'Z', X''Z'' &c. determinate col metodo della 1.ª regola hanno l' ultima terminante alla stessa distanza di 2 mezzi lati da V; il che vuolsi dir pure delle linee analoghe alla destra. Siano R, K questi estremi punti, e M, W siano i punti d' intersezione degli ultimi vetti comunicanti a sinistra e a destra colle ultime delle linee PZ, PZ' &c..... PS che vanno al centro. Congiungo RK che si fa parallela ad aa', siccome il sarà anche la MW. Ora dico, che MW taglia la OV in γ per modo che, condotta $\gamma\theta$, e prolungata la δP sino al concorso con essa in β, sarà $\delta\beta$ il vette primario, l' altro principale $\gamma\theta$, e MW il vette d' unione de' due sistemi.

37 Per dimosttare la proposizione, cominciamo dalla serie degli angoli ZPX', Z'PX'', Z''PX''' &c. ..... MPR. Questi sono, come dà la 1.ª regola, $2x$, $4x$, $6x$, $8x$ &c. sino all' ultimo MPR. Nella Fig. di 18 lati l' ultimo è $4x$, in quella di 22 sarà $6x$ &c. Dunque, pei canoni de' termini generali delle serie aritmetiche, l' ang.° ultimo MPR nella Fig. generale è $= \frac{(n-10)x}{2}$. Aggiungiamo a MPR l' ang.° RPV $= 2x$, e verremo a formar l' ang.° MPV $=$ MPγ $= \frac{(n-6)x}{2}$. A questo è eguale WPγ; onde tutto l' ang.° MPW$=(n-6)x$. In oltre alla serie PX, PX', PX'', PX''' &c. corrispondono i valori seguenti: $\frac{\cos.x \text{ sen}.2x}{1 . \text{sen}.2x}$, $\frac{\cos.x \text{ sen}.4x}{2 \text{ sen}.2x}$, $\frac{\cos.x \text{ sen}.6x}{3 \text{ sen}.2x}$ &c. (n. 25), e nella Fig. di 18 lati l' ultima linea è PX'' $= \frac{\cos.x \text{ sen}.6x}{3 \text{ sen}.2x} =$ PM. Dunque in generale

$$PM = \frac{\cos.x \text{ sen}.\frac{(n-6)x}{2}}{\frac{(n-6)}{4}\text{sen}.2x} = PW.$$

Quindi viene Pγ $=$

$$\frac{PM . PW \text{ sen}.MPMW}{PM \text{ sen}.MP\gamma + PW \text{ sen}.WP\gamma} \text{ (lem. 3) } = \frac{PM \text{ sen}.MPW}{2 \text{ sen}.MP\gamma} =$$

$$\frac{\cos.x \text{ sen}.\frac{(n-6)}{2}x \text{sen}.(n-6)x}{\frac{(n-6)}{2}\text{sen}.2x \text{ sen}.\frac{(n-6)}{2}x};$$

cioè Pγ $= \frac{\cos.x \text{sen}.(n-6)x}{\frac{(n-6)}{2}\text{sen}.2x}$

$= \frac{2\cos.x \text{ sen}.6x}{(n-6)\text{sen}.2x}$, perchè sen.$nx =$ sen.2R, e sen.$(n-6)x =$ sen.$(2R-6x) =$ sen.$6x$. Ciò posto, poichè è l' ang.° $\gamma P\beta$ $=$ ang.° δPO $= 3x$, l' ang.° $\theta P\beta = 2R - \delta P\theta = 2R - 6x$, l' ang.° $\theta P\gamma = 2R - 6x + 3x = 2R - 3x$, e oltracciò P$\theta$ $=$ Pδ $= \frac{2\cos.x \text{ sen}.3x}{3 \text{ sen}.2x}$ (n. 21), Pβ $= \frac{P\gamma . P\theta \text{ sen}.\theta P\gamma}{P\gamma \text{ sen}.\gamma P\beta + P\theta \text{ sen}.\theta P\beta}$

(lem. 3), sarà coi simboli e colle riduzioni $P\beta = \frac{2 \cos.x \text{ sen}.3x}{(n-3)\text{ sen}.2x'}$, valore identico col trovato nella precedente regola, il quale costituisce $\beta\delta$ vette primario delle nostre pressioni. Ma dallo stesso lem. 3 abbiamo $\frac{\beta\gamma}{\gamma\theta} = \frac{P\beta \text{ sen}.\gamma I\beta}{I\theta \text{ sen}.\gamma P\theta}$, coi simboli $= \frac{3}{n-3}$. Dunque $\theta\gamma$ è l' altro vette principale, e pei valori di qnesti 2 vetti son conformi i risultati della 1.ª e della 2.ª regola, che li presentano colle medesime espressioni.

38 Anche i valori delle funzioni de' vetti comunicanti, $\frac{ZX'}{XZ}, \frac{Z'X''}{X'Z'}, \frac{Z''X'''}{X''Z''}$ &c. devon' esser gl' istessi che quelli della 1.ª regola, perchè nella 1.ª e nella 2.ª sono affatto simili le costruzioni; e però costituiscono essi la serie $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ &c., che ha per termine generale $\frac{n-10}{n-6}$. In fatti, posto $n = 18$, diventa $\frac{n-10}{n-6} = \frac{2}{3}$, e nella Fig. di 18 lati, essendo $Z'X'$ l' ultimo vette comunicante del sistema sinistro, si fa realmente $\frac{Z'X''}{Z'X'} = \frac{2}{3}$. Dunque il prodotto delle funzioni di questi che trasferiscono la pressione al punto X, equivale, prendendo al rovescio la serie, a $\frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \cdot \frac{(n-18)}{n-14} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{n-6}$; la quale ugualità si proverà, come s' è fatto al n. 30. Sarà altresì vero, che in vece di qualunque dei fattori del prodotto si può sostituire il suo complemento all' unità, non valutando tutti i susseguenti, senza cangiamento nel risultato $\frac{4}{n-6}$, come si ha dall' intero prodotto: e con queste sostituzioni successive verremo a rappresentare le funzioni ultime ascendendo, $\frac{XX'}{XZ}, \frac{X'X'}{X'Z'}, \frac{X''X''}{X''Z''}$ &c.,

che trasferiscono le pressioni ai punti Z, Z′, Z″ .... R. Finalmente tutto ciò, che si è detto relativamente al sistema sinistro de' vetti, converrà pure al destro, ove i vetti sono simili nella posizione ai primi, ed eguali di numero, mentre nelle figure della 1.ª regola il num.° de' vetti alla destra superava di un' unità quelli della sinistra.

39 Un' altra diversità, che passa tra le figure soggette alla 1.ª regola e quelle della 2.ª, sta nel vette d' unione MW, e nelle sue eguali funzioni $\frac{M\gamma}{MW}$, $\frac{W\gamma}{MW}$. Il valore di ciascuna di queste funzioni non è altro che $\frac{1}{2}$, laddove nella Fig. 7 era la funzione del vette d' unione $\frac{K\gamma}{KM} = \frac{n-8}{2(n-6)}$, e l' altra $\frac{M\gamma}{KM} = \frac{n-4}{2(n-6)}$. La qual cosa avvertita, noi possiam tosto presentare il valore dell' intero prodotto delle funzioni, che ci guidano alle pressioni ne' punti X, Z, Z′, Z″ &c., o ai punti T, S, S′, S″ &c. Imperocchè, essendo la quantità della pressione in $X = \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{W\gamma}{MW} \cdot \frac{MR}{MN} \ldots\ldots \frac{Z''X'''}{X'Z''} \cdot \frac{ZX''}{XZ'} \cdot \frac{ZX'}{XZ}$, colle specie analitiche abbiamo Pres. in $X = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \cdot \frac{(n-18)}{n-14} \ldots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; ossia, perchè $\frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \ldots\ldots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{n-6}$ (n. 38),

Press. in $X = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n-6} = \frac{2}{n} =$ Pr. in T.

E per ciò che si è detto al n. 38, anche le pressioni in Z, Z′, Z″ ..... R, o in S, S′, S″ ..... K saranno ciascuna $= \frac{2}{n}$; e quindi ad ogni appoggio F′, F″ ..... *a*, e così B′, B″ .... *a′*, verrà trasferita dai vetti la pressione $\frac{1}{n}$.

40 Si è veduto essere il prodotto $\frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \cdot \frac{(n-18)}{n-14}$ ....

...... $\frac{1}{2} = \frac{4}{n-6}$. Laonde, fatto $n = 10$, risulta esso $=$ $\frac{4}{4} = 1$. Dal che si deduce, che i soli 3 primi fattori $\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2}$ danno la pressione in X nel decagono (Fig. 11); e che si ha Press. in X o in T $=$ $\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10}$.

41 L'essagono (Fig. 12), che è la più semplice delle figure di num.° di lati pari-dispari, pare a prima vista che si sottragga dall' inclusione nelle nostre formole generali, e voglia un trattamento a parte; atteso che, essendo per l' essagono $x = \frac{R}{3}$, $2x = \frac{2R}{3}$, $6x = 2R$, che dà sen.$6x$ $=$ sen.$2R = 0$, se si pongono questi valori nel generale di $P\gamma = \frac{2 \cos.x \text{ sen}.6x}{(n-6) \text{ sen}.2x}$, perchè $n = 6$, risulta $P\gamma = \frac{0}{0}$, che ci lascia affatto al bujo. Ma rimoveremo questa oscurità col rivolgerci all' espressione generale di $P\delta = \frac{2 \cos.x \text{ sen}.3x}{3 \text{ sen}.2x}$, la quale si cangia per la nostra figura in $P\delta = \frac{2 \cos.\frac{R}{3} \text{ sen}.R}{3 \text{ sen}.\frac{2R}{3}}$; e siccome $\cos.\frac{R}{3} = \text{sen}.\frac{2R}{3}$, sen.$R = r = PE$, avrem $P\delta =$ $\frac{2r}{3} = P\theta$. Ma in generale $P\beta = \frac{3P\delta}{n-3}$. Dunque $P\beta = \frac{2r}{3}$ $= P\delta$ nell' essagono. Adattando pertanto la Fig. 10 alla presente, riusciranno eguali le rette $P\beta$, $P\theta$, sarà isoscele il triangolo $\theta P\beta$, e l' angolo $\delta P\theta$ esterno doppio dell' ang.° $P\theta\beta$. Ma l' ang.° $\delta P\theta = 6x = 2R$. Dunque $P\theta\beta = R$. Ora, congiunta $\theta\delta$ che sega la PO in ω, anche l' ang.° $\omega P\theta$, metà dell' ang.° $\delta P\theta$, è un retto; in conseguenza le rette ωP, $\theta\beta$ diventan parallele. Ma il concorso di queste rette determina il pun-

to γ. Dunque questo punto nell' essagono è a un' infinita distanza da P, e però Pγ infinita. In oltre sta r : cos.$3x$: : Pθ : Pω; e per l' essagono, r : cos.R : : Pθ : Pω, cioè Pω = o, perchè cos.R = o. Onde il punto ω cade in P; ed essendo δPθ = 2R, Pθ sarà nella direzione di δPβ; e poichè Pθ = Pβ, il punto θ cadrà in β, e nulla si farà la $\theta\beta$; il che rende nulle le pressioni, che derivano dalla pressione in γ colla funzione $\frac{\theta\beta}{\theta\gamma} = \frac{n-6}{n-3} = o$, nel nostro caso di $n=6$. Ecco perciò, come dalle nostre formole generali si deduce il modo di determinare il vette primario $\beta\delta$ nell' essagono. Trovati secondo il solito i punti δ, θ (Fig. 12), si tiri pel centro la δP, che prodotta va a θ. Ma in θ pure cade il punto β. Dunque abbiamo in pronto la direzione e la grandezza del vette primario $\beta\delta$, il quale combinato cogli altri vetti AQ, EF, IH, BC ci dà la pressione $\frac{1}{6}$ per ciascun angolo della figura.

42 Regola III. per determinare il vette primario e la posizione degli altri vetti, che portano la pressione $\frac{1}{n}$ a ciascun appoggio negli angoli delle figure impari-latere, quando $n+1$ è un numero pari-pari, posto il peso P nel centro della figura.

Assunto un angolo qualunque A della fig. 13, che quantunque di 23 lati eguali si deve considerare come generale, alla sinistra procederemo collo stesso metodo, che si è praticato per le figure pari-latere. Verremo per tal modo a determinare il punto δ, il braccio δP del vette primario e in seguito gli altri vetti utili del sistema sinistro XZ, X'Z', X''Z'', X'''Z''' &c. Condotta da A pel centro P sino al punto V del lato sublime aa' la retta APV, l'ultimo vette MRV terminerà nel punto V, perchè tra A ed V rimanendo frapposti num.° n di mezzi lati, levati i 3 mezzi lati tra A e Q, tra Q ed V vi sarà il numero di mezzi lati $n-3 = n+1-4$; e siccome $n+1$ è per l' ipotesi num.° pari-pari, lo sarà pure $n+1-4 = n-3$; onde

per ciò che si è detto nella 1.ª regola, l' ultimo vette MRV avrà un de' suoi termini nel punto V, e il punto R d' intersezione dell' ultimo vette coll' ultima linea centrale verrà determinato con operazioni simili alle praticate nelle figure di num.° di lati pari-pari. Alla destra sottendo la AI a 3 mezzi lati, e principiando da I replico le medesime costruzioni eseguite nella sinistra da Q sino all' ultimo vette destro WKV, essendo chiaro che quest' ultimo vette eziandio dee terminare in V, e che i punti W, K sono gli analoghi ai punti M, R. Come siam giunti a questi ultimi vetti, dobbiam condurre le rette RW, KM. Queste si segano in qualche punto γ, che sarà un punto della retta APV, il che è evidente. Ora da γ ad I tiriamo una retta, che sarà incontrata dalla $\delta\Omega$ prodotta in un punto β. Sarà $\delta\beta$ il vette primario, γI il 2.° vette principale, KM il vette d' unione; e combinati questi vetti col sistema sinistro e destro degli altri vetti comunicanti, si avrà a ciascun degli appoggj la pressione $\frac{1}{n}$.

43 Per dimostrare la proposizione, rifletteremo, che essendo state condotte le rette PX, PX', PX'' ec. collo stesso metodo adoperato nelle figure pari-latere, i loro valori saranno espressi come sopra al num.° 25; cioè sarà

$$PX = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.2x}{1 . \operatorname{sen}.2x},\ PX' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.4x}{2 \operatorname{sen}.2x},\ PX'' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.6x}{3 \operatorname{sen}.2x}$$

&c. Prendendo la KM per vette d' unione, nel poligono di 23 lati la PM diventa $= PX''' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.8x}{4 \operatorname{sen}.2x}$. Sarà quindi facile lo stabilire, che dev' essere in generale

$$PM = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.\left(\frac{n-7}{2}\right)x}{\left(\frac{n-7}{4}\right)\operatorname{sen}.2x} = PW;$$ per ragione dell' eguaglianza de' due sistemi. Così nello stesso poligono la PR si fa $= PX'''' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.10x}{5 \operatorname{sen}.2x}$; e quindi generalmente

$$PR = \frac{\cos.x \, \text{sen.}\left(\frac{n-3}{2}\right) x}{\left(\frac{n-3}{4}\right) \text{sen.}2x} = PK$$. Rapporto agli angoli XPZ, X'PZ', X''PZ'', si sa che per la costruzione fatta crescono colla legge di questa serie $4x$, $6x$, $8x$, $10x$ &c.; e si vede, che l' ultimo MPV nel poligono di 23 lati è X'''PZ''' $= 10x$. Dunque in generale MPV $= \frac{(n-3)x}{2}$, e sen.MPV $=$ sen.MP$\gamma =$ sen.$\frac{(n-3)x}{2}$. Perchè poi RPV $=$ MPV $- 2x = \frac{(n-7)x}{2}$, avrem sen.RPV $=$ sen.KPV $=$ sen.KP$\gamma =$ sen.$\frac{(n-7)x}{2}$; e in conseguenza sen.MPK $=$ sen.$(n-5)x =$ sen.$5x$, perchè sen.$nx =$ sen.$2R = 0$. Ma (lem. 3) $P\gamma = \frac{PM . PK \, \text{sen.MPK}}{PM \, \text{sen.MP}\gamma + PK \, \text{sen.KP}\gamma}$. Dunque in analisi $P\gamma = \frac{2\cos.x \, \text{sen.}5x}{(n-5) \, \text{sen.}2x}$. In oltre si trova essere $\frac{K\gamma}{MK} = \frac{P\gamma \, \text{sen.KP}\gamma}{PM \, \text{sen.MPK}}$, cioè $\frac{K\gamma}{MK} = \frac{n-7}{2(n-5)}$; e però $\frac{M\gamma}{MK} = \frac{n-3}{2(n-5)}$. Sicchè restan note le due funzioni del vette d' unione MK, che trasferisce col mezzo de' due sistemi de' vetti le pressioni agli appoggj.

44 Le funzioni del sistema sinistro de' vetti, che ci portano all' ultima pressione in X, sono $\frac{ZX'}{ZX}$, $\frac{Z'X''}{Z'X'}$ &c. sino al vette che immediatamente precede all' ultimo MV. Ora i valori di queste funzioni è già noto osservar la legge della serie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c., di maniera che nella figura di 23 lati termina alla funzione $\frac{Z''X'''}{X''Z''} = \frac{3}{4}$. Laonde il termine ultimo e generale viene ad essere $\frac{n-11}{n-7}$; e presa al

rovescio, la serie sarà $\frac{n-11}{n-7}, \frac{n-15}{n-11}, \frac{n-19}{n-15} \ldots \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$.

E poichè la pres. in X è eguale a $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM}$ moltiplicato nel prodotto delle suddette funzioni, di cui le ultime discendendo sono $\frac{Z''X'''}{Z'X''}, \frac{Z'X''}{ZX'}, \frac{ZX'}{ZX}$; sostituiti alla serie i corrispondenti valori analitici, si ottiene la Pres. in X $= \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} \cdot \frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \cdot \frac{(n-19)}{n-15} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

Di più osservo, che se nel prodotto de' fattori della suddetta serie faccio successivamente $n = 15$, $n = 19$, $n = 23$, mi risulta questo prodotto $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Quindi generalmente sarà esso prodotto $\frac{1}{\frac{n-7}{4}} = \frac{4}{n-7}$. Posso dunque sostituire nella pressione in X questo valore; e nasce Pr. in X $= \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} \cdot \frac{4}{n-7}$. Ora, perchè è l'angolo API $= 3x$, $\delta PA = \gamma P\beta = 2x$; sarà $IP\gamma = 2R - 3x$, $IP\beta = 2R - 5x$; e perciò $\text{sen}.\gamma P\beta = \text{sen}.2x$, $\text{sen}.IP\beta = \text{sen}.5x$., $\text{sen}.IP\gamma = \text{sen}.3x$. Ma $P\beta = \frac{P\gamma \cdot PI\,\text{sen}.IP\gamma}{P\gamma\,\text{sen}.\gamma P\beta + PI\,\text{sen}.IP\beta}$; $\frac{\beta\gamma}{I\gamma} = \frac{P\beta\,\text{sen}.\gamma P\beta}{PI\,\text{sen}.\gamma PI}$ (lem. 3). Dunque colle specie e colle riduzioni, $P\beta = \frac{2\cos.x\,\text{sen}.3x}{(n-3)\,\text{sen}.2x}$, come al n. 21; $\frac{\beta\gamma}{I\gamma} = \frac{2}{n-3}$, e quindi $\frac{I\beta}{I\gamma} = \frac{n-5}{n-3}$, $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{3}{n}$, $\frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n}$. Onde nasce, sostituendo, Pres. in X $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{(n-7)}{2(n-5)} \cdot \frac{4}{n-7} = \frac{2}{n}$, che è pression vera, mentre con questa ho le pressioni agli appoggj F', F'', che son la metà, cioè $\frac{1}{n}$.

45 Il prodotto $\frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ è fornito della proprietà medesima, che aveva il prodotto analogo nelle figure pari-latere. Se a qualunque fattore sostituisco il suo complemento all' unità, ommettendo gli altri che seguono, ho il medesimo risultato dell' intero prodotto. E le cose altrove già dette manifestano, che con queste successive sostituzioni io voglio rappresentar le funzioni $\frac{XX'}{XZ}$, $\frac{X'X''}{X'Z'}$ &c. sino all' ultima della parte sinistra, che nella fig. di 23 lati è $\frac{X''X'''}{X''Z''}$; le quali servono alla determinazione delle pressioni in tutti i punti Z, Z', Z'' &c. Ciascuna di queste è $\frac{2}{n}$; e quindi $\frac{1}{n}$ ciascuna delle altre in F', F'', F''' &c.

46 Avendo noi adoperato il vette d' unione KM, relativamente al sistema destro, oltre il numero eguale de' vetti similmente collocati che nel sinistro, entra in azione anche il vette VKW colle sue funzioni $\frac{VK}{VW}$, $\frac{WK}{VW}$; e alla funzione $\frac{K\gamma}{MK}$, che spettava all' altro sistema, devesi ssotituir la funzione $\frac{M\gamma}{MK} = \frac{n-3}{2(n-5)}$ (n. 43). Ora, essendo $\text{sen.}MPV = \text{sen.}VPW = \text{sen.}\frac{(n-3)x}{2}$, $\text{sen.}KPV = \text{sen.}KP\gamma = \text{sen.}\frac{(n-7)x}{2}$, come altresì $\text{sen.}KPW = \text{sen.}2x$, $PK = \frac{\cos.x\ \text{sen.}\frac{(n-3)}{2}x}{\frac{(n-3)}{4}\text{sen.}2x}$ (n. 43), $PV = \cos.x$, e pel lem. 3, $\frac{WK}{VW} = \frac{PK\text{sen.}KPW}{PV\text{sen.}VPW}$, avremo in analisi $\frac{WK}{VW} = \frac{4}{n-3}$; e quindi $\frac{VK}{VW} = \frac{n-7}{n-3}$. Il resto è lo stesso come nel

sistema sinistro. Onde ne risulta la pressione in T $= \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{MK} \cdot \frac{VK}{VW} \cdot \frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; ossia Pres. in T $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{(n-3)}{2(n-5)} \cdot \frac{(n-7)}{n-3} \cdot \frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Ma il 3.° e il 4.° fattore danno il risultato $\frac{n-7}{2(n-5)}$, che rende identico il valore della pres. in T con quello della pres. in X. Dunque anche la pres. in T $= \frac{2}{n}$; e tale sarà ancora per le cose dimostrate la pressione in S, S', S'', &c. Perchè poi $\frac{n-7}{n-3}$ è il termine precedente della serie de' fattori $\frac{n-11}{n-7}, \frac{n-15}{n-11} \ldots \frac{1}{2}$, avrà esso pure la proprietà, che sostituendo in sua vece il suo complemento all' unità, cioè $\frac{4}{n-3}$, coll' ommissione de' fattori susseguenti troveremo essere anche la pressione in V $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{(n-3)}{2(n-5)} \cdot \frac{4}{n-3} = \frac{2}{n}$; e questa serve a caricar della pres. $\frac{1}{2}$ gli ultimi appoggj a, a'. Finalmente è la pres. in I $= \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{I\gamma} = \frac{(n-3)}{n} \frac{2}{n-3} = \frac{2}{n}$; il che fa sentire la pressione $\frac{1}{n}$ anche agli appoggj B, B'. Dunque &c.

47 Nell' eptagono (Fig. 14), perchè $x = \frac{2R}{7}$, abbiamo $\text{sen.}5x = \text{sen.}\frac{10R}{7} = \text{sen.}(2R - \frac{10R}{7}) = \text{sen.}\frac{4R}{7} = \text{sen.}2x$, ed è $P\gamma = \frac{2\cos.x \,\text{sen.}5x}{(n-5)\,\text{sen.}2x} = \cos.x$; onde diventa $P\gamma = PV$,

e γ cade in V. Condotta perciò γI, che incontra in β la δP protratta, si determina il vette primario $\beta\delta$ dell' eptagono, il quale insiem cogli altri vetti γI, AQ &c. dà ciascuna delle pressioni agli angoli $= \frac{1}{7}$. L'ambiguità che nasce dalla generale espressione di $PM = \frac{\cos.x \text{ sen.} \frac{(n-7)}{2} x}{\frac{(n-7)}{4} \text{sen.} 2x}$, la quale modificata all' ipotesi di $n = 7$ si cangia in $PM = \frac{0}{0}$, resta tolta colla riflessione, che nella costruzione generale eseguita nella fig. 13. la QX è stata sottesa a 4 mezzi lati del poligono; sicchè facendo lo stesso nell' eptagono, X cade in V, Q in M, e la QX diventa l' ultima sottesa MV. Dunque $PM = PQ = \cos.x$; con che si fa noto il valore indeterminato $\frac{0}{0}$, che risulta nel caso nostro dalla formola generale del valore di PM.

48 Anche il triangolo equilatero AEF (Fig. 15) resta compreso nelle nostre formole tosto che avremo dilucidati gli equivoci che nascono nelle generali ad esso adattate. A buon conto vediamo, che coincidono i punti Q V, che l' intersezion delle rette AQ LF dev' essere in P, e in conseguenza ivi è pur δ. In oltre, poichè nel triang.° AEF $x = \frac{2R}{3}$, $2x = \frac{4R}{3}$, $5x = \frac{10R}{3}$; sarà $\text{sen.} 5x = \text{sen.} \frac{10R}{3}$ $= \text{sen.}\left(2R - \frac{10R}{3}\right) = \text{sen.}\left(-\frac{4R}{3}\right) = -\text{sen.}\frac{4R}{3} = -\text{sen.} 2x$.

Laonde nella formola generale di $P\gamma = \frac{2 \cos.x \text{ sen.} 5x}{(n-5) \text{ sen.} 2x}$, fatto $n = 3$, risulterà $P\gamma = \cos.x = PQ$; ed ecco che anche γ cade in V. Egli è poi nel valor di Pβ che si presenta l' ambiguità; perchè essendo $P\beta = \frac{2 \cos.x \text{ sen.} 3x}{(n-3) \text{ sen.} 2x}$ (n. 44), quando $n = 3$, facendosi $\text{sen.} 3x = \text{sen.} 2R = 0$, diventa $P\gamma$

=

$= \frac{o}{o}$. Ma a toglier l'equivoco, avendo sotto agli occhj la general figura 13, ragioneremo così. Poichè si è trovato $P\gamma = \cos.x = PI$, sarà isoscele il triang.° γPI, ed essendo ang.° $API = 3x$, viene pel caso nostro $P\gamma\beta = \frac{3x}{2}$, $\text{sen}.P\gamma\beta = \text{sen}.\frac{3x}{2}$, $\cos.P\gamma\beta = \cos.\frac{3x}{2}$. Otracciò $\text{sen}.\gamma P\beta = \text{sen}.\delta PA = \text{sen}.2x$, $\cos.\gamma P\beta = \cos.2x$; e quindi $\text{sen}.P\beta\gamma = \text{sen}.\frac{7x}{2} = \text{sen}.\left(2R - \frac{7R}{3}\right) = \text{sen}.\left(-\frac{R}{3}\right) = -\text{sen}.\frac{R}{3}$. Ma $\text{sen}.P\beta\gamma : \text{sen}.P\gamma\beta :: P\gamma : P\beta$. Dunque $-\text{sen}.\frac{R}{3} : \text{sen}.\frac{3x}{2} :: \cos.x \left(= \cos.\frac{2R}{3} = \text{sen}.\frac{R}{3}\right) : P\beta$, e $P\beta = -\text{sen}.\frac{3x}{2} = -\text{sen}.R = -r = PE$, perchè il valor di $P\beta$ è negativo. Cadendo β in E (Fig. 15), il verte primario nel triang. equilatero è $\beta P\delta$, di cui un braccio βP è eguale al raggio PE, l'altro $P\delta$ è nullo. Onde tutte le pressioni che dipendono dalla funzione $\frac{P\delta}{\beta\delta}$ nella Fig. 13, pel triangolo son nulle. Rispetto poi a quelle che dipendono dalla funzione $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{P\beta}{P\beta} = 1$, non essendovi altri vetti comunicanti che APQ, ed EQF, sarà la pres. in $A = \frac{\beta P}{\beta\delta} \cdot \frac{QP}{AQ} = \frac{QP}{AQ} = \frac{1}{3}$. Così la pressione in $E = \frac{\beta P}{\beta\delta} \cdot \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{QF}{EF} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. E perchè tale è ancora la pres. in F, noi abbiam già dalle nostre formole generali dedotte le 3 pressioni eguali agli angoli del triangolo equilatero: E possiamo francamente asserire, che tutte le figure, le quali soggiacciono alla condizione di questa terza regola, sono comprese nella nostra general costruzione.

49 Regola IV per determinar le pressioni agli angoli nelle figure regolari impari-latere, quando, il num.° n di

lati sia tale, che $n+1$ sia un numero pari-dispari, supposto il peso nel centro della figura.

Quest' ultima regola accetta le medesime preparazioni e costruzioni che si sono eseguite per le figure della 3.ª regola; e la Fig. 16 di 25 lati si assume come generale. Però in questa si vede che tra A ed V sono frapposti n mezzi lati alla sinistra e alla destra; e perchè sì AQ che AI son sottese di 3 mezzi lati, sarà $n-3$ il num.° de' mezzi latï tra Q ed V, come tra I ed V. Ma è $n-3=n+1-4$, e $n+1$ è num.° pari-dispari. Dunque non può essere $n+1-4$ ossia $n-3$ num.° pari-pari, e in vigore delle nostre operazioni consuete non può l' ultimo vette del sistema sinistro o destro arrivare ad V. Dico in oltre che terminerà di quà e di là 2 mezzi lati al di sotto di V in R, e in K, perchè essendone il num.°, tra Q, R, e tra I, K, $=n-5=n+1-6$, dall' essere $n+1$ pari-dispari, risulterà il num.° $n+1-6=n-5$ pari-pari. Tosto che siam giunti alle intersezioni M, W delle ultime rette PM, PW cogli ultimi vetti de' due sistemi, dobbiam guidare la MW, che sega la AV in γ. Questa è parallela al lato sublime aa', cui anche è parallela RK. Si conduca la γI incontrata da δP in β; e $\delta\beta$ è il vette primario, γI il 2.° vette principale, MW il vette d' unione. Eccone la prova. Le PX, PX', PX''.... PM costituiscono la serie $\frac{\cos.x \text{ sen}.2x}{1.\text{sen}.2x}$, $\frac{\cos.x \text{ sen}.4x}{2 \text{ sen}.2x}$, $\frac{\cos.x \text{ sen}.6x}{3 \text{ sen}.2x}$ &c.; il termine generale, cioè PM, sarà espresso così, $PM = \frac{\cos.x \text{ sen}.\frac{(n-5)x}{2}}{\frac{(n-5)}{4}\text{sen}.2x} = PW$.

Gli angoli XPZ, X'PZ', X''PZ'' &c. sino all' ultimo sono nella serie $4x$, $6x$, $8x$ &c., la quale nel nostro poligono generale ha l'ultimo termine $=\frac{n-5x}{2}$. Levato da questo estremo ang.° quel che vien sotteso da 2 mezzi lati, riman l' ang.° MPR $=\frac{n-7x}{2}$, e aggiunto a questo l' ang.° RPV

cioè un angolo eguale al tolto, si fa $MPV = MP\gamma = \frac{(n-5)x}{2}$ $= WPV$. Onde $P\gamma = \frac{PM \cdot PW \text{ sen.} MPW}{PM \text{ sen.} MP\gamma + PW \text{ sen.} WP\gamma} = \frac{PM \text{ sen.} 2MP\gamma}{2 \text{ sen.} MP\gamma} = \frac{2 \cos. x \text{ sen.} 5x}{(n-5) \text{ sen.} 2x}$.

50 Perchè le funzioni $\frac{ZX'}{ZX}$, $\frac{Z'X''}{Z'X'}$ &c. forman la serie $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ &c., dopo ciò che si è detto nelle precedenti regole, è facile il vedere, che sarà l' ultima funzione $= \frac{n-9}{n-5}$, la penultima $\frac{n-13}{n-9}$ &c. Quindi la serie rovesciata di queste funzioni in prodotto sarà $= \frac{(n-9)}{n-5} \cdot \frac{(n-13)}{n-9} \cdot \frac{(n-17)}{n-13} \ldots\ldots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = p$. Le funzioni del vette d' unione sono, ciascuna $= \frac{1}{2}$. Poi, come nell' altra regola, $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{3}{n}$, $\frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n}$, $\frac{\gamma\delta}{\gamma I} = \frac{2}{n-3}$, $\frac{I\beta}{\gamma I} = \frac{n-5}{n-3}$. Laonde, poichè è la pres. in $X = \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{W\gamma}{MW} \cdot p$, coi simboli analitici risulta Pr. in $X = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-9)}{n-5} \cdot \frac{(n-13)}{n-9} \cdot \frac{(n-17)}{n-13} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. In modo simile a quello che si è praticato nelle precedenti regole, proveremo essere $\frac{(n-9)}{n-5} \cdot \frac{(n-13)}{n-9} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = p = \frac{4}{n-5}$. Dunque Pr. in $X = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n-5} = \frac{2}{r}$. Non manca la proprietà più volte ripetuta della serie p, di poter cioè sostituire a ciascun de' fattori il complemento all' unità, coll' ommissione de' seguenti, senza che si cangi il ri-

sultato $\frac{4}{n-5}$; e da ciò emanano le pressioni in Z, Z′, Z″ &c. eguali ciascuna a $\frac{2}{n}$; finalmente tutto ciò che si è detto sin quì vale egualmente pei punti analoghi del sistema de' vetti sinistro . Sarà dunque completa coll' unione delle nostre 4 regole la dimostrazione, che la grandezza e collocazione de' nostri vetti risultante dalle eseguite costruzioni trasferiscono effettivamente la pressione $\frac{1}{n}$ a ciascun appoggio in tutte le figure ordinate, che abbiano nel centro della figura il peso P .

51 Avendosi generalmente $P\delta = \frac{2 \cos.x \,\text{sen}.3x}{3 \,\text{sen}.2x}$; per il pentagono che dà $\text{sen}.3x = \text{sen}.2x$, abbiam $P\delta = \frac{2 \cos.x}{3} = \frac{2PI}{3}$; e perchè in generale $n-3 : 3 :: P\delta : P\beta$, cioè nel nostro caso $2 : 3 :: P\delta : P\beta :: \frac{2PI}{3} : P\beta$, risulta $P\beta = PI$. Onde (Fig. 17), siccome, per proprietà della figura, δP prodotta deve cadere in I, ivi pur sarà β' ; cosicchè il vette primario $\beta\delta$ combinato coi vetti BC, AQ, EF tramanderà a ciascuno apppoggio la pressione $\frac{1}{5}$. Se nel pentagono si vuol sapere, ove cade γ, la formola generale $P\gamma = \frac{2 \cos.x \,\text{sen}.5x}{(n-5)\,\text{sen}.2x}$ non ci è utile a motivo che essendo per il pentagono $5x = 2R$, $\text{sen}.5x = 0$, come lo è $n-5$, si fa $P\gamma = \frac{0}{0}$. Ma un semplice raziocinio sulla Fig. 16 generale ci farà conoscere questo valore celato sotto l' espressione indeterminata . L' ang.° δPI è eguale a $5x = 2R = PI\beta + P\beta I$. Ma PI cade su $P\beta$ in maniera che l'ang.° $PI\beta$ dee farsi $= 2R$. Dunque nullo l' ang.° $P\beta I$. Ma $P\beta I = P\gamma\beta + \gamma P\beta$; onde, poichè è sempre l' ang.° $\gamma P\beta = 2x$, fa d' uopo che

sia $P\gamma\beta = -2$, cioè nel medesimo senso di $\gamma P\beta$, che in quantità gli è eguale: e quindi γ cade in P, e diventa $P\gamma = 0$.

52 Sino a quest' ora ho messo insieme molti preparativi da viaggio, ma realmente ho fatto poco o niente di strada. Dal sapersi, come si debban tagliare i lati di un poligono regolare, ossia dividere gli angoli centrali, onde poter determinare col mezzo delle altre facili operazioni il vette primario e i due sistemi de' vetti comunicanti, posto il peso nel centro della figura, non risulta, che si sappia eziandio, quale, chiamato centro il punto dov' è il peso, debba essere la divisione, che esige la Natura, de' medesimi angoli, ove il peso sia collocato fuori del centro della figura, o in quelle che sono regolari, o nelle altre che nol sono, onde coll' uso de' vetti situati in modo simile a quello delle 4 regole si abbiano agli angoli le vere e giuste pressioni. Abbiam già veduto, che nel trapezio, cioè nella Fig. più semplice dopo il triangolo pienamente esaurito, colla sola legge de' momenti, o colla equivalente de' vetti comunicanti il problema delle pressioni è di sua natura indeterminato, essendo sempre arbitrario un de' segmenti, come EQ del lato EF (Fig. 4), il quale però se fosse cognito, renderebbe noti tutti gli altri segmenti, ovvero tutte le divisioni, che far si debbono degli angoli centrali. Ciò non ostante, potendoci forse esser utile il conoscere qual forma vestano i valori delle 4 pressioni, se esprimiamo con qualche simbolo l' angolo EPQ, che realmente ci è incognito, intraprendiamone il calcolo, e veggiamo qual siane il risultato.

53 Sia pertanto $AP = a$, $PE = b$, $PF = c$, $PC = d$; sen. APE = sen. i; sen. EPF = sen. l, sen. FPC = sen. g; onde sen. APC = $-$sen. $(i + l + g)$, cos. APC = cos. $(i + l + g)$. In oltre sen. EPQ = sen. y, e quindi sen. QPF = sen. $(l - y)$. Si potrebbe, volendo andar per la lunga, determinare analiticamente il valore del vette primario δC, o $\delta\beta$, perchè, come si è dimostrato nelle figure quadrilatere generalmente, δP prodotta va a C; e poi coll' ajuto degli altri vetti AQ, EF esprimere le 4 pressioni. Ma poichè nello scolio del n. 15 abbiam veduto, che eguali pressioni si ottengono anche pigliando per vette primario QO, combinato poi co-

gli altri vetti AC, EF, riuscendo assai più semplice il calcolo, batteremo questa seconda strada. Ora ci si offre subito il valore di PQ, mediante il nostro lem. 3, perchè

$$PQ = \frac{PE.PF \text{ sen.}EPF}{PE \text{ sen } EPQ + PF \text{ sen.}FPQ} = \frac{bc \text{ sen.}l}{b \text{ sen.}y + c \text{ sen.}(l-y)}.$$

Di più, sen.APQ $=$ sen.$(i+y)$ $=$ sen.APO; cos.APO $= -$ cos.$(i+y)$; finalmente sen.CPO $=$ sen.(CPF + FPQ) $=$ sen.$(g+l-y)$. Ma

$$PO = \frac{AP.PC \text{ sen.}APC}{AP \text{ sen.}APO + CP \text{ sen.}CPO} = -\frac{ad \text{ sen.}(i+l+g)}{a \text{ sen.}(i+y) + d \text{ sen.}(g+l-y)}.$$

Dunque sarà espresso anche il 2.° braccio del vette QO; e però tutto il vette

$$QO = PQ + QO = \frac{bc \text{ sen.}l}{b \text{ sen.}y + c \text{ sen.}(l-y)} - \frac{ad \text{ sen.}(i+l+g)}{a \text{ sen.}(i+y) + d \text{ sen.}(g+l-y)};$$

cioè riducendo, avremo

$$QO = \frac{\left\{\begin{matrix} abc\text{sen.}l\text{sen.}(i+y) + bcd\text{sen.}l\text{sen.}(g+l-y) \\ -abd\text{sen.}y\text{sen.}(i+l+g) - acd\text{ sen.}(l-y)\text{sen.}(i+l+g) \end{matrix}\right.}{[b\text{sen.}y + c\text{sen}(l-y)][a\text{sen.}(i+y) + d\text{sen.}(g+l-y)]}.$$

Calcolando coi medesimi simboli, ne risulterà la funzione

$$\frac{PQ}{QO} = \frac{bc\text{sen.}l(a\text{sen.}(i+y) + d\text{sen.}(g+l-y))}{\left\{\begin{matrix} abc\text{sen.}l\text{sen.}(i+y) - abd\text{sen.}y\text{sen.}(i+l+g) \\ -acd\text{sen.}(l-y)\text{sen.}(i+l+g) + bcd\text{sen.}l\text{sen.}(g+l-y) \end{matrix}\right.}.$$

Chiamo per comodo il divisore di questa funzione $=$ D, onde

$$\frac{PQ}{QO} = \frac{bc\text{sen.}l(a\text{sen.}(i+y) + d\text{sen.}(g+l-y))}{D};$$

da cui nasce

$$\frac{PO}{QO} = -\frac{ad\text{sen.}(i+l+g)(b\text{sen.}y + c\text{sen.}(l-y))}{D}.$$

Rimane ora di esprimere le funzioni de' vetti AC, EF, le quali ci vengono somministrate dal citato lemma, essendo

$$\frac{CO}{AC} = \frac{PO\text{sen.}CPO}{AP\text{sen.}APC} = \frac{d\text{sen.}(g+l-y)}{a\text{sen.}(i+y) + d\text{sen.}(g+l-y)};$$

$\frac{FQ}{EF} = \frac{PQ\text{sen}.FPQ}{PE\text{sen}.EPF} = \frac{c\text{sen}.(l-y)}{b\text{sen}.y + c\text{sen}.(l-y)}$; e quindi poi

$\frac{AO}{AC} = \frac{a\text{sen}.(i+y)}{a\text{sen}.(i+y)+d\text{sen}.(g+l-y)}$; $\frac{EQ}{EF} = \frac{b\text{sen}.y}{b\text{sen}.y+c\text{sen}.(l-y)}$.

Ma Press. in A $= \frac{PQ}{OQ} \cdot \frac{CO}{AC}$; Press. in E $= \frac{PO}{OQ} \cdot \frac{FQ}{EF}$;

Press. in F $= \frac{PO}{OQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$; Pr. in C $= \frac{PQ}{OQ} \cdot \frac{AO}{AC}$. Dunque

Press. in A $= \frac{bcd\text{sen}.l\text{sen}.(g+l-y)}{D}$;

Press. in E $= - \frac{acd\,\text{sen}.(l-y)\text{sen}.(i+l+g)}{D}$;

Press. in F $= - \frac{abd\text{sen}.y\text{sen}.(i+l+g)}{D}$;

Press. in C $= \frac{abc\text{sen}.l\,\text{sen}.(i+y)}{D}$.

54 Non si tralasci di avvertire, che ogni numeratore ne' valori delle suddette pressioni è un de' 4 termini componenti il denominatore, il quale perciò è eguale alla somma di tutti i numeratori: che il numeratore della pres. in A ha per fattore il terno *bcd* formato dal prodotto delle 3 linee centrali EP, PF, PC opposte all' angolo A; il numeratore della pres. in E ha per fattore il terno *acd* delle 3 centrali FP, AP, CP opposte all' angolo E; il che respettivamente si verifica ancora per le altre pressioni in F, e in C: finalmente, che ciò essendo vero, qualunque sia y, debb' esser vero anche quando venga determinato l' angolo y come richiede la Natura.

55 Facciasi ora il confronto tra i certi valori delle pressioni trovate pel triangolo con quelli delle pressioni ai 4 appoggj del trapezio; e vedrem per più d' un verso un' analogia luminosa che passa tra le une e le altre. La pressione in A del triangolo AEC (fig. 2.) si trova $= \frac{bc\text{sen}.l}{ab\text{sen}.i - ac\text{sen}.(i+l) + bc\text{sen}.l}$ (n. 9). Quì non abbiamo di opposto all' angolo A che le due centrali EP $= b$, CP $= c$, colle quali vien formato l' ambo bc, laddove nel

trapezio essendo 3 le centrali opposte ad A, che sono *b*, *c*, *d*, si forma il terno *bcd*: l' ambo *bc* è un fattore del numeratore della pres. in A per il triangolo, siccome nel trapezio del numeratore della simil pressione in A è un fattore il terno *bcd*; e fatto il confronto delle altre pressioni nell' una e nell' altra figura, si vedrà esattamente aver luogo la stessa corrispondenza. In oltre i numeratori delle pressioni nel triangolo sono precisamente un de' tre termini del comune denominatore in quella guisa che è un de' 4 termini del respettivo denominatore ciascun de' numeratori delle pressioni nel trapezio. Da ultimo il divisore comune nelle pressioni del triangolo è composto della somma de' 3. numeratori, come quel delle altre per il trapezio vien formato dalla somma de' 4 numeratori; anzi è evidente che ciò debb' essere per la ragione che le 3 nella prima e le 4 nell' altra prese in somma non possono far altro che 1, essendo 1 il peso totale.

56 Verificati questi capi d' analogía tra il triangolo e il trapezio, giova sperare, che possa essa pure manifestarsi nelle figure di numero di lati maggiore. Noi ne intraprenderemo l' indagine nella figura pentagona irregolare, esprimendo con simboli due porzioni di angoli centrali, e stabilendo il vette primario e gli altri vetti comunicanti colla scorta delle operazioni insinuate dalla 4.ª regola, alla quale va soggetta la figura di 5 lati. Sia dunque AEFCH (Fig. 18.) un pentagono qualunque, il peso P in un punto dentro l' aja, e gli appoggj ai 5. angoli. Prendo due lati contigui AE, EF, e tirate le cinque centrali AP$=a$, PE$=b$, PF$=c$, PC$=d$, PH$=f$, chiamo gli angoli centrali APF$=i$, EPF$=l$, FPC$=g$, CPH$=h$. Oltracciò suppongo, che i cercati segmenti ne' due lati contigui siano AS, EQ, e guidate le rette PS, PQ, faccio l' angolo APS $= x$, l' angolo EPQ $= r$. A tenor della 4.ª regola applicata al pentagono ordinato (n. 51.) e trasferita al nostro, io devo condur le rette FS, AQ, che s' incrociano in qualche punto δ, congiungere la δP, e prolungarla sinchè incontra il lato CH della figura in qualche punto β. Diventa $\beta\delta$ il vette primario, e i vetti comunicanti sono AQ, EF, HC, che uniti al primo ci somministrano le 5 pressioni. Poichè sen.APE$=$sen.i, sen.EPF $=$ sen.l, sen.FPC $=$ sen.g, sen.CPH $=$ sen.h; onde

sen.

sen.APH $= -$ sen.$(i+l+g+h)$, cos.APH $=$ cos.$(i+l+g+h)$: poi sen.APS $=$ sen.x, sen.EPQ $=$ sen.y, e quindi sen.EPS $=$sen.$(i-x)$, sen.FPQ$=$sen.$(l-y)$; sarà, come nel trapezio,

$$PQ = \frac{bc\,\text{sen}.l}{b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)}\,;\quad \frac{EQ}{EF} = \frac{b\,\text{sen}.y}{b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)}\,;$$

$$\frac{FQ}{EF} = \frac{c\,\text{sen}.(l-y)}{b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)}\,;\ \text{e (lem. 3.)}\ PS = \frac{ab\,\text{sen}.i}{a\,\text{sen}.x + b\,\text{sen}.(i-x)}\,;$$

$$\frac{ES}{AE} = \frac{b\,\text{sen}.(i-x)}{a\,\text{sen}.x + b\,\text{sen}.(i-x)}\,;\quad \frac{AS}{AE} = \frac{a\,\text{sen}.x}{a\,\text{sen}.x + b\,\text{sen}.(i-x)}\,.$$

In oltre $\frac{A\delta}{AQ} = \frac{AS.EF}{AS.EF + FQ.ES}$ (lem.2); e perciò in analisi,

$$\frac{A\delta}{AQ} = \frac{a\,\text{sen}.x[b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)]}{ab\,\text{sen}.x\,\text{sen}.y + ac\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(l-y) + bc\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)}\,;$$

da che nasce

$$\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{bc\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)}{ab\,\text{sen}.x\,\text{sen}.y + ac\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(l-y) + bc\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)}\,;$$

Pongo sen.APδ $=$ sen.z. Poichè sen.APQ $=$ sen.$(i+y)$, ne viene sen.QPδ $=$ sen.$(i+y-z)$. Ma abbiamo $\frac{A\delta}{AQ} = \frac{AP\,\text{sen}.AP\delta}{AP\,\text{sen}.AP\delta + PQ\,\text{sen}.QP\delta}$ (lem.3). Dunque coi valori analitici,

$$\frac{A\delta}{AQ} = \frac{a\,\text{sen}.z[b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)]}{ab\,\text{sen}.z\,\text{sen}.y + ac\,\text{sen}.z\,\text{sen}.(l-y) + bc\,\text{sen}.l\,\text{sen}.(i+y-z)}\,.$$

Instituiscasi ora un'equazione tra i 2 valori di $\frac{A\delta}{AQ}$; ed essa ridotta si converte in quest'altra, sen.$l$sen.$x$sen.$(i+y-z)$ $=$ sen.$z$sen.$(i-x)$sen.$(l-y)$; cioè sen.$l$sen.$x$sen.$(i+y)$cos.z $=$ sen.z[sen.$l$sen.$x$cos.$(i+y)$$+$ $r$sen.$(i-x)$sen.$(l-y)$]. Quadrata questa equazione, e posto in vece di $(\text{cos}.z)^2$ il suo valore $r^2-(\text{sen}.z)^2$, si avrà in ultima analisi

$$\text{Sen}.z = \frac{r\,\text{sen}.l\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(i+y)}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\text{sen}.l)^2(\text{sen}.x)^2[\text{sen}.(i+y)]^2 + [\text{sen}.l\,\text{sen}.x \\ \text{cos}.(i+y) + r\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)]^2\end{array}\right.}}\,.$$

Faccio per brevità il radicale $=$ O. Quindi ne risulta

$\text{sen.}z = \frac{r\,\text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(i+y)}{O}$, e in conseguenza $\cos.z = \frac{r[\text{sen.}l\,\text{sen.}x\cos.(i+y)+r\,\text{sen.}(i-x)\text{sen.}(l-y)]}{O}$. I canoni trigonometrici mi danno poi $\text{sen.}(i+y-z) = \text{sen.}QP\delta = [r\,\text{sen.}(i-x)\text{sen.}(i+y)\text{sen.}(l-y)] : O$; ed essendo $P\delta = \frac{AP \,.\, PQ\,\text{sen.}APQ}{AP\,\text{sen.}AP\delta + PQ\,\text{sen.}PQ\delta}$ (lem. 3), verrà espresso il braccio $P\delta$ del vette primario con questa egualità

$$P\delta = \frac{Oabc}{r[ab\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y + ac\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y) + bc\,\text{sen.}(i-x)\text{sen.}(l-y)]}.$$

Ora, perchè l' angolo $HP\delta$ è composto de' due angoli APH, $AP\delta$; i seni de' quali sono $-\text{sen.}(i+l+g+h)$, $\text{sen.}z$, i coseni, $\cos.(i+l+g+h)$, $\cos.z$; coll' uso della trigonometria, e de' valori di $\text{sen.}z$, $\cos.z$, troverem facilmente,

$$\text{sen.}HP\delta = \text{sen.}HP\beta = \frac{r\left\{\begin{array}{l}-\text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen}(l+g+h-y)\,-\\ \text{sen.}(i-x)\text{sen.}(l-y)\text{sen.}(i+l+g+h)\end{array}\right.}{O};$$

$$\cos.HP\beta = \frac{r\left\{\begin{array}{l}-\text{sen.}l\,\text{sen.}x\cos.(l+g+h-y)-\text{sen.}\\ (i-x)\text{sen.}(l-y)\cos.(i+l+g+h)\end{array}\right.}{O}.$$ Ma si ha $\text{sen.}CPH = \text{sen.}h$, $\cos.CPH = \cos.h$. Dunque $\text{sen.}(CPH-HP\beta)$

$$= \text{sen.}CP\beta = \frac{r\left\{\begin{array}{l}\text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l+g-y)\,+\\ \text{sen.}(i-x)\text{sen.}(l-y)\text{sen.}(i+l+g)\end{array}\right.}{O}.$$ Sarà quindi espressa anche la $P\beta = \frac{PH \,.\, CP\,\text{sen.}CPH}{PH\,\text{sen.}HP\beta + CP\,\text{sen.}CP\beta}$ (lem. 3); e coi simboli avremo

$$P\beta = \frac{Odf\,\text{sen.}h}{r\left\{\begin{array}{l}-f\,\text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l+g+h-y)\\ -f\,\text{sen.}(i-x)\text{sen.}(l-y)\text{sen.}(i+l+g+h)\\ +d\,\text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(g+l-y)\\ +d\,\text{sen.}(i-x)\text{sen.}(l-y)\text{sen.}(i+l+g)\end{array}\right.}$$

$$\left\{\begin{matrix} -\text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l+g+h-y) \\ -\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)\,\text{sen.}(i+l+g+h) \end{matrix}\right\} = \text{P};$$

Faccio $$\left\{\begin{matrix} \text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(g+l-y) \\ +\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)\,\text{sen.}(i+l+g) \end{matrix}\right\} = \text{Q};$$

$$\left\{\begin{matrix} ab\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y + ac\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y) \\ +\,bc\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y) \end{matrix}\right\} = \text{R};$$

e più brevemente si ha $\text{P}\beta = \dfrac{\text{O}df\,\text{sen.}h}{r(\text{P}f+\text{Q}d)}$, $\text{P}\delta = \dfrac{\text{O}abc}{r\text{R}}$;
onde $\beta\delta = \dfrac{\text{O}(\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd)}{r\text{R}(\text{P}f+\text{Q}d)}$; e quindi ancora

$$\frac{\text{P}\delta}{\beta\delta} = \frac{abc(\text{P}f+\text{Q}d)}{\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd};\ \frac{\text{P}\beta}{\beta\delta} = \frac{\text{R}df\,\text{sen.}h}{\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{A}\delta}{\text{AQ}} = \frac{a\,\text{sen.}x[b\,\text{sen.}y + c\,\text{sen}(l-y)]}{\text{R}};\ \frac{\text{Q}\delta}{\text{AQ}} = \frac{bc\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)}{\text{R}};$$

$$\frac{\text{H}\beta}{\text{HC}} = \frac{\text{P}\beta\,\text{sen.APβ}}{\text{PC}\,\text{sen.}h}\ (\text{lem. } 3) = \frac{\text{P}f}{\text{P}f+\text{Q}d};\ \frac{\text{C}\beta}{\text{HC}} = \frac{\text{Q}d}{\text{P}f+\text{Q}d};$$

$$\frac{\text{EQ}}{\text{EF}} = \frac{b\,\text{sen.}y}{b\,\text{sen.}y + c\,\text{sen.}(l-y)};\ \frac{\text{FQ}}{\text{EF}} = \frac{c\,\text{sen.}(l-y)}{b\,\text{sen.}y + c\,\text{sen.}(l-y)}.$$

Per tal modo restano espresse tutte le funzioni de' nostri vetti, che entrano in azione. Onde sarà

$$\frac{\text{P}\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{Q}\delta}{\text{AQ}} = \text{Pr. in A} = \frac{bcdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)}{\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{A}\delta}{\text{AQ}}\cdot\frac{\text{FQ}}{\text{EF}} = \text{Pr. in E} = \frac{acdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y)}{\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{A}\delta}{\text{AQ}}\cdot\frac{\text{EQ}}{\text{EF}} = \text{Pr. in F} = \frac{abdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y}{\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\delta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{H}\beta}{\text{CH}} = \text{Pr. in C} = \frac{\text{P}abcf}{\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\delta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{C}\beta}{\text{CH}} = \text{Pr. in H} = \frac{\text{Q}abcd}{\text{R}df\,\text{sen.}h + \text{P}abcf + \text{Q}abcd}.$$

Osserviamo ora, essere $\text{R}df\,\text{sen.}h = abdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y + acdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y) + bcdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)$, cioè eguale alla somma de' numeratori delle 3 prime pressioni in A, E, F, siccome i rimanenti termini del comun divisore sono la somma dei numeratori delle 2 ultime. Di

più rifletteremo, che P, Q sono unicamente funzioni di seni d' angoli, senza che ne' loro valori compariscano le distanze a, b, c, d, f: e che le quaderne di queste distanze sono respettivamente fattori del prodotto costituente la quantità de' numeratori; finalmente che la somma de' numeratori equivale al comune denominatore. Simili affezioni sono state da noi osservate nei valori delle pressioni pel trapezio e pel triangolo; e ragion vuol che si concluda, convenire simili forme di espressione anche in quelli che spettano all' essagono, eptagono &c. coll' introduzione delle cinquine, sestine &c. delle distanze, sempre che si determinino i vetti trasferenti con simil metodo a quello, che si è praticato per gli essagoni, eptagoni &c. regolari.

57 Resta ora da vincersi la maggiore difficoltà, che abbia il nostro problema, la quale consiste nella determinazione delle sezioni degli angoli centrali, cioè degli angoli denominati x, y &c. che abbiamo assunti nel calcolo. Questi angoli son già trovati nel rettangolo, e nel bomisco, qualora il peso sia collocato in un punto della perpendicolare, che divide per metà la figura, e generalmente nel triangolo. Dunque dalla forma dei valori delle pressioni per quest' ultima figura, e dalla combinazione di tutto ciò, che ci ha somministrato l' analogia per le altre superiori, noi dobbiam trarre il filo, che ci guidi per questo intralciato labirinto.

58 Ecco il raziocinio che ho fatto. Nel triang.° AEC (Fig. 2) tre sono le distanze centrali; AP $= a$, PE $= b$, PC $= c$; Gli ambi di queste distanze, ab, ac, bc; ed essendo sen.APE $=$ sen.i, sen.EPC $=$ sen.l, sen.APC $= -$ sen.$(i+l)$, si è trovato (n. 9), che i numeratori delle pressioni in A, E, C sono bcsen.l, $- ac$sen.$(i+l)$, ab sen.i. L' ambo bc nel numeratore di A è il prodotto delle distanze PE, PC, che sono in opposizione ad A; l' altro ac spettante ad E è quello delle distanze AP, PC, che allo stesso punto E si oppongono; così l' ultimo ab, che appartiene a C, è quello delle opposte al punto C, cioè AP, PE. Queste, che abbiam chiamate sin dal principio distanze opposte al luogo della pressione, nel triangolo essendo due non posson comprendere che l' unico ang.° centrale EPC, o APC, o APE; e perciò il solo seno di

quest' angolo dev' essere moltiplicato dall' ambo delle rispettive distanze. Ma nel trapezio (Fig. 4), relativamente alla pressione in A, 3 sono le distanze opposte, $PE = b$, $PF = c$, $PC = d$. Colla scorta dell' analogia veggo bene, che nel numeratore della pressione in A deve aver luogo come fattore il terno bcd. Ma qual sarà il 2.° fattore? Consideriam, per conoscerlo, esser 3 gli angoli che son compresi da queste rette; l' angolo EPF dalle due EP, PF, l' ang.° FPC dalle 2 FP, PC, l' angolo EPC dalle 2 EP, PC; e perchè $APE = i$, $EPF = l$, $FPC = g$, i seni de' suddetti angoli sono $\text{sen.}EPF = \text{sen.}l$, $\text{sen.}FPC = \text{sen.}g$, $\text{sen.}EPC = \text{sen.}(l + g)$. Ora, ho dett' io, l' analogia desunta dal triangolo m' invita a stabilire che l' altro fattore moltiplicato dal terno bcd nel numeratore della pres. in A sia appunto la somma di questi seni, cioè $\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(l + g)$. Reggendo questo discorso poichè alla pres. in E spetta il terno acd, e gli angoli FPC, CPA, FPA, i cui seni sono $\text{sen.}g$, $- \text{sen.}(i + l + g)$, $- \text{sen.}(i + l)$, sarebbe il suo numeratore $acd[\text{sen.}g - \text{sen.}(i + l + g) - \text{sen.}(i + l)]$; e con simil raziocinio il numeratore della pressione in $F = abd[\text{sen.}i - \text{sen.}(i + l + g) - \text{sen.}(l + g)]$, e il numeratore della pres. in $C = abc[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i + l)]$, essendo poi il comune denominatore la somma di questi numeratori. Onde fatta S questa somma, risulterebbero le pressioni come segue

$$\text{Pr. in } A = \frac{bcd[\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(l + g)]}{S}$$

$$\text{Pr. in } E = \frac{acd[\text{sen.}g - \text{sen.}(i + l + g) - \text{sen.}(i + l)]}{S}$$

$$\text{Pr. in } F = \frac{abd[\text{sen.}i - \text{sen.}(i + l + g) - \text{sen.}(l + g)]}{S}$$

$$\text{Pr. in } C = \frac{abc[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i + l)]}{S}.$$

59 La forma di queste pressioni è sino ad ora puramente congetturale; ma il bomisco, il rettangolo, il quadrato, quando il peso è posto nella perpendicolare, che divide la figura in 2 parti eguali, e il triangolo in generale (avendosi in tutte queste figure pressioni certe e dimostra-

te) devon essere la pietra del paragone della giustezza delle nostre formole. Comincio dal bomisco (Fig. 1), ove abbiamo AP = PC, PE = PF, APE = FPC, ossia $d = a$, $c = b$, $\text{sen.}g = \text{sen.}i$. Con tali modificazioni nelle formole generali del trapezio risulta il comun denominatore $S = 2ab\big(b[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)] + a\,[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)]\big)$. Onde, introdotte le convenienti modificazioni anche nei numeratori, e ridotto tutto ai minimi termini, nasce pel bomisco

$$\text{Pr. in A} = \frac{b[\text{sen.}l + \text{sen.}i + \text{sen.}(i+l)]}{2\begin{cases} l[(\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)] + \\ a[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)]\end{cases}}$$
$= \text{Pr. in C}$;

$$\text{Pr. in E} = \frac{a[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)]}{2\begin{cases} b[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)] + \\ a[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)]\end{cases}}$$
$= \text{Pr. in F}$; ed ecco a buon conto salvata dalle nostre formole l' eguaglianza delle pressioni in A, e in C, e delle altre in E e in F, la quale deducevasi al n. 6 dal principio metafisico della ragion sufficiente al bomisco applicato. Per provar poi l' identità delle 2 pressioni in A e in E con quelle del citato numero, farem uso de' 4 teoremi trigonometrici già noti, che son compresi nelle 4 seguenti equazioni; 1.° $r[\text{sen.}i + \text{sen.}(i+l)] = 2\cos.\frac{l}{2}\,\text{sen.}\,(i+\frac{l}{2})$; 2.° $r[\text{sen.}i - \text{sen.}(i+l)] = -2\text{sen.}\,\frac{l}{2}\cos.(i+\frac{l}{2})$; 3.° $r\,\text{sen.}l = 2\,\text{sen.}\frac{l}{2}\cos.\frac{l}{2}$; 4.° $r\text{sen.}\,(2i+l) = 2\text{sen.}(i+\frac{l}{2})\cos.(i+\frac{l}{2})$. Messi questi valori nel comun Divisore, esso diventa $\frac{4}{r}[\text{sen.}\frac{l}{2} + \text{sen.}(i+\frac{l}{2})][-a\cos.(i+\frac{l}{2}) + b\cos.\frac{l}{2}]$. Quindi fatte anche le sostituzioni ne' numeratori, troveremo il Numeratore della press. in $A = \frac{2b}{r}[\text{sen.}\frac{l}{2}\cos.\frac{l}{2} +$

$\cos.\frac{l}{2}\ \mathrm{sen}.(i+\frac{l}{2})\,] = \frac{2b}{r}\cos.\frac{l}{2}\,[\mathrm{sen}.\frac{l}{2}+\mathrm{sen}.(i+\frac{l}{2})\,]$; Numeratore pres. in E $= \frac{2a}{r}\,[-\mathrm{sen}.\frac{l}{2}\cos.(i+\frac{l}{2})-\mathrm{sen}.(i+\frac{l}{2})$ $\cos.(i+\frac{l}{2})] = -\frac{2a}{r}\cos.(i+\frac{l}{2})\,[\mathrm{sen}.\frac{l}{2}+\mathrm{sen}.(i+\frac{l}{2})]$. E riducendo, Pr. in A $= \dfrac{b\cos.\frac{l}{2}}{2[-a\cos.(i+\frac{l}{2})+b\cos.\frac{l}{2}]}$ = Pr. in C;

Pr. in E $= -\dfrac{a\cos.(i+\frac{l}{2})}{2[-a\cos.(i+\frac{l}{2})+b\cos.\frac{l}{2}]}$ = Pr. in F.

Ora le pressioni calcolate al Num. *6*, che hanno le denominazioni delle distanze a, b come le presenti, sono Pres. in A $= \dfrac{b\cos.h}{2(b\cos.h+a\cos.k)}$; Pr. in E $= \dfrac{a\cos.k}{2(b\cos.h+a\cos.k)}$; ed ivi erasi chiamato h la metà dell' ang.° EPF $= \frac{l}{2}$; k la metà dell' ang. APC, cioè APO. Ma sen.APO = sen.(APE + EPQ) = sen.k; cos.APO = − cos.(APE+EPQ) = − $\cos.(i+\frac{l}{2}) = \cos.k$. Dunque resta dimostrata l' identità delle nostre formole con quelle, e giusto per conseguenza il raziocinio dedotto dall' analogia, che ha guidato il nostro calcolo e le nostre operazioni.

60 La divisione dell' ang.° centrale EPF nel bomisco, che dì col mezzo dei vetti trasferenti le vere pressioni, era la division per metà fatta dalla QO normale ai 2 lati opposti. Dunque EPQ $= y = \frac{l}{2}$. Sostituiscasi questo valore nella pression generale in A del trapezio modificata all' ipotesi di $d = a$, $c = b$, sen.g = sen.i; e risulta Pr. in A =

$$\frac{ab^2 \text{ sen.} l \text{ sen.}(i + \frac{l}{2})}{\left\{ \begin{array}{l} ab^2 \text{ sen.} l \text{ sen}(i + \frac{l}{2}) - a^2 b \text{sen.} \frac{l}{2} \text{sen.}(2i + l) - a^2 b \text{ sen.} \frac{l}{2} \\ \text{sen.}(2i + l) + ab^2 \text{sen.} l \text{sen.}(i + \frac{l}{2}) \end{array} \right.}$$

$$= \frac{b \text{ sen.} l \text{ sen.}(i + \frac{l}{2})}{2 [b \text{ sen.} l \text{ sen.}(i + \frac{l}{2}) - a \text{ sen.} \frac{l}{2} \text{ sen.}(2i + l)]}$$. Ma sen.l

$= \frac{2 \text{ sen.} \frac{l}{2} \cos. \frac{l}{2}}{r}$; sen.$(2i + l)$ = sen.$2 (i + \frac{l}{2})$ =

$\frac{2 \text{ sen.}(i + \frac{l}{2}) \cos.(i + \frac{l}{2})}{r}$. Dunque sostituendo e riducendo

al retto ; Pr. in A $= \frac{b \cos. \frac{l}{2}}{2 [b \cos. \frac{l}{2} - a \cos.(i + \frac{l}{2})]}$, come al n. 59 ; il che convalida sempre più il metodo da noi praticato .

61 Se nel trapezio (Fig. 4) gli angoli in A , E , F diventan retti , esso si converte in un rettangolo ; e ciò induce tre modificazioni nelle specie a, b, c, d, sen.i, sen.l, sen.g, di maniera che 3 di esse son date per le altre 4 . Il calcolo , ritenendo i suddetti simboli , riesce lungo e penoso : Ma noi l' accorcieremo alquanto sostituendone de' nuovi . Mi presento il rettangolo AEFC (Fig. 19) col peso dentro l' aja in P . Condotte le 4 distanze AP, PE, PF, PC, faccio passar per P le due rette QO , ST , che vanno a incontrare due lati opposti , e ad essi respettivamente sono perpendicolari . Chiamo PQ $= m$, PO $= n$, SP $= p$, PT $= q$, onde risulta AP $= \sqrt{(n^2 + p^2)} = a$, PE $= \sqrt{(m^2 + p^2)} = b$, PF $= \sqrt{(m^2 + q^2)} = c$, PC $= \sqrt{(n^2 + q^2)} = d$. In oltre

tre abbiamo sen.APS $= \frac{nr}{a}$, cos.APS $= \frac{pr}{a}$, sen.SPE $= \frac{mr}{b}$, cos.SPE $= \frac{pr}{b}$, senAPE = sen.$i = \frac{r(mp + np)}{ab}$, cos.APE $=$ cos.$i = \frac{r(p^2 - mn)}{ab}$, sen.EPQ $= \frac{pr}{b}$, cos.EPQ $= \frac{mr}{b}$, sen.QPF $= \frac{qr}{c}$, cos.QPF $= \frac{mr}{c}$; sen.EPF = sen.$l = \frac{r(mp + mq)}{bc}$, cos.EPF = cos.$l = r\frac{(m^2 - pq)}{bc}$, sen.FPT $= \frac{mr}{c}$, cos.FPT $= \frac{pr}{c}$, sen.CPT $= \frac{nr}{d}$, cos.CPT $= \frac{qr}{d}$, sen.FPC = sen.g $= \frac{r(mq + nq)}{cd}$, cos.FPC $= \frac{r(q^2 - mn)}{cd}$, sen.CPO $= \frac{qr}{d}$, cos.CPO $= \frac{nr}{d}$, sen.APO $= \frac{pr}{a}$, cos.APO $= \frac{nr}{a}$, sen.APC $= -$ sen.$(i + l + g) = \frac{r(nq + np)}{ad}$, cos.APC = cos.$(i + l + g)$ $= r\frac{(n^2 - pq)}{ad}$. Da tutte queste determinazioni emanano pure queste altre: sen.(EPF + FPC) = sen.$(l + g) = \frac{r(mq - np)}{bd}$, cos.(EPF + FPC) = cos.$(l + g) = \frac{r(-mn - pq)}{bd}$, sen.(FPC + APC) $= -$ sen.$(i + l) = \frac{r(nq - mp)}{ac}$, sen.(APE + APC) $= -$ sen.$(l + g) = \frac{r(np - mq)}{bd}$, sen.(APE + EPF = sen.$(i + l)$ $= \frac{r(mp - nq)}{ac}$. Facciam uso della nostra regola, e sarà il Numeratore della Pres. in A = EP.PF.PC [en.EPF + sen.FPC + sen.(EPF + FPC)]; ossia Numeratore pres. in A $= bcdr\left(\frac{mp + mq}{bc} + \frac{mq + nq}{cd} + \frac{mq - np}{bd}\right) = r[d(mp + mq)$ $+ b(mq + nq) + c(mq - np)]$. Andando avanti; Num.^{e} pres.

in E = AP . PC . PF[sen.FPC + sen.APC + sen.(FPC + APC)]; cioè Num.^e pres. in E $= acdr\left(\frac{mq+nq}{cd} + \frac{nq+np}{ad} + \frac{nq-mp}{ac}\right) = r[a(mq+nq) + c(nq+np) + d(nq-mp)]$. Così Num.^e pres. in F = EP . AP . CP [sen.APE + sen.APC + sen.(APE + APC)]; vale a dire Numeratore pres. in F $= abdr\left(\frac{mp+np}{ab} + \frac{nq+np}{ad} + \frac{np-mq}{bd}\right) = r[d(mp+np) + b(nq+np) + a(np-mq)]$. Finalmente Numer. pres. in C = AP . PE . PF[sen.APE + sen.EPF + sen.(APE + EPF)], cioè Numer. pres. in C $= abcr\left(\frac{mp+np}{ab} + \frac{mp+mq}{bc} + \frac{mp-nq}{ac}\right) = r[c(mp+np) + a(mp+mq) + b(mp-nq)]$. Trovati i numeratori di queste pressioni; poichè il denominator comune D dev' essere eguale alla somma di tutti i numeratori, ponendo in ordine i termini, sarà

$$D = \begin{cases} dr(mp + mq + nq - mp + mp + np) \\ + br(mq + nq + nq + np + mp - nq) \\ + cr(mq - np + nq + np + mp + np) \\ + ar(mq + nq + np - mq + mp + mq); \end{cases}$$

ossia $D = r(a+b+c+d)(m+n)(p+q)$. Sicchè risulta

$$\text{Pr. in A} = \frac{d(mp+mq) + b(mq+nq) + c(mq-np)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)};$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{a(mq+nq) + c(nq+np) + d(nq-mp)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)};$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{d(mp+np) + b(nq+np) + a(np-mq)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)};$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{c(mp+np) + a(mp+mq) + b(mp-nq)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)}.$$

S' intenda ora trasferito il peso P nel centro della figura rettangolare, e diventa $n = m$, $q = p$, e le distanze a, b, c, d sono tra loro eguali. La sostituzione poi nelle formole di questi valori dà ciascuna pressione $= \frac{4amp}{16amp} = \frac{1}{4}$: il che corrisponde al vero.

62 Determinate le pressioni ai 4 appoggj del rettango-

lo, abbiam già ottenuto il nostro intento, nè altro ci resta da fare. Pur se piacesse di conoscere eziandio come debbasi per esempio dividere l'angolo centrale EPF, per aver la serie de' vetti comunicanti, che colle loro funzioni ci somministrano le medesime pressioni, ecco una maniera assai semplice per eseguire tal divisione, la quale ci fa schivare de' calcoli assai prolissi, qualora si scelga qualch'altra via. Prendo le 2 generali pressioni in E e in F (n. 53) appartenenti al trapezio, che sono, Pr. in E $= - \frac{acd \text{ sen.}(l-y) \text{ sen.}(i+l+g)}{D}$, Pr. in F $= - \frac{abd \text{ sen.}y \text{ sen.}(i+l+g)}{D}$; e veggo, che sta Pr. in F : Pres. in E : : b sen.y : c sen.$(l-y)$. Alle suddette pressioni devon esser eguali le pres. in F e in E determinate nel num.° antecedente, da cui si rileva essere Pr. in F : Pr. in E : : $d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)$: $a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)$. Dunque b sen.y : c sen.$(l-y)$: : $d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)$: $a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)$; e dividendo gli antecedenti per b, e i conseguenti per c, sen.y : sen.$(l-y)$: : $\frac{d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)}{b}$: $\frac{a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)}{c}$. Le distanze a, b, c, d son già date per m, n, p, q, e conseguentemente è data la 2.ª ragione. Sia essa $h:k$. Sulla EP prodotta prendo PM $=k$, e sulla PF la PN $=h$, e congiungo MN, cui conduco parallela la PR, che va al lato EF. Poichè, per il lem. 4 n. 17, sta sen.EPR : sen.RPF : : PN : PM, e sen.EPR $=$ sen.y, sen.RPF $=$ sen.$(l-y)$, sarà sen.y : sen.$(l-y)$: : $h:k$, cioè nella ragion data. Trovato il segmento ER nel trapezio, si fan noti col metodo del n. 15 gli altri 3 che ci somministrano il vette primario, e gli altri conduttori delle pressioni agli angoli della figura. Se il peso è nel centro del rettangolo, si fa $h=k$, e sen.$y=$ sen.$(l-y)$; il che fa vedere, che in questo caso basta dividere per metà l'ang.° EPF.

63 Semplicissima è la forma de' valori delle pressioni nel parallelogrammo, situando il peso nel centro della fi-

gura (Fig. 20). In tale ipotesi si fa $PE = PC$, $PF = PA$, cioè $d = b$, $c = a$; e di più sen.g = sen.i, sen.$(i + l + g)$ = sen.l = sen.i, perchè l' ang.° l è il complemento a 2 retti dell' ang.° i, onde sen.$(i + l) = 0$: Si osservino i Numeratori delle pressioni generali pel trapezio notati al n. 58, e si adattino al caso nostro. Troverem subito Num.^{e} pres. in $A = ab^2[\text{sen.}l + \text{sen.}i + \text{sen.}(i + l)] = 2ab^2\text{sen.}i$; Num.^{e} pres. in $E = a^2 b\,[\text{sen.}i + \text{sen.}l - \text{sen.}(i + l)\,] = 2a^2 b\,\text{sen.}i$; Num.^{e} pres. in $F = ab^2[\text{sen.}i + \text{sen.}l - \text{sen.}(i + l)] = 2ab^2\,\text{sen.}i$; Num.^{e} pres. in $C = a^2b[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i + l)] = 2a^2 b\,\text{sen.}i$: Onde il denominatore comune risulta $= 4ab\,\text{sen.}i\,(a + b)$; e quindi Pres. in $A = \frac{b}{2(a + b)}$ = Pr. in F; Pr. in $E = \frac{a}{2(a + b)}$ = Pr. in C.

64 Ritorniamo al quadrilatero generale (Fig. 4), e consideriamo qual cangiamento subiscano le pressioni nel caso che diventi eguale a 2 retti l' ang.° AEF, e il punto E cada sul diametro AF. Quest' è il caso di un triangolo, il quale oltre i 3 appoggj agli angoli A, F, C ne abbia un altro nel lato AF, onde tre di essi vengano collocati in una retta. Essendo generalmente $\text{sen.AEP} = \frac{a\,\text{sen.}i}{AE}$, $\text{cos.AEP} = \frac{br - a\cos.i}{AE}$, $\text{sen.PEF} = \frac{c\,\text{sen.}l}{EF}$, $\text{cos.PEF} = \frac{br - c\cos.l}{EF}$, risulta $\text{sen.AEF} = \frac{ab\,\text{sen.}i + bc\,\text{sen.}l - ac\,\text{sen.}(i + l)}{AE\,.\,EF}$. Dunque, per la nostra ipotesi, $\frac{ab\,\text{sen.}i + bc\,\text{sen.}l - ac\,\text{sen.}(i + l)}{AE\,.\,EF} = \text{sen.}2R = 0$, onde $b = \frac{ac\,\text{sen.}(i + l)}{a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l}$. Si sostituisca questo valore nelle formole generali delle pressioni pel trapezio (n. 58); e cominciando dai numeratori, avremo Num.^{e} pres. in $A = \frac{ac^2d\,\text{sen.}(i + l)\,[\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(l + g)]}{a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l}$; Num.^{e}pres. in $E = acd[\text{sen.}g - \text{sen.}(i + l + g) - \text{sen.}(i + l)]$ Num.^{e} pres. in $F = \frac{a^2cd\,\text{sen.}(i + l)\,[\text{sen.}i - \text{sen.}(i + l + g) - \text{sen.}(l + g)]}{a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l}$;

Num.^{e} pres. in C $= \dfrac{a^2c^2 \text{ sen.}(i+l)\,[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)]}{a \text{ sen.}i + c \text{ sen.}l}$.

Si riduca il 2.° Num.^{e} al comun denominatore degli altri, e si faccia la somma di tutti i Numeratori, ordinandone i termini. Il risultato, che equivale al divisore S del n. 58, verrà così espresso,

$$S = \frac{\left\{\begin{array}{l} ac^2d[\text{sen.}l\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}g\text{sen}(i+l) + \text{sen.}(i+l)\text{sen.}(l+g) \\ \quad + \text{sen.}g\text{sen.}l - \text{sen.}l\text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(i+l)\text{sen.}l] + \\ a^2cd[\text{sen.}g\text{sen.}i - \text{sen.}i\text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}i\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}i\text{sen.} \\ \quad (i+l) - \text{sen.}(i+l)\text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(i+l)\text{sen.}(l+g)] \\ + a^2c^2[\text{sen.}i\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}l\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}(i+l)^2]. \end{array}\right.}{a\text{sen.}i + c\text{sen.}l}$$

Ora avendosi pei canoni trigonometrici, $\text{sen.}(i+l)\text{sen}(l+g) - \text{sen.}l\text{sen.}(i+l+g) = \text{sen.}g\text{sen.}i$, surrogando questo valore, nasce, fatte le riduzioni,

$$S = \frac{ac\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\text{sen.}g \\ - ad\text{sen.}(i+l+g) + ac\text{sen}\,(i+l)\,]\end{array}\right.}{a\text{sen.}i + c\text{sen.}l};$$

e quindi $\text{Pr. in A} = \dfrac{cd\text{sen.}(i+l)[\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(l+g)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\text{sen.}g \\ - ad\text{sen.}[\,(i+l+g) + ac\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.}$;

$$\text{Pr. in E} = \frac{d(a\text{sen.}i + c\text{sen.}l)[\text{sen.}g - \text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(i+l)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l\,][cd\text{sen.}g \\ - ad\text{sen.}(i+l+g) + ac\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.};$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{ad\text{sen.}(i+l)[\text{sen.}i - \text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(l+g)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\text{sen.}g \\ - ad\text{sen}(i+l+g) + ac\text{sen.}(i+l)\,]\end{array}\right.};$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{ac\text{sen.}(i+l)[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\text{sen.}g \\ - ad\text{sen.}(i+l+g) + ac\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.}.$$

65 Se supponiamo, che PE già divenuta PZ cada sulla PF, e coincidano i punti Z, F, si fa $l = 0$, $\text{sen.}l = 0$, $\text{sen.}(i+l) = \text{sen.}i$, $\text{sen.}(l+g) = \text{sen.}g$, $-\text{sen.}(i+l+g) = -\text{sen.}(i+g)$; le due pressioni in F e in Z diventano una sola pressione sull' appoggio F, e siamo al caso delle 3 pressioni nel triangolo AFC. Colle accennate modificazioni pertanto

avremo Pres. in A $= \frac{2cd\,\text{sen.}g\,\text{sen.}i}{2\,\text{sen.}i[cd\,\text{sen.}g - ad\,\text{sen.}(i+g) + ac\,\text{sen.}i]}$
$= \frac{cd\,\text{sen.}g}{cd\,\text{sen.}g - ad\,\text{sen.}(i+g) + ac\,\text{sen.}i}$;

Pr. in (E+F) $= - \frac{ad\,\text{sen.}(i+g)}{cd\,\text{sen.}g - ad\,\text{sen.}(i+g) + ac\,\text{sen.}i}$;

Pr. in C $= \frac{ac\,\text{sen.}i}{cd\,\text{sen.}g - ad\,\text{sen.}(i+g) + ac\,\text{sen.}i}$.

Ora queste sono le pressioni, che soffrono per consenso di tutti i Geometri i tre appoggj agli angoli d' un triangolo. Dunque avendole noi pur derivate dai nostri generali teoremi, servon esse di nuovo argomento per convalidarne la verità e la certezza.

66 Ma se anche P cade sul diametro AF, qual forma assumeranno i valori delle pressioni notati al n. 64? In tal caso segando la PE il diametro in Z, la PZ, in cui s' è cangiata la PE, deve stendersi tutta sulla stessa AF, e farsi eguale a 2 retti l' angolo APZ, e però nullo l'angolo FPZ, ovvero eguale a 2 retti l'angolo FPZ, e quindi nullo l'angolo APZ. Supponiamo APZ $= 2R$, FPZ $= 0$. Ciò fa che P dee cadere tra i punti A, Z, e che dev' essere $\text{sen.}i = 0$, $\cos.i = -r$, $\text{sen.}l = 0$, $\cos.l = r$, $\text{sen.}(i+l) = 0$, $\cos.(i+l) = -r$, $\text{sen.}(l+g) = \text{sen.}g$, $\text{sen.}(i+l+g) = -\text{sen.}g$. Posti questi valori nelle formole del citato numero, ciascuna d' esse diventa $= \frac{0}{0}$ e ci lasciano ne l' oscurità sul vero valore delle pressioni.

67 Per emergere da queste tenebre, ritorniamo all' equazione $ab\,\text{sen.}i + bc\,\text{sen.}l - ac\,\text{sen.}(i+l) = 0$ (n. 64) originata dalla ipotesi dello schiacciamento dell' angolo AEF. Poichè $r\,\text{sen.}(i+l) = \text{sen.}i\cos.l + \cos.i\,\text{sen.}l$, colla sostituzione de' valori di $\cos.l$, e di $\cos.i$ del n.° precedente, si ha $r\,\text{sen.}(i+l) = r\,\text{sen.}i - r\,\text{sen.}l$. Laonde l' equazione superiore si cangia in quest' altra; $ab\,\text{sen.}i + bc\,\text{sen.}l - ac\,\text{sen.}i + ac\,\text{sen.}l = 0$, e perciò $\text{sen.}l = \frac{a\,\text{sen.}i(c-b)}{c(a+b)}$. Da questa emanano tutte le seguenti egualità; $\text{sen.}(i+l) = \frac{b\,\text{sen.}i(a+c)}{c(a+b)}$, $\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l = 2\,\text{sen.}i$; $ac\,\text{sen.}(i+l) + cd\,\text{sen.}g -$

$ad\,\text{sen.}(i+l+g) = d\,\text{sen.}g(a+c)$; perchè, essendo sen.$g$ quantità finita, il 1.° termine $ac\,\text{sen.}(i+l)$ rispetto ai seguenti è nullo, e $-\text{sen.}(i+l+g) = \text{sen.}g$. Di più $\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(g+l) = 2\text{sen.}g$; $-\text{sen.}(i+l+g) + \text{sen.}g - \text{sen.}(i+l) = 2\text{sen.}g$; $\text{sen.}i - \text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(g+l) = \text{sen.}i$; $a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l = \frac{a\,\text{sen.}i(a+c)}{a+b}$. Facciasi ora uso di questi valori in quelli delle pressioni; e nasce $\text{Pr. in A} = \frac{2bcd\,\text{sen.}g\,\text{sen.}i(a+c)}{2cd\,\text{sen.}g\,\text{sen.}i(a+c)(a+b)} = \frac{b}{a+b}$. Così, colle sostituzioni e colle debite riduzioni, ritroveremo $\text{Pr. in Z} = \frac{a}{a+b}$; $\text{Pr. in F} = \frac{ab\,\text{sen.}i}{2c\,\text{sen.}g(a+b)} = 0$; $\text{Pr. in C} = \frac{ab\,\text{sen.}i}{d\,\text{sen.}g(a+b)} = 0$.

68 Poichè il peso P, quando è sul lato AF del triangolo AFC, non fa sentire alcuna pressione all' appoggio nell' ang.° opposto C, si può prescindere dalla figura triangolare, e considerare il peso posto sopra una linea retta, ove sono 3 appoggj A, E, F. Noi abbiam fatto l' appianamento dell' ang.° APF, cosicchè cada P tra i punti A, e Z. Ma gli appoggj A, Z sostentano tutto il peso del corpo, non provando alcuna pressione l' appoggio più rimoto in F. Dunque questo caso da noi considerato ci fa conoscere la importante verità, sulla quale divisi erano i sentimenti de' Geometri, cioè: che dato un vette situato orizzontalmente su più di due appoggj, e un peso tra due di essi qualunque, i due soli appoggj, tra i quali sta il peso, se ne dividono tutto il carico, e non soffrono pressione alcuna quelli che altrove son collocati. Non mi fermo sull' altro caso di appianamento dell' ang.° APF per modo che P resti tra Z e F, mentre è chiaro, come si vedrà volendo intraprenderne il calcolo, che allora A non prova alcuna pressione, venendo tutto il peso distribuito sugli appoggj F, Z.

69 Inerendo ai nostri principj, non sarà ora difficile il presentar le pressioni, che soffrono gli appoggj agli angoli, qualunque sia la figura. Per esempio nel pentagono ir-

regolare della Fig. 18 devon' essere note le cinque distanze AP, PE, PF, PC, PH, e i 5 angoli centrali APE, EPF, FPC, CPH, APH. Chiamate queste quantità coi medesimi simboli del n. 56; a, b, c, d, f le distanze; sen.i, sen.l, sen.g, sen.h, — sen.$(i+l+g+h)$ i seni de' suddetti angoli, formiamo prima le 5 quaderne, che nascono dalle 5 distanze, e sono; $abcd$, $abcf$, $abdf$, $acdf$, $bcdf$. Per esprimere poi il Num.^{e} della pres. in A, si osservi, 4 essere le distanze opposte, PE, PF, PC, PH, cioè b, c, d, f, e in conseguenza la quaderna $bcdf$ un fattore di questo Numeratore. L'altro fattore essendo, secondo la nostra regola, la somma de' seni degli angoli, che nascono da tutte le combinazioni de' tre opposti EPF, FPC, CPH, ovvero l, g, h, e presi semplicemente e presi in composizione, sarà questa somma la seguente, sen.l + sen.g + sen.h + sen.$(g+l)$ + sen.$(g+h)$ + sen.$(l+h)$ + sen.$(g+l+h)$. Onde risulta Num.^{e} Pr. in A = $bcdf$[sen.l + sen.g + sen.h + sen.$(g+l)$ + sen.$(g+h)$ + sen.$(l+h)$ + sen.$(g+l+h)$]. Passiamo alla pres. in. E, che ha opposte le 4 distanze AP, PF, PC, PH, ossia a, c, d, f, colle quali si forma la quaderna $acdf$, e notiamo le 7 combinazioni de' 3 angoli opposti FPC, CPH, APH. Perchè FPC = g, CPH = h, APH = 4R — $(i+l+g+h)$; esse riescono, g, h, 4R — $(i+l+g+h)$, $g+h$, 4R — $(i+l+h)$, 4R — $(i+l+g)$, 4R — $(i+l)$; onde la somma de' seni = sen.g + sen.h + sen.$(g+h)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(i+l+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$. Quindi Num.^{e} Pr. in E = $acdf$[sen.g + sen.h + sen.$(g+h)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(i+l+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$]. La quaderna, che corrisponde al punto F, è fatta dalle 4 distanze EP. AP. PH. PC, cioè $abdf$; gli angoli opposti sono APF, APH, CPH, ovvero i, 4R — $(i+l+g+h)$, h; le 7 combinazioni, i, h, $h+i$, 4R — $(l+g+h)$, 4R — $(i+l+g)$, 4R — $(i+l+g+h)$, 4R — $(l+g)$; e la somma de' loro seni sen.i + sen.h + sen.$(h+i)$ — sen.$(l+g+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(l+g)$. Dunque Num.^{e} Pr. in F = $abdf$[sen.i + sen.h + sen.$(h+i)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(l+g+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(l+g)$]. Al punto C spetta la quaderna delle 4 distanze PF, PE, AP, PH, cioè $abcf$; e bisogna far le 7 combi-

binazioni, degli angoli FPE, EPA, APH, in analisi l, i, $4R - (i + l + g + h)$; che sono, l, i, $4R - (i + l + g + h)$, $i + l$, $4R - (i + g + h)$, $4R - (l + g + h)$, $4R - (g + h)$; e danno la somma de' seni $=$ sen.i + sen.l + sen.$(i + l)$ — sen.$(i + l + g + h)$ — sen.$(i + g + h)$ — sen.$(l + g + h)$ — sen.$(g + h)$. Laonde Num.^{e} Pr. in C $= abcf$[sen.i + sen.l + sen.$(i + l)$ — sen.$(i + l + g + h)$ — sen.$(i + g + h)$ — sen.$(l + g + h)$ — sen.$(g + h)$]. Finalmente H ha in opposizione le 4 rette AP, PE, PF, PC, e gli compete la quaderna $abcd$. Coi 3 angoli, APE, EPF, FPC, ossia i, l, g formo le 7 combinazioni de' loro seni, ed ho Num.^{e} Pr. in H $= abcd$[sen.i + sen.l + sen.g + sen$(i + l)$ + sen.$(i + g)$ + sen.$(l + g)$ + sen.$(i + l + g)$]. Ma la somma di tutti questi numeratori costituisce il comun denominatore delle 5 pressioni, che chiamo S. Dunque saran cogniti i valori delle medesime per il pentagono, alle quali ci ha guidato l' analogia desunta dalle figure inferiori.

70 Se uno di questi angoli centrali, per esempio l'angolo CPH $= h$, si fa nullo, coincidendo PH sulla PC, il pentagono si converte in un trapezio; e in tale supposizione, quando delle 2 pressioni in H e in C ne facciamo una sola, le cinque pressioni del pentagono, per la coalizione delle due ridotte a quattro, devon riuscire identiche con quelle dell' altra figura. Veggiamolo. La nostra ipotesi esige, che sia $f = d$, sen.$h = 0$. Si surroghino questi valori in quelli de' numeratori pentagonici, e risulta Num.^{e} Pr. in A $= 2bcd^2$ [sen.l + sen.g + sen.$(g + l)$]; Num.^{e} Pr. in E $= 2acd^2$ [sen.g — sen$(i + l + g)$ — sen.$(i + l)$]; Num.^{e} Pr. in F $= 2abd^2$[sen.i — sen.$(i + l + g)$ — sen.$(l + g)$]; Num.^{e} Pr. in C $= abcd$[sen.i + sen.l + sen.$(i + l)$ — sen.$(i + l + g)$ — sen.$(i + g)$ — sen.$(l + g)$ — sen.g]; Num.^{e} Pr. in H $= abcd$[sen.i + sen.l + sen.g + sen.$(i + l)$ + sen.$(i + g)$ + sen.$(l + g)$ + sen.$(i + l + g)$]. I due ultimi Numeratori si uniscano in somma, perchè H cade in C, e sarà Pr. totale in C $= 2abcd$[sen.i + sen.l + sen.$(i + l)$]. Ciascuno di questi Numeratori è moltiplicato per $2d$, e quindi avrà pure il fattore $2d$ il comun divisore delle pressioni, perchè di quelli è la somma. Levato pertanto questo comun fattore, se si confrontano queste pressioni pel trapezio derivate da quelle del pentagono colle trovate al n. 58 per il quadrila-

tero direttamente, si veggono esse perfettamente identiche. E quindi è chiaro, che non venendo meno il nostro metodo in una figura superiore al trapezio, possiam benissimo estenderlo a qualunque altra figura.

71 Conosciute queste pressioni, si vuol egli di più situare nel pentagono il vette primario, e gli altri vetti comunicanti, che ne sono come i conduttori? E' necessario a questo fine sapere, in qual modo s' abbiano a dividere gli angoli centrali APE, EPF colle rette PS, PQ. Ora, poichè sen.APS = sen.x, sen.EPS = sen.$(i-x)$, sen.EPQ = sen.y, sen.QPF = sen.$(l-y)$, si scelgano dei 5 valori delle pressioni pel pentagono (n. 56) i 3 primi appartenenti a quelle degli appoggj A, E, F, che hanno per fattori ne' loro Numeratori i detti seni; e chiamato D il lor comune denominatore, verranno così espresse: Pres. in A = $\frac{bcdf \text{sen.}h \text{ sen.}(i-x) \text{ sen.}(l-y)}{D}$; Pr. in E = $\frac{acdf \text{sen.}h \text{ sen.}x \text{ sen.}(l-y)}{D}$;

Pr. in F = $\frac{abdf \text{ sen.}h \text{ sen.}x \text{ sen.}y}{D}$. Dunque Pr. in A : Pr. in E : : b sen. $(i-x)$: a sen.x; Pr. in E : Pr. in F : : c sen.$(l-y)$: b sen.y. Rivolgiamci ora alle pressioni stesse in A, E, F con nite del numero 69; le quali [fatto per brevità, sen.l + sen.g + sen.h + sen.$(g+l)$ + sen.$(g+h)$ + sen.$(l+h)$ + sen.$(g+l+h)$ = M; sen.g + sen.h + sen.$(g+h)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(i+l+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$ = N; sen.i + sen.h + sen.$(h+i)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(l+g+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(l+g)$ = R; e il comun denominatore = S] sono: Pr. in A = $\frac{Mbcdf}{S}$, Pr. in E = $\frac{Nacdf}{S}$,

Pr. in F = $\frac{Rabdf}{S}$; onde Pr. in A : Pr. in E : : bM : aN; Pr. in E : Pr. in F : : cN : bR; e perciò bM : aN : : b sen.$(i-x)$: $a$sen.x; cN : bR : : $c$sen.$(l-y)$: $b$sen.y; o più semplicemente sen.x : sen.$(i-x)$: : N : M; sen.y : sen.$(l-y)$: : R : N. Ma N : M, R : N sono ragioni note. Dunque coll' ajuto del 4.° lemma noi potremo con molta facilità ed eleganza eseguire la ricercata divisione degli angoli APE, FPE per mezzo delle rette PS, PQ. Guidate poi le FS, AQ,

che s' incrociano in δ, e la $\delta P\beta$ sino al lato CH, abbiamo cognita la posizione e la lunghezza del vette primario $\beta\delta$, e degli altri vetti, che trasferiscono le pressioni.

72 Nel triangolo (Fig. 2) la divisione dell' angolo centrale APE vien fatta della CPS; e ritenendo le specie del n. 9. diventa sen.APS $= -$ sen.$(i+l)$, sen.EPS $=$ sen.l; onde sen.APS : sen.EPS : : $-$ sen.$(i+l)$: sen.l. In oltre Num.^{e} Pr. in A : Num.^{e} Pr. in E : : bcsen.l : $- ac$sen.$(i+l)$; e prendendo rispetto ad A la somma de' seni degli angoli che possono esser formati dalle distanze opposte ad A, siccome queste son le due PE $= b$, PC $= c$, non havvi altro seno d' angolo da computare che quello di EPC, cioè sen.l: e così, rispetto ad E, l' unico seno che, oltre l' ambo delle distanze AP, PC, entra nella composizione del Num.^{e} della pres. in E, è $-$ sen.$(l+i)$. Ma sen.APS : sen.EPS : : $-$ sen.$(i+l)$: sen.l. Dunque per il triangolo si verificherà questa proposizione: Che la divisione dell' ang.^{e} centrale APE deve esser fatta per modo che la porzione APS spettante ad A stia alla porzione EPS spettante ad E, come reciprocamente il seno dell' unico angolo opposto ad E al seno dell' unico angolo opposto ad A. In simil maniera si applicherà poi il teorema a ciascun degli altri 2 angoli centrali APC, CPE, e si farà nota la ragione che passa tra le due porzioni APO, OPC dell' ang.^{o} APC, e tra le due CPT, EPT dell' ang.^{o} CPE.

73 Vale pure il suddetto teorema nella figura trapezia, colla sola differenza in confronto del triangolo, che essendo, per esempio, rispetto ad E (Fig. 4) 3 le distanze opposte, AP, PC, PF, e venendo esse colle loro combinazioni a costituire 3 diversi angoli, la somma de' seni, che divien fattore del Num.^{e} della pres. in E, è somma di 3, che fanno sen.$g -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(i+l)$, siccome la somma analoga de' 3 seni, che appartengono al Numeratore della pres. in F, è sen.$i -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(l+g)$ (n. 58). S' instituisca un' analogia tra i Numeratori delle pressioni in E, F che contengono la specie y eguale all' angolo EPQ, e i Numeratori cogniti delle stesse pressioni. Avremo $- acd$sen.$(l - y)$sen.$(i + l + g)$: $- abd$sen.y sen.$(i+l+g)$: : acd[sen.$g -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(i+l)$] : abd(sen.$i -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(l+g)$]; o anche sen.y :

$sen.(l - y)$: : $sen.i - sen.(i + l + g) - sen.(l + g)$: $sen.g - sen.(i + l + g) - sen.(i + l)$, (n. 53, 58). E perchè $sen.y$: $sen.(l - y)$ è lo stesso che sen.EPQ : sen.FPQ, diremo anche nel trapezio verificarsi la proposizione; Che i seni delle porzioni dell' ang.° centrale EPF, cioè sen.EPQ spettante ad E, sen.FPQ spettante a F son tra loro reciprocamente come la somma de' seni, che formano un fattore del Num.^e della pres. in F, alla somma de' seni che forman quello del Num.^e della pres. in E. Similmente ragionando, proverem vero il teorema anche per le porzioni de' successivi angoli centrali FPC, CPA, APE.

74 Abbraccia la nostra proposizione anche la figura quinquilatera (Fig. 16). Perchè, essendo $sen.x$: $sen.(i - x)$: : N : M; $sen.y$: $sen.(l - y)$: : R : N (n. 71), e N la somma de' seni competenti al Numeratore della pres. in E; M la somma de' seni competenti al Numeratore della pres. in A; R quella de' seni, che spettano al Numeratore della pres. in F, la conseguenza è di per se chiara ed evidente. Ora ciò che si è detto relativamente alla divisione de' due angoli centrali APE, EPF nelle porzioni APS, EPS, EPQ, FPQ, è visibile che si può egualmente applicare anche agli altri angoli presi a due a due. Dunque, facendo uso del lem. 4, riuscirà facile l' assegnare i debiti segmenti a ciascun lato della figura, per mezzo de' quali risulteranno altri sistemi di vetti, ma tutti egualmente efficaci che il sistema di vette primario $\beta\delta$, a trasferire sui 5 appoggj le stesse identiche pressioni. Aggiungeremo, che quest' ultimo nostro teorema veste ormai la dignità di porisma universale, e che potremo stabilirlo come applicabile a tutte le figure.

75 Se si farà riflessione alla composizione da noi praticata de' seni, che formano un de' due fattori de' Numeratori delle pressioni, si vedrà, che si son presi prima i seni di ciascuno degli angoli opposti, appresso i seni de' medesimi angoli combinati in somma a due a due, poi i seni degli angoli combinati in somma a tre a tre. Quindi andando avanti nelle figure superiori sarà d' uopo aggiungervi i seni degli angoli uniti in somma a 4 a 4, a 5 a 5 &c. Nel trapezio 4 sono gli angoli centrali, ma, rispetto a ciascun degli appoggj, 2 gli angoli in opposizione. Supponiamo questi angoli centrali m, n, p, q, e gli opposti

a un appoggio m, n. Secondo la regola stabilita il fattor composto de' seni che conviene al Numeratore della pressione sostenuta dal suddetto appoggio, è sen.m + sen.n + sen.$(m+n)$; e se a un altro degli appoggj saranno opposti gli angoli m, p, il respettivo fattore sarà sen.m + sen.p + sen.$(m+p)$; e così pei rimanenti. Nella Fig. pentagona 5 sono gli angoli centrali, e 3 sempre gli opposti a un dato appoggio. Chiamati tali angoli m, n, p, q, t, siano opposti a un appoggio m, n, p; e il fattor competente de' seni sarà, sen.m + sen.n + sen.p + sen.$(m+n)$ + sen.$(m+p)$ + sen.$(n+p)$ + sen.$(m+n+p)$. Così si dica degli altri. Dunque per l' essagono, dove 6 sono gli angoli centrali, che diremo, m, n, p, q, t, u, e 4 sempre in opposizione all' appoggio, se essi sono m, n, p, q, il fattor corrispondente verrà così espresso: sen.m + sen.n + sen.p + sen.q + sen.$(m+n)$ + sen.$(m+p)$ sen.$(m+q)$ + sen.$(n+p)$ + sen.$(n+q)$ + sen.$(p+q)$ + sen.$(m+n+p)$ + sen.$(m+n+q)$ + sen.$(n+p+q)$ + sen.$(m+p+q)$ + sen.$(m+n+p+q)$; e la stessa regola vale per tutte le altre figure. La serie de' numeri de' termini, che formano ciacsun de' suddetti fattori, è per il triangolo 1, per il trapezio 3, per il pentagono 7, per l' essagono 15, la cui legge è chiara; onde, chiamato n il num.° de' lati della figura, il num.° de' termini, che compongono ciascun de' fattori suddetti, sarà $2^{n-2} - 1$.

76 Sin dal principio di questa Memoria ho detto, che la soluzione del problema delle pressioni data dal Lorgna, ben noto per parecchie sue belle produzioni, non ha soddisfatto niente i Geometri, perchè stabilita sull' ipotesi affatto arbitraria de' suoi triangoli operatori, del peso tante volte replicato quanti sono questi triangoli, e poi della riduzione al peso semplice e alle pressioni competenti colla regola del 3, che relativamente al problema nostro non è fondata sopra nessuna legge di Natura. Io darò termine a questa mia indagine col dimostrare, che il metodo del Lorgna in un caso conduce patentemente all' assurdo, e non può in conseguenza accettarsi senza urtare in risultati, che sono assai lontani dal vero. Sia il trapezio AEFC (Fig. 21), che ha il peso P collocato in quel punto, ove

s' intersecano i due diametri AF, CE, e gli appoggj ne' 4 angoli. Perchè il peso P si trova in un punto comune ai 4 triangoli AEC, AEF, EFC, AFC fatti dai diametri e dai lati, prescrive il mentovato Autore, che colla regola nota si trovino le pressioni, che da P derivano agli appoggj di ciascun triangolo, come se questi appoggj fossero soli e non avessero comunicazione cogli altri. Onde, chiamata $AP = a$, $PE = b$, $FP = c$, $CP = d$, rapporto al triangolo AEC poichè P cade su un punto della base EC, nasce Pr. in $A = 0$, Pr. in $E = \frac{Pd}{b+d}$, Pr. in $C = \frac{Pb}{b+d}$. Per quest' istessa ragione le pressioni agli appoggj del triangolo AEF sono Pr. in $E = 0$, Pr. in $A = \frac{Pc}{a+c}$, Pr. in $F = \frac{Pa}{a+c}$; e andando avanti, rispetto al triangolo EFC, Pr. in $F = 0$, Pr. in $E = \frac{Pd}{b+d}$, Pr. in $C = \frac{Pd}{b+d}$; finalmente, rapporto al triang.° FCA, Pr. in $C = 0$, Pr. in $F = \frac{Pa}{a+c}$, Pr. in $A = \frac{Pc}{a+c}$. Dopo ciò vuole, che si faccia la somma delle pressioni competenti a ciasuno de' 4 appoggj; da che risulta Pr. in $A = \frac{2Pc}{a+c}$, Pr. in $E = \frac{2Pd}{b+d}$, Pr. in $F = \frac{2Pa}{a+c}$, Pr. in $C = \frac{2Pb}{b+d}$. In questa maniera operando ognun vede, che si considera P come quadruplicato, e che non possono esser giuste le suddette pressioni. Or che fa egli per aggiustar le partite? Instituisce un' analogia, e dice: come sta il peso quadruplicato a ciascuna delle false pressioni, così il peso semplice alla 4.ª proporzionale, che asserisce dover essere eguale alla pression vera. Applicando la regola al nostro trapezio direm dunque $4P : \frac{2Pc}{a+c} :: P :$ Pres. vera in $A = \frac{Pc}{2(a+c)}$. All' istessa maniera sarà Pres.

Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.

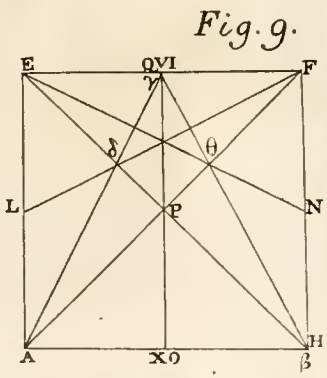
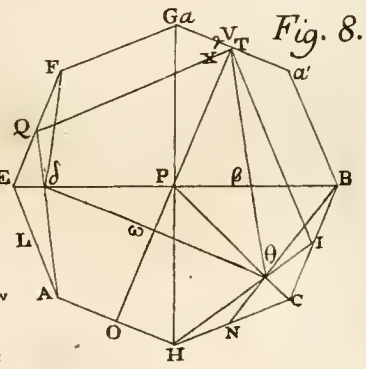
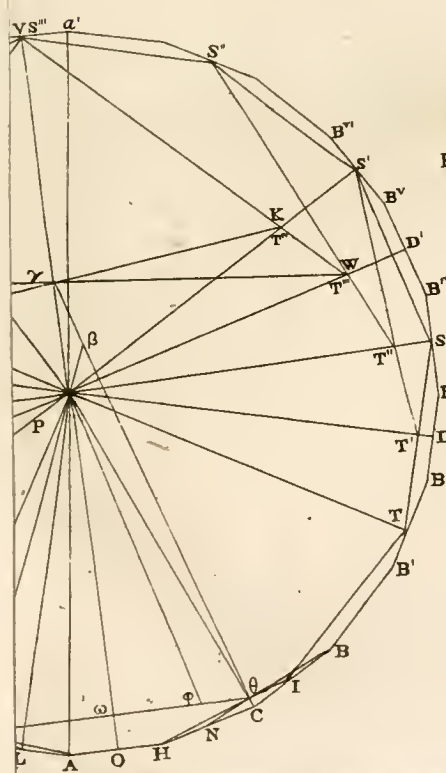
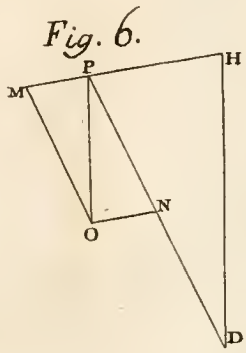
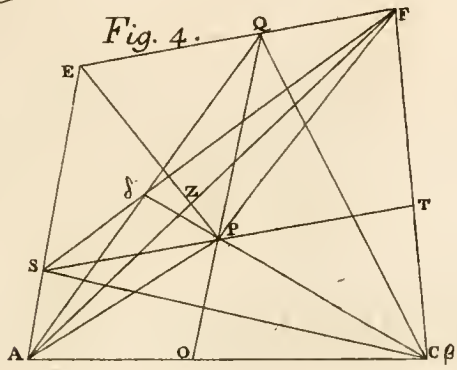
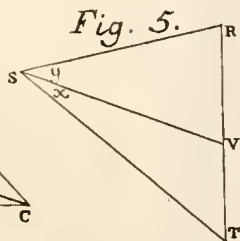
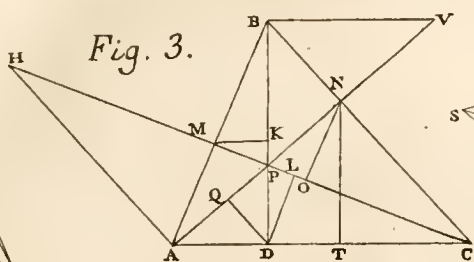
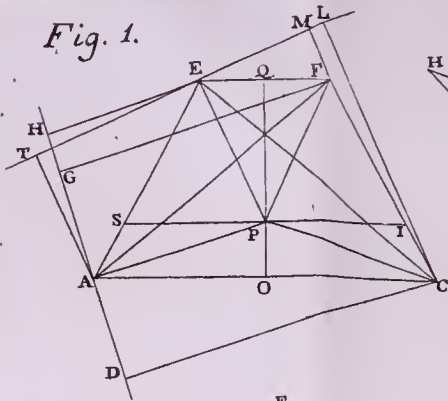
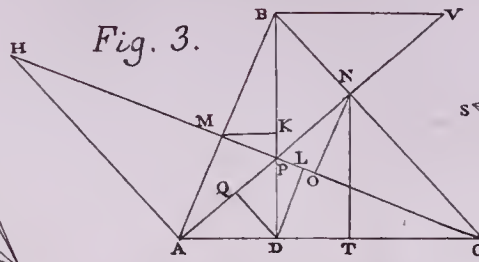
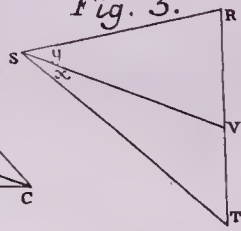
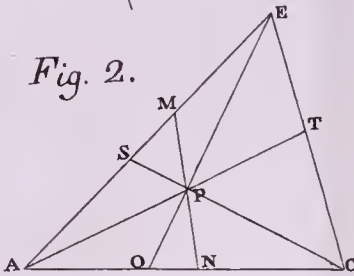
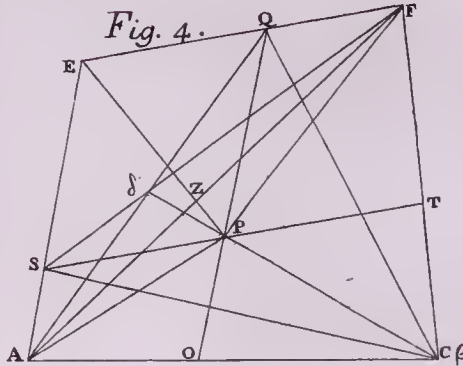
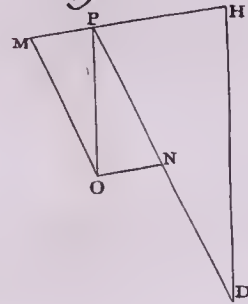



Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

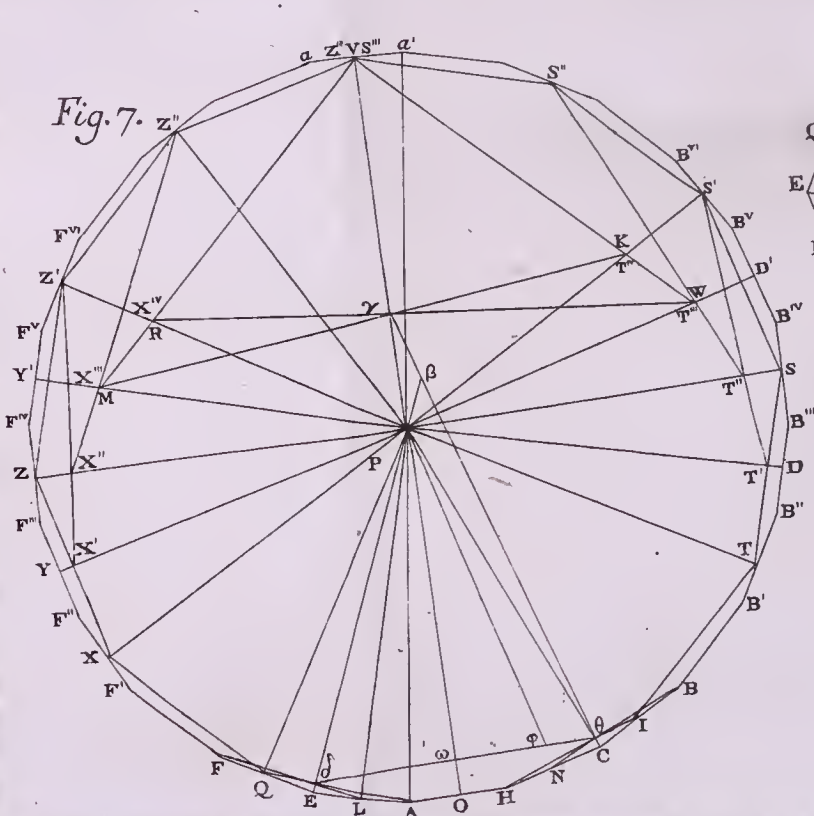
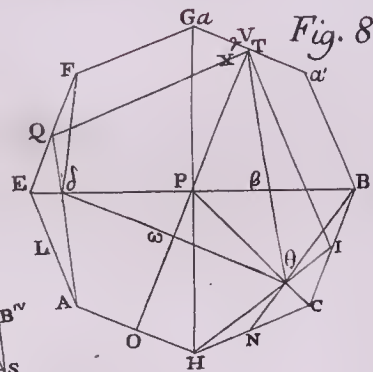



Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 15.

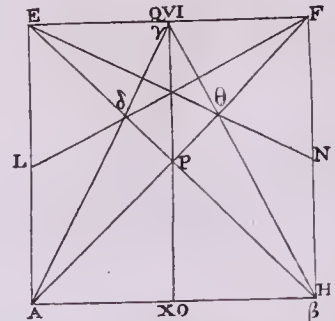
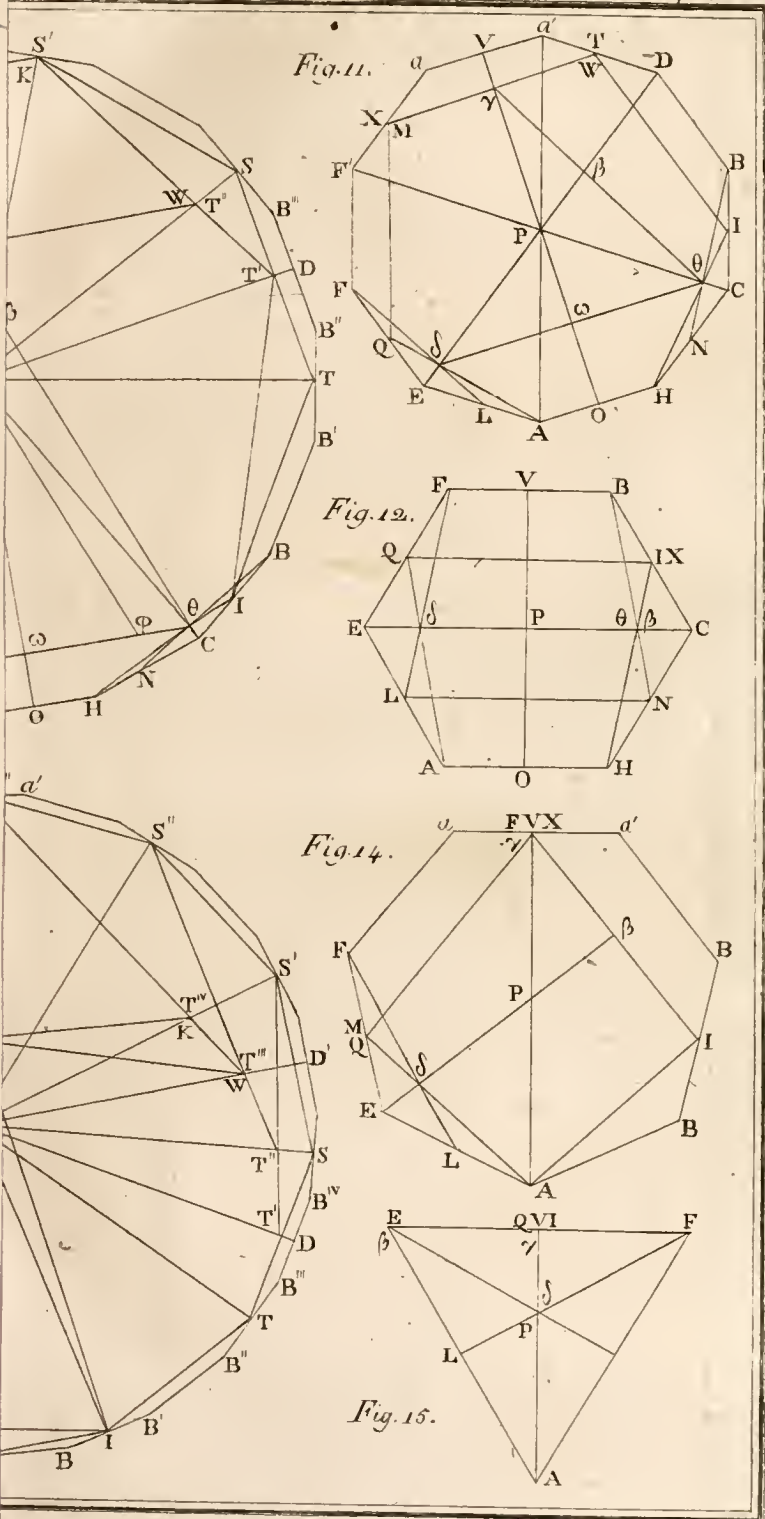
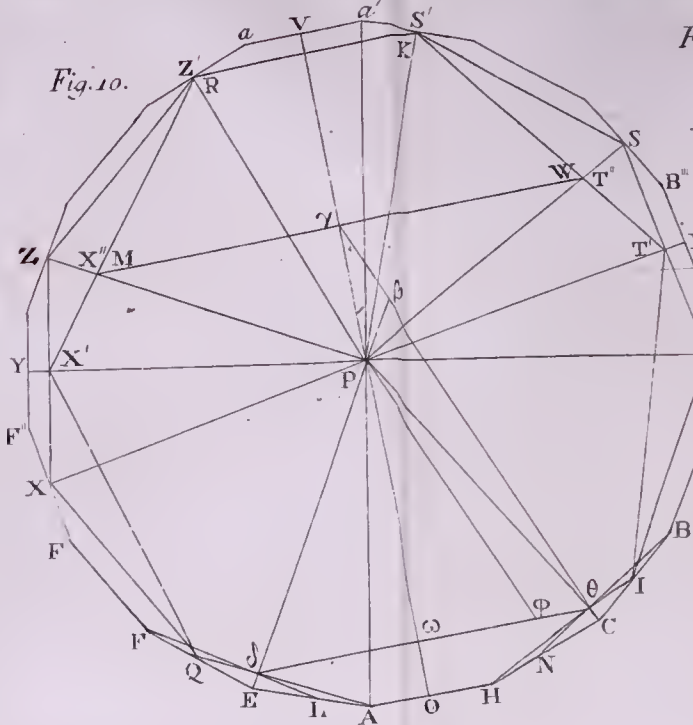



Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

Z'''
a
V
a'
S'''
R
K
S''
S'
γ
T''' W
β
D'
T'''
P
T''
S
B'''
T'
D
B''
T
B'
δ
B
I
E
L
A
C
Fig. 18.
F
Q
E
C
δ
P
S
β
A
H
Fig. 19.
E
Q
R
F
N
T
P
M
A
O
C
E
Fig. 21.
F
P
A
C

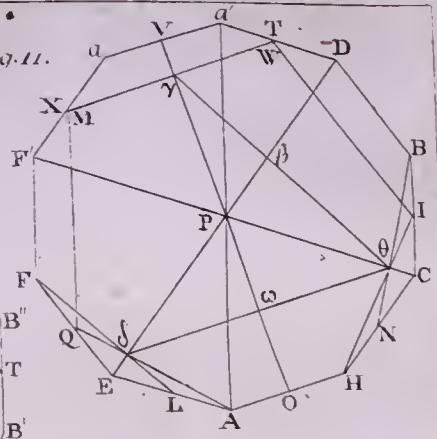
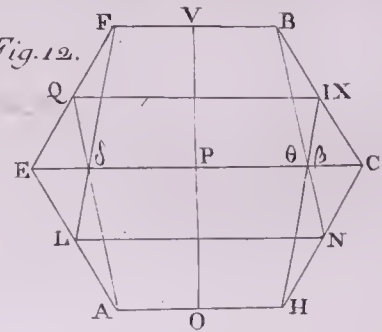
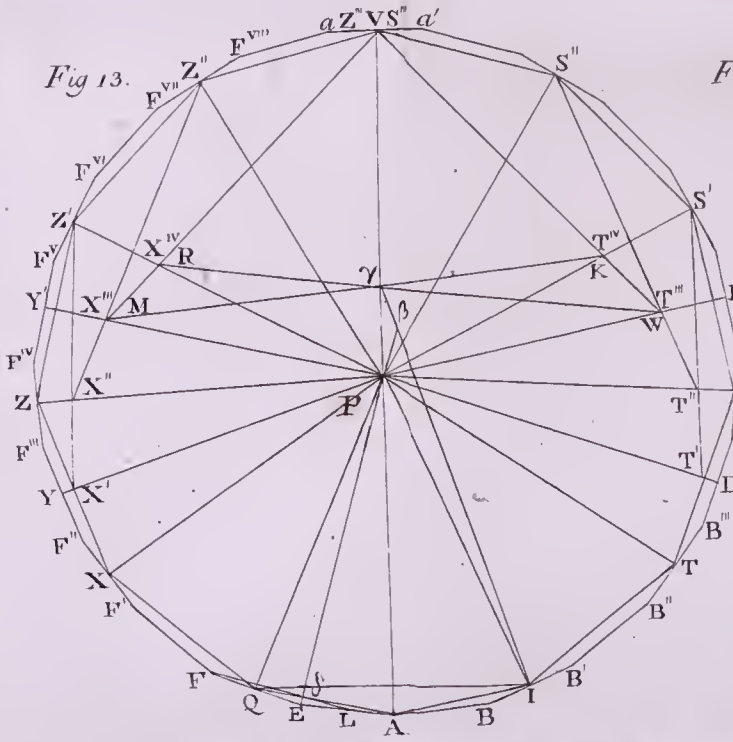
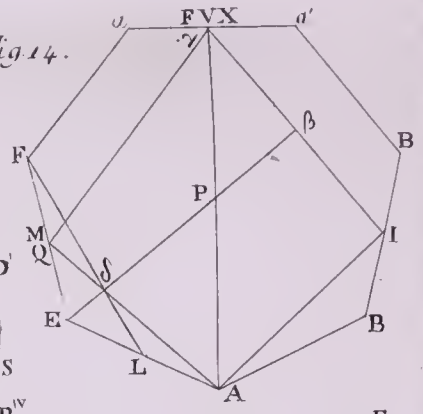
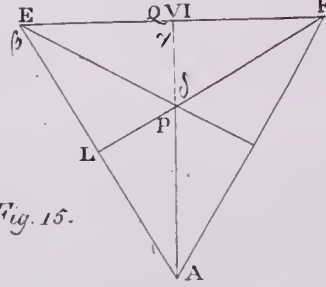
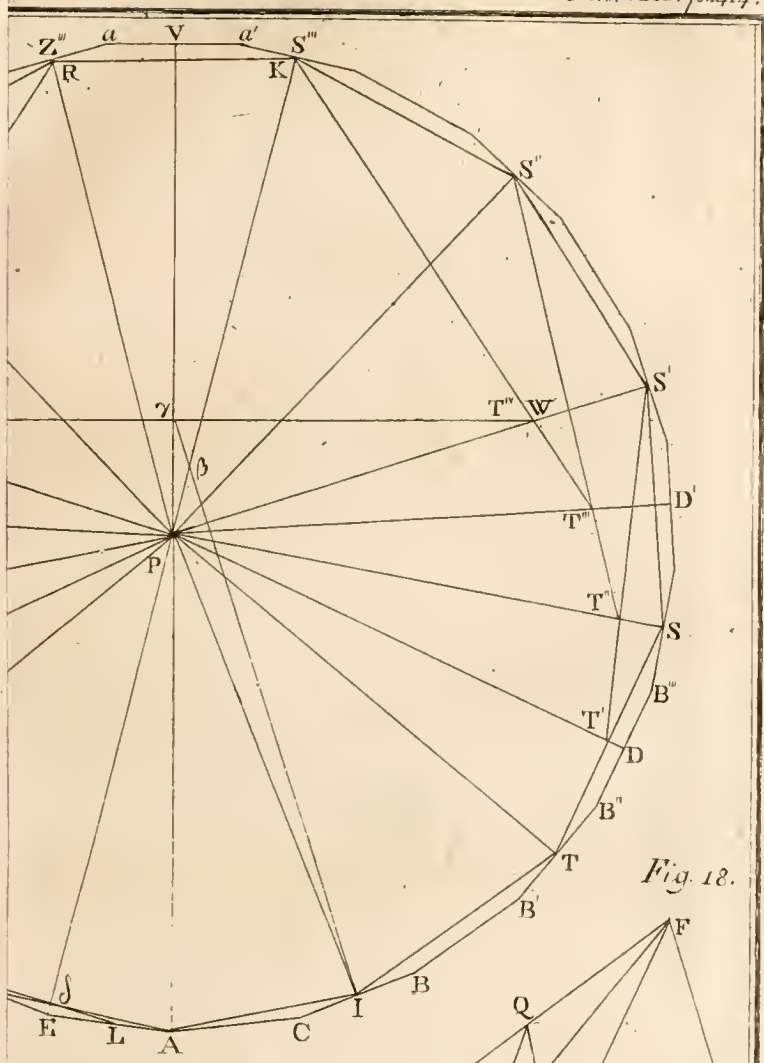
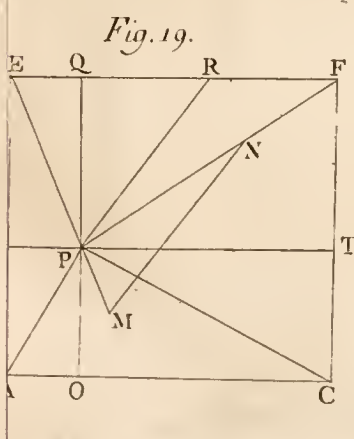
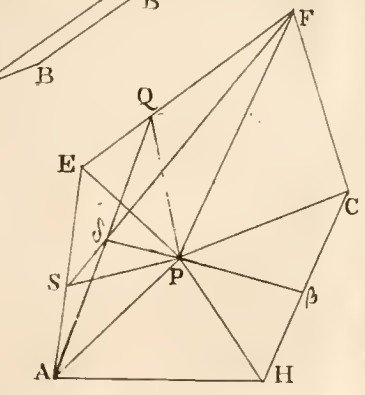
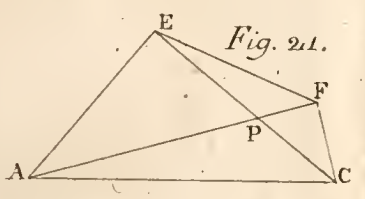



Fig. 16

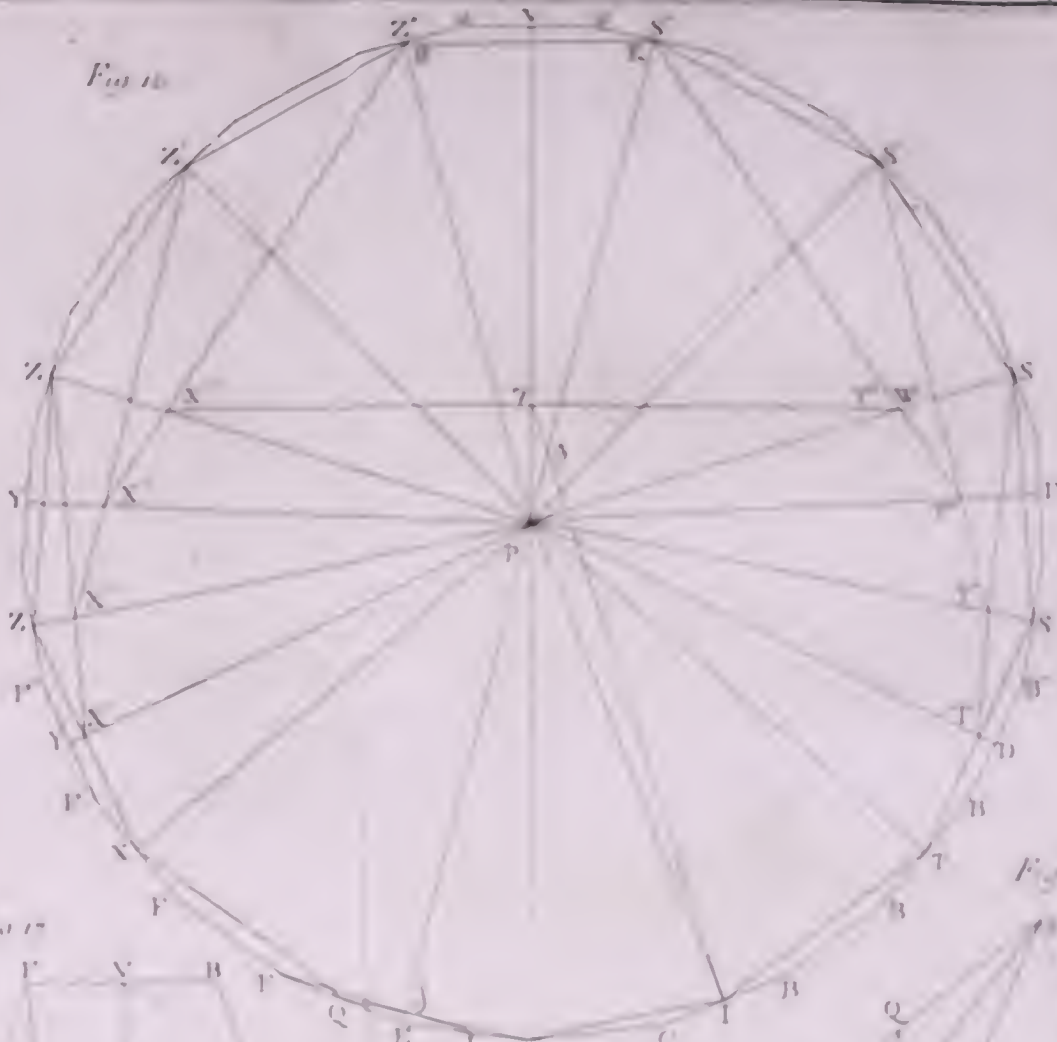



Fig. 17

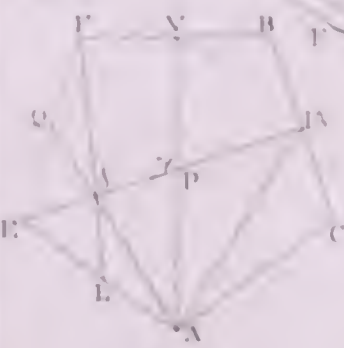



Fig. 18

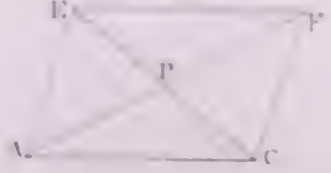



Fig. 19

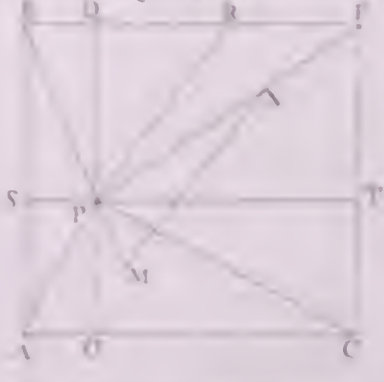



Fig. 20

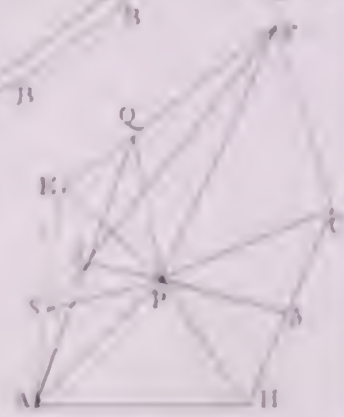



Fig. 21

vera in E $= \frac{Pd}{2(b+d)}$, Pr. vera in F $= \frac{Pa}{2(a+c)}$, Pr. vera in C $= \frac{Pb}{2(b+d)}$. Per vedere la falsità di questi risultati, basta supporre che si appiani l'ang.° AEF, onde E cada in P. In tal caso abbiamo $b = 0$, Pr. in E $= \frac{P}{2}$. Ma allora, per ragione della coincidenza del peso P e dell' appoggio E immobile ed inconcusso, è evidente che l' appoggio E dee sostener tutto il peso P, laddove col metodo del Lorgna ha il carico della sola metà. Dunque codesto metodo è erroneo, e dev' essere in conseguenza dalle teorie statiche perpetuamente eliminato.

SUL TRAPPO DEL MONTE SIMMOLO PRESSO INTRA IN RIVA AL VERBANO, E SUI VETRI CHE SE NE SONO FORMATI.

DI CARLO AMORETTI.

Ricevuta li 5. Piovoso An. VII. (24. Genn. 1799.)

1. SUl principio dell' anno 1797 (v. rep.) godendo ad Intra sul Verbano dell' ospitalità de' miei benefici e rispettabili amici, Giberto Borromeo e Ferdinando Cusani, e profittando dell' ozio malgrado mio accordatomi nella soppressione della Società Patriotica d' Agricoltura e d' Arti, io percorreva nei sereni dì dell' inverno i monti di quel bel paese, e i due fiumi fra i quali è edificato il ricco borgo. E mentre quanto la Natura m' offriva io andava osservando, m' avvenni nel fiume settentrionale, detto di S. Giovanni per la Chiesa presso cui ha foce nel Lago, a vedere non infrequenti certi sassi, che al colore, alla tessitura, e alla forma angolare, sebbene per l' azion dell' acqua e pel rotolamento in gran parte smussata e perduta, sospettai essere lave e basalti.

2. E poichè ivi abitavamo la casa del cortese ed industre C. Peretti, che una fabbrica v' ha di cristalli e di vetri, allora in attual lavoro, alcuni frammenti di quel sasso portai meco per esperimentarlo, ben certo che fuso sarebbesi in vetro nero opportuno a farne bottiglie, se era basalte, sapendo che appunto col basalte e colle lave degli estinti volcani si soffiavano in più luoghi delle eccellenti bottiglie nere. Furono que' frammenti di sasso posti sull' orlo d' una padella, ossia ampio crogiuolo, in cui il vetro era fuso; e dopo pochi minuti sen vide vetrificata la superficie: onde in piccolo crogiuolo sen fece poi lo sperimento dal Capo-fonditore di quella fabbrica, il quale, sebbene nell' arte sua versatissimo, vide per la prima volta un duro sasso, nè macinato nè misto a fondenti, squagliarsi in un vetro compatto nero lucidissimo.

3.

3. Questo primo sperimento mi confermò sempre più nel sospetto che quel sasso fosse un prodotto volcanico; al che s' aggiunsero due argomenti estrinseci. Uno era tratto dall' analogia. Appiè delle Alpi, diceva io, stendesi una serie di Volcani estinti, cominciando da' colli Euganei, passando pe' Berici, pe' monti Vicentini e Veronesi notissimi a tutti i curiosi, de' quali hanno pubblicati eccellenti disegni lo *Strange* (a), e 'l mio amico *Fortis* (b). *Serafino Volta* vide pur egli le tracce volcaniche nel Monte Baldo (c): le vide sul Bresciano *Gaetano Maggi* (d); e sul Bergamasco *Giovanni Maironi da Ponte* (e). Non ve n' è, a vero dire, per quanto almeno io so, ne' contorni del Lario, ma talun ne vide o credè vederne presso Lugano (f); e fra 'l Lago di questo nome e 'l Verbano, v' è molta apparenza che siavi un Volcano estinto in Valcuvia (g). Questo del monte Simmolo, a cui piedi corre il fiume di S. Giovanni, ne sarebbe una continuazione. Il nome stesso di Simmolo, che dagli Antiquarj dicesi *Mons Summus*, nome non nuovo per un monte volcanico, favoriva la mia congettura (h).

4. L' altro argomento era appoggiato ad un racconto fattomi. Mi fu detto che Mylord *Hervey* Conte di Bristol, e Vescovo di Londondery, valente Naturalista, era pochi

(a) De' monti colonnari ec. *Opuscoli scelti di Milano*, Tom. I. p. 73.

(b) Della valle Vulcanico marina di Roncà.

(c) *Opusc. scelti*. Tom. XII. pag. 42.

(d) Ragguaglio MS. d' un viaggio di cui farò uso.

(e) *Op. sc.* Tom. XIV. pag. 217.

(f) Viaggio ai tre Laghi pag. 44.

(g) Ib. p. 54.

(h) Gli Antiquarj, che si giovan di tutto, troveranno anche del rapporto fra 'l nome del monte, e quello di *Sumèa* rammentata in una iscrizione in bianco marmo, che sta dietro l' altar maggiore della chiesa di Bienno, villaggio poco distante da Intra e dal monte stesso. Non essendo mai stata pubblicata, quì la darò, benchè sembri imperfetta, o inesatta.

OCTAVIVS
CIMONIS . F.
SIBI . ET . SVME
AE . SENONIS . F.
VXORI . ET . PRI
MAE . F . ET . NA
MVNINO V. .
ELII . F. VXORI.

anni prima ad Intra andato espressamente, perchè eragli stato indicato in que' contorni un Volcano estinto, e per trovarne gli avanzi era salito in vetta al summentovato Monte Simmolo. Se egli vi trovasse indizj dell'estinto Volcano, niuno mel seppe dire; ma ciò bastò perchè io stesso, in compagnia di colti amici, in vetta di quell' alto monte salissi. Andammo a San Giorgio, a San Martino, a Roncaccio, e di là non senza stento ci arrampicammo sulla vetta: discendemmo poi alla cappella di Nava, risalimmo a Premeno, e passando al Nord della chiesa di S. Salvatore, tornammo ad Intra per Carzana, Rizzano ec. E sebbene nulla affatto di volcanico non v' abbiamo trovato, pur ci servì di non inutile istruzione l' osservare sparsi su tutta la superficie, e sulla vetta istessa di quel monte isolato, de' massi enormi di granito, mentre nel nocciolo del monte non ve n' ha punto. E avendo noi in faccia al Sud-ouest, oltre il seno del Lago ove sorgono le deliziose Isole Borromee, il rinomato monte di Baveno ove il granito posa sullo scisto, e questo sull' argilla, argomentammo che una cresta granitosa, anzichè di lave o di basalti, avesse pur una volta il Monte Simmolo, distrutta dal tempo e dalle fisiche rivoluzioni, della quale ci erano rimasti gli avanzi in que' massi; giacchè questo monte ha pur esso il nocciuolo interamente di scisto micaceo argilloso (*gneiss* de' tedeschi), e sotto questo a luogo a luogo, ove le acque hanno corroso, mostrasi l' argilla. Lo scisto è sovente tagliato da filoni di quarzo, e talor anche di pirite; e solo presso la base del monte, che allora noi non visitammo, sono i molti filoni del sasso di cui si tratta (*a*).

(*a*) Un'altro viaggio feci qualche tempo dopo per lo stesso oggetto, e mosso dalla medesima ragione, sul monte *Torione* diviso dal Simmolo per l' angusta Valle Intragna in cui scorre il fiume di S. Giovanni summentovato. Fummi detto che pur colassù era andato Mylord *Hervey* per cercarvi il Volcano, e che doveva averlovi trovato, poichè v' è un luogo ove il monte è sconvolto e disfatto, e mai non vi s' arresta la neve, V' andai, passando per Caprezio; e nulla trovai di volcanico, ma bensì alcuni filoni del sasso da bottiglie; e vidi il luogo ove la neve non s' arresta mai, benchè si fermi in tutto quel d' intorno. Seppi e vidi esser ivi un filone di pirite di rame, altre volte scavato al basso, ed ora abbandonato. La scomposizione della pirite contribuiva senza dubbio al disfacimento del mon-

5. Abbenchè deluso nella ricerca del cratere, e d'ogn' indizio d'estinto Volcano, pur giudicai util cosa d'occuparmi a sperimentare, giacchè n'aveva un sì bel comodo, se veramente quel sasso somministrava materia vetrificabile atta a farne bottiglie, in modo che il proprietario della fabbrica, e 'l paese tutto, sì pe' vini indigeni che per gli stranieri portativi da fiorentissimo commercio, trarre ne potessero vantaggio. E ben potei farlo, poichè il C. Peretti con tutti i mezzi e con tutti i lumi che aveva, secondò i miei desiderj, ch'erano divenuti sua premura, e suo interesse. Il risultato fu che il sasso solo presto fondeasi, ma sì fluido era da non poterlo soffiare, e misto a qualche sostanza che il rendea men liquido, privo affatto rimanea di trasparenza. Quello che avea misti de' cristallini di feldspato, forse perchè questi non sì facilmente fondeansi, dava un vetro nero verrucoso.

6. Anche in tempo della mia lontananza, giacchè alcuni affari mi richiamarono per molti giorni a Milano, coll' assistenza del C. *Zanoia* (uso nelle cose sue all' esattezza dell' architettura in cui è valentissimo) gli sperimenti si continuarono, e variaronsi regolarmente in molte maniere per indagare quello che più convenìa. In quali dosi, e con quali preparazioni vi si siano aggiunte delle altre sostanze sarebbe quì inopportuno il dirlo; ma ben dir posso che il sasso macinato, e misto a convenevol dose d'arena quarzosa e feldspatosa, di cenere, di marmo polverizzato e di calce, diede un bel vetro che avea la massima lucentezza e durezza, e quella poca trasparenza che in simil vetro si richiede: resse a tutte le prove come le migliori bottiglie di Borgogna; e a conti fatti si conobbe che a molto più basso prezzo delle altre vender poteansi le bottiglie con questo vetro formate, onde alcune migliaja se ne soffiaro-

te. Perchè sul filone di rame non s'arresta la neve? Nol so: ma veggo in questo agghiacciato inverno (Gennajo 1799.) che sul rame lavorato non si ferma la brina, la quale attaccasi e si moltiplica sul ferro posto nelle medesime circostanze. E' noto altresì quanto difficilmente si riscaldi l'ottone in confronto del ferro, a ugual distanza dal fuoco. Questo può dar qualche lume intorno all'effetto che la miniera di rame produce sulla neve.

no, e per altre migliaja furono date le commissioni di chi sperimentolle.

7. Alle sperienze summentovate, e per esse alla riuscita, molto contribuì senza dubbio la casuale scoperta fattasi d'un filone di questo sasso nello scistoso fianco del torrente, che presso Selasca (a un miglio al Nord d' Intra e appiè dello stesso Simmolo) colla corrosione e colle cascate forma un piacevol orrore, di ragion di Ferd. Cusani, che non rammenterò mai senza un sentimento di viva riconoscenza. L' avere sasso abbondante e uniforme, il che non facilmente aver poteasi cogliendo i ciottoli del fiume, fece sì che contar si potè sui risultati, variando le dosi degli ingredienti, la durata del fuoco, e 'l metodo stesso del lavoro.

8. Quando tornai ad Intra vidi con piacere quel filone, ma avendo osservata molta varietà ne' ciottoli di questo genere di pietra, ch' io sospettava tuttavia volcanica, argomentai che diversi filoni o strati esservene dovessero ne' contorni, oltre il già mentovato di Selasca, da cui generalmente que' ciottoli differiano pel colore, per la finezza della grana, e per la mescolanza d' altre sostanze lapidee. Quindi mi feci con maggior attenzione a ricercare in quelle vicinanze, e molti filoni ne trovai in diversi tempi, quasi tutti perpendicolari, quasi tutti nella direzione sud-sud-ovest, nord-nord-est, e quasi tutti alle falde del monte Simmolo; se non che in altre mie escursioni ne trovai pur altrove, siccome dirò. Ecco una breve indicazione de' luoghi ove son que' filoni, e delle loro proprietà più rimarchevoli.

A. Fra 'l ponte di Pozzaccio e Ramello. Filone che attraversa il fiume: è largo da 15 a 20 piedi: la frattura n' è cuneiforme e romboidale: grana fina, pasta omogenea, color azzurrognolo: penetra lo scisto irregolarmente; e da esso non lungi corre un filone di quarzo. Sulla riva e nell' alveo ven' ha de' pezzi staccati di 8 a 10 piedi cubici. Può riportarsi al *Corneus trapezius solidus cærulescens*. Valler. Sist. Min. Tom. I.

B. A mezzo miglio dal Lago alla sinistra del fiume. Filone largo da 8 a 10 piedi, che verso est sembra aver sollevato lo scisto: colore del precedente ma assai più cu-

po, grana men fina, frattura uguale. *Corneus trapezius solidus nigrescens*. Ib.

C. Fra la Chiesa di S. Giovanni e la nascente villa Cacciapiatti, ve n' ha tre filoni che attraversano la strada di Selasca. E' assai grossolano e duro. Il molto Feldspato, che v'è misto per lo più a prismi irregolari, gli dà un color grigio e brutto: il secondo ha più di 40 piedi di larghezza: il terzo vedesi benissimo nello scoglio scistoso distrutto in parte per far luogo alla summentovata villa. Sembra essere il *Trapezum viridescens spatho scintillante albo mixtum*. Born. Index Fossil.

D. Salendo dalla vicina Cappellaccia al villaggio di Biganzolo se n' incontra fra le prime case un filone simile ai tre precedenti (C); e un' altro ve n' ha superiormente al villaggio, di color azzurrognolo, simile per la frattura e per la grana alla varietà A; se non che ha delle rilegature sottili di quarzo che il dividono in rombi, e a luogo a luogo del color d' ocra per la scomposizione del ferro.

E. Nel torrente di Selasca, al piano della casa, v' è una vaghissima grotta naturale. Ivi vedesi lo scisto penetrato da un filone cuneiforme del Sasso di cui si tratta, il quale corroso e interrotto dalla cascata dell' acqua, rivedesi al lato destro del torrente, e termina presso un filoncino di pirite. *Corneus trapezius colore nigrescente paulo durior*.

F. Il filone trovato pel primo (7.) sta a 50 passi sotto la seconda cascata verso il Lago, al luogo donde traesi il canale che serve alla sega, e attraversa pur esso il torrente. E' inclinato verso est, e fa in alto quasi un angolo retto collo scisto che piega verso ouest. La sua grana è fina e uniforme: talora è alquanto fibroso alla superficie ch' è nericcia, e sovente ocracea. Fendesi in rombi e prismi di tutte le figure: è più tenero di quello de' sin quì nominati filoni, ma s' indura al fuoco. Vi si trova dentro qualche pagliuzza di pirite aurea, de' globetti ocracei; e, ove questi son consumati, de' buchi tondi o allongati, che mal non somiglierebbono a quei della lava porosa, se fossero più frequenti e continui. Non dà fuoco all' acciaino, come il danno alcuni de' già mentovati filoni, e fa qualche effervescenza cogli acidi. Abbrustolito e pestato, è attratto in parte dalla calamita. Nello scisto che vi sta sopra veg-

gonsi de' piccoli strati di pirite di ferro, e d' una specie di terra nera lucida di color piombino, che non mal somiglia alla molibdena. Potremo chiamare il sasso di questo filone = *Trapezum nigrescens particulis aliquando acerosis*. Born.

G. Da Selasca sin' oltre Frino costeggiando il Lago vedonsi molti filoni di questa pietra, sprizzati di Feldspato bianco, il quale generalmente tanto più abbonda quanto più si va al nord. In alcuni v' è qualche rilegatura di spato calcare cristallizzato. Sotto San Maurizio due filoni, anzichè andar paralleli, convergono con un angolo di circa 30 gradi. Sino a Ghiffa non arriva alcun filone, ma sen vede qualche ciottolo o frammento sparso sul lido. Questi filoni possono riportarsi alla varietà C, se non che il Feldspato v' è in minor quantità, e più regolarmente disposto (*a*).

9. Lavoravasi già da alcune settimane quella pietra, e s' ignorava ancora che cosa ella fosse, Io sospettava come dissi, che fosse volcanica e per le addotte ragioni, e perchè in que' filoni pareami di vedere una gran somiglianza co' filoni della lava che frequentemente avea veduti ne' colli Euganei e Berici, e ne' monti Vicentini e Veronesi; ma il non trovarvi nè pomici, nè vetri, nè lave porose, nè cipolloni &c., nè altro che certa prova fosse dell' azione del fuoco, men faceva al tempo stesso molto dubitare. Altri fondamenti del mio dubbio addurrò più sotto.

(*a*) Prima d' intraprendere più estese corse in quella parte delle Alpi non mi venne mai fatto di vedere filoni di questa pietra se non appiè del Simmolo. Solo ne avea veduto un filone che attraversa il fiume meridionale d' Intra detto di S. Bernardino, oltre il ponte d' Uncio, a cui va parallelo un largo filone di quarzo con pirite; ma pur questo potea riportarsi al Simmolo dalle cui falde poco dista. In appresso però, oltre l' averne visto più d' un filone sopra Caprezio (vedi la nota alla pag. 5.) due filoni ne vidi in val Canobina nel salire a Cavaglio, e alcuni filoni pur ne trovai in valle Angasca presso Castiglione. Di là sino al ghiacciaio del Monte rosa più non ne vidi. Il filone, che sta sopra Caprezio al luogo de' maceratoi della canapa, pe' molti e bei cristalli di Feldspato, potrebb' essere il *Mandelstein* de' Tedeschi, e formar un vaghissimo porfido a base di sasso corneo azzurro.

10. Mentr' era incerto sull' origine come sul nome di quel sasso, *Francesco Ruzieska d' Odmark*, allor direttore delle miniere di pirite aurifera di ragion de' Borromei in valle Anzasca, fu il primo a farmi nascer pensiere che quello fosse il *Trappo*, di cui da alcuni anni molto parlano i Litologi; e un volumetto d' un Giornale Tedesco (*a*) ch' ei prestommi, in cui è parte d' una memoria di *Werner* sul trappo, me ne convinse. Leggesi in questa memoria quanto i Naturalisti svedesi hanno scritto sul trappo, di modo che potendo io paragonare le osservazioni loro col sasso che avea sott' occhio, vidi che questo era a molti rapporti simile a quel di Svezia. Gli somiglia per la frattura a cubi e a rombi, per la quale *Linneo*, che dianzi avealo chiamato *Schistus cinereus durinsculus*, *scriptura cana*, chiamollo poi *Saxum trapezum*, nome che richiama ugualmente il *trappo* degli Svedesi, e la figura geometrica del trapezio; e dice poi ch' è in alcuni luoghi lamelloso, subcalcare facendo un pò d' effervescenza cogli acidi, non dando fuoco all' acciaino ec., il che pure al nostro sasso conviene. Ad esso pur trovai adattabili le proprietà che al trappo attribuiscono *Rinmann*, *Cronstedt*, *Hermelin*, *Vallerio*, e *Bergmann*. Il primo lo chiama una roccia cornea ferruginosa; dice che frequentemente trovasi vicino a filoni metallici; che abbrustiato è in parte atraibile alla calamita, che contiene 9 per 100 di ferro; che fondesi in un vetro nero; che il suo peso è a quel dell' acqua come 14 a 5; e che ve n' ha di molte varietà. *Cronstedt* crede il trappo un composto di terra marziale e d' argilla indurata; osserva che sovente, e soprattutto il trappo grossolano, contiene del Feldspato; parla della sua proprietà di dividersi in rombi e in cubi, di contenere 12 per 100 di ferro, di servire nelle vetraie a far bottiglie nere, e d'aver molta somiglianza al basalte. *Stermelin* e *Wallerio*, dicono a un di presso lo stesso. *Bergmann*, dopo d' averne annoverate le proprietà sovrindicate, tratta specialmente della sua somiglianza col basalte, facendo il parallelo fra un pezzo di trappo di Svezia, e 'l frammento

(*a*) Bergmannische Journal. July. 1793.

d' una colonna basaltina dell' isola di Staffa, una delle Ebridi. Del rapporto fra 'l trappo e la lava parlerò poi. Il sasso da me trovato avea tutte le indicate proprietà, poichè fra le molte varietà da me superiormente descritte, trovasi nelle une quella proprietà che nelle altre non iscorgesi.

11. Vero è che v' ànno fra 'l nostro trappo e lo svedese due differenze ben sensibili. La prima si è che il nostro sta, come notammo, per lo più appiè del monte, in filoni perpendicolari o inclinati assai e formanti angolo collo Scisto, sovente di pochi piedi, o al più di poche tese di larghezza; laddove lo Svedese sta per lo più all' alto de' monti, ove forma de' gran banchi orizzontali, e dividendosi in cubi e in rombi, per le fenditure incrociate ch' egli ha, viene a formare delle gigantesche scalinate dalle quali ebbe il nome, poichè *Trappa* in Svedese significa scala. Ma questa difficoltà, che grande parvemi al leggere il ragguaglio dei trappi di Svezia, svanì quando potei leggere le memorie di *Barral* e *Faujas Saint-Fond* su questo sasso, delle quali i loro Autori fecermi cortese ed onorevol dono. Il secondo, (*a*) non solo parla frequentemente de' filoni di trappo, ma osserva altresì che in alcune parti della Scozia chiamansi *channels*, cioè ruscelli, poichè sono incassati in altra specie di pietra, e per lo più nello Scisto, come se in esso fossero corsi in istato di fluidità. Osserva al tempo stesso esservi colà certo trappo sparso di frammenti di Feldspato e di scerlo, e talor anche di globetti calcari, cui dassi il nome di *toadstone* (pietra-rospo) per la somiglianza che ha colla pelle del rospo; il che pure ad alcune varietà del nostro trappo conviene. Il primo (*b*) vide gran filoni di trappo in Corsica, e su di essi ragionò, come vedremo.

12. La seconda e maggiore differenza fra 'l nostro trappo e quello di Svezia parea risultare dall' analisi chimica. Il mentovato *Ruzieska* la fece del nostro sasso, come *Bergmann* l' avea fatta del trappo Svedese; ed ecco ciò che da quello ricavò il primo, e da questo il secondo.

Trap-

(*a*) Essay Sur les roches de trapp &c. Voyage en Angleterre &c.

(*b*) Memoire sur le trapp, & les roches volcaniques.

Trappo del Verbano analizzato da *Ruzieska*.	
Selce	018
Alumina	017
Calce di ferro	009
Terra magnesiaca	042
Acido vitriolico	006
Acido spatico	—
Acqua	003

Trappo di Svezia analizzato da *Bergmann*.	
Selce	050
Alumine o argilla	015
Ferro	025
Magnesia	002
Calce aereata	008

Ma comunque ne salti all'occhio la differenza, non dedurrà nessuna conseguenza dai risultati di queste due analisi chi osserverà esservi gran varietà ne' trappi d' ogni paese, le quali hanno differenze ben rimarchevoli, non solo esteriormente, come de' nostri filoni osservammo, ma ben anche nella proporzione delle parti costituenti. Chi vuol esserne convinto dia un'occhiata al catalogo delle varietà de' trappi che *Faujas* ha osservate sì in Inghilterra che in Francia. Di più: lo stesso *Faujas* ci ha data l' analisi del trappo di Derbyshire che con nessuna delle due concorda. Egli vi ha trovato Selce 063, argilla 014, calce 008, ferro 014. Poichè dunque i trappi di Svezia e di Scozia son fra loro sì diversi pe' risultati, può bene a questo stesso genere appartenere il sasso del Verbano, malgrado la differenza nella proporzione de' risultati, avendone altronde le altre proprietà. E' altresì da osservarsi che *Bergmann* contemporaneamente al trappo della Svezia analizzò la lava di Staffa, e n' ebbe ugualissimi risultati: or noi abbiamo un' altra analisi della lava di Staffa fatta dal summentovato *Faujas* con risultati ben diversi, cioè: Selce 040, calce 012, magnesia 005, argilla 020, ferro 021. Dunque i risultati diversi non danno bastante argomento per inferirne la differente natura di due pietre, specialmente ove la diversità consista nella sola proporzione de' componenti. Ed ebbe anche a notare a questo proposito il testè lodato Naturalista, che da due pezzi di lava, comunque esternamente somigliantissimi, mai non ebbe nell'analisi i medesimi risultati; trovato avendo che la magnesia varia da 1 a *16*, il Selce da 40 a *66*, il ferro da *6* a 25. Potrei aggiugnere che una differenza a un dipresso di questo genere trovò *Bergmann* istesso nel suo trappo, nata dal diverso modo d' analizzarlo;

impercioсchè col metodo docimastico trovò sol 010 di ferro, ove col bleu di Prussia ven trovò 025. Dirò per ultimo che lo stesso *Ruzieska* avvisommi di non aver potuti determinare con tutta la precisione i componenti del nostro trappo per mancanza degli opportuni stromenti e reagenti chimici; per la qual ragione non ha indicata la quantità dell' acido spatico della cui presenza lo ha convinto la corrosione del vaso di cristallo che adoperava.

13. Appare dunque essere il nostro sasso di quel genere di pietra, che oggi da Litologi chiamasi trappo. Ma che cosa è il trappo? e qual n' è l' origine. Prima di *Rinmann* che portò nella scienza il nome volgare de' mineralisti Svedesi, non distingueasi il trappo dal sasso corneo. Diffatti generalmente convengono al primo le proprietà del secondo, cioè l' omogeneità della pasta, l' odor d' argilla, la raschiatura bianca, la facil fusibilità, la frattura cubica o romboidale &c., e v' è pur oggi qualche Litologo che non distingue l' uno dall' altro. V' è fra questi il *Gioeni* (*a*), sebben note gli fossero le differenze che fra le succdette due pietre osservate avearo prima il *Ferrara*, e 'l *Kirwan*. Il primo, dopo d' aver notato che molte lave e basalti, prima che su di loro agisse il fuoco, erano sasso corneo o trappo, dice che l' uno dall' altro distinguesi per una piccola differenza nella proporzione de' principj costituenti, per la quale il secondo è più duro del primo; e per essa il fuoco volcanico agisce differentemente su loro facendo del sasso corneo una lava rigonfia, fragil, e giallastra, e del trappo una lava compatta. *Kirvan* poi, facendo d' amendue una più minuta analisi, trovò nel trappo i componenti conosciutivi da *Bergmann*; ma dal corneo ebbe Selce 037, argilla 022, terra calcare 002, magnesia 016, ferro 023; per la qual cosa classificò le pietre cornee nel genere argilloso, e i trappi nel siliceo.

14. Riguardo all' origin del trappo, par che risulti dal sin quì detto, ch' essa sia acquea anzichè ignea; ma la cosa non è sì chiara, che non abbia dato luogo a molte quistioni, e prodotte delle opinioni ben fra loro discordi. *Bergmann* era sì persuaso dover il trappo l' origin sua all'

(*a*) Saggio di Litologia Vesuviana pag. 100.

acqua, che, trovando dell' analogia fra i trappi e i basalti colonnari, inferinne essere pur questi d' origine acquea; ma per l' opposto un' origine decisamente volcanica al trappo diedero *Werner* (*a*), *Whitehurst* ed altri rammentati da *Faujas*, e dopo loro *Barral*. Egli crede sì dimostrata l' origine ignea de' filoni di trappo, che vedendo questo anche steso in ampj strati per un evidente deposizione delle acque, e non solo fra lo scisto, ma anche fra 'l granito, ciò non ostante non vuole ad altro attribuire l' origin sua che al fuoco. Vuol che i filoni di trappo siano le correnti di lava in istato naturale; che gli strati siano i detriti delle lave disfatte, strascinate dalle acque e stese sul piano, ove nuovo sasso cogli stessi componenti abbiano formato; e che i graniti medesimi altro non siano, che ceneri volcaniche indurite e cristallizzate per l' andar de' secoli, e per l' azione dell' acqua. Altri tennero una via di mezzo: *Da Camera*, e *Dolomieu* avean osservata tanta somiglianza anzi identità fra 'l trappo in istato naturale, e quello che l' azion del fuoco ha messo in istato di fusione, che dalla sola ispezione del sasso, senza esaminarne le località, vogliono non potersi mai ben giudicare se al fuoco debba l' origin sua o all' acqua. Il Cel. *Spallanzani* che con tanta sagacità pazienza e coraggio ha esaminati i Volcani delle due Sicilie, e d' altri paesi, e ne ha quindi esaminati i prodotti ne' Saggi seco trasportati a Pavia, appena fa qualche volta menzione del trappo, parlando sovente del sasso corneo; ed opina pur egli come i già lodati Naturalisti, che amendue fossero in origine di formazione acquea, ma che il fuoco abbiali frequentemente convertiti in lave, senza però molto alterarne i componenti. Il più volte lodato *Faujas* che ha fatte sul trappo più estese ed esatte ricerche d' ogni altro, asserisce d' avere costantemente veduto il trappo in tali circostanze da non poterlo creder mai opera del fuoco, e varj altri chiari Naturalisti rammenta, che la stessa opinione sostennero.

15. Or le circostanze ch' egli adduce, per escludere dal trappo la volcanizzazione, son quelle appunto nelle quali trovasi anche il nostro sasso: cioè di non avere a se

(*a*) Journ. de physiq. Tom. 38. p. 49.

vicino nessun prodotto decisamente volcanico; di non iscorgersi la menoma azione del fuoco nella pietra contigua, che per lo più è Scisto argilloso; di vedervi della pirite che al fuoco non avrebbe resistito, e delle vene di ferro e d' altri metalli, che sarebbonsi distrutti o alterati. Potrebbe far illusione il vedere il trappo in filoni; ma ciò non può quì dare argomento per crederlo opera del fuoco, poichè presso i filoni di trappo vi sono in più luoghi de' filoni di quarzo che certamente non sono materia volcanica. Già parlai di quello ch' è presso al ponte d' Uncio (*a*), e dell' altro che costeggia il filone A. Un' altro ven' è nel fiume non molto sotto il filone B. V' ha pur de' filoni di quarzo senza vicinanza di trappo in molti altri luoghi di que' contorni, e 'l curioso potrà vederne alcuni tagliare gli strati dello scisto all' Isola Bella. V' ha pure in quelle vicinanze de' filoni calcarei e metallici perpendicolari allo Scisto in cui stanno appunto come i filoni di trappo; e basterà quì indicare la cava del marmo della Candoglia destinato alla fabbrica del duomo di Milano, al quale sono uniti e paralleli de' bei filoni di miniera di ferro. Quindi appare non potersi dalla disposizione in filoni del nostro trappo trarre argomento per la sua volcaneità; tanto più che a questi non vanno mai unite quelle palle a strati concentrici, che presso ai filoni trappici di Corsica osservò il C. *Barral*.

16. Dopo d' avere esposto quanto ho potuto osservare sulla natura, le varietà, la situazione, e l' origine del nostro trappo, e 'l vantaggio che sen trae impiegandolo alla vetrificazione e alla manifattura delle bottiglie, mi resta ancora da riferire un curioso e vago fenomeno che quel vetro ha presentato dopo d' essere stato lungo tempo nella fornace. Il mentovato *Barral* dice con ragione, che per ben conoscere la natura d' una pietra conviene farne saggio non solo per la via umida, o in piccoli frammenti col tubo ferruminatorio, come far si suole, ma per mezzo d' un fuoco sotenuto e costante, affin d' imitare, per quanto è possibile, il fuoco de' Volcani. Diffatti *Spallanzani* ha esaminate al fuoco d'una fornace da vetrajo tutte le lave de' Volcani da lui osservati, e le pietre analoghe a quelle sulle quali il fuoco

---

(*a*) Vedi la nota (*a*) alla fine del num. 8.

ha agito, dal che ha ricavati de' nuovi ed importanti lumi sulla volcanizzazione. Questo esame del nostro trappo nella fornace si è pur da noi fatto per necessità della manifattura; con una differenza però, che, avendo egli esposte all' aria, con un passaggio più o men rapido, quelle sostanze, non ne ha ottenuti i risultati che si ebbero dal nostro trappo, nè ha potuta vedere la separazione, e la cristallizzazione de' componenti, siccome a me avvenne di vederla inaspettatamente.

17. Nelle vetraje, ove non si lavora che una parte dell' anno, è costume, al cessar del lavoro, di lasciare nelle padelle alcuni pollici di vetro; e chiudendo a muro tutte le aperture della fornace, togliere ogni accesso all' aria esterna, affinchè il caldo, anche a fuoco spento, vi si conservi lungo tempo. Il vetro resta così in uno stato di fusione e in un perfetto riposo, formando un desco che s' indura a poco a poco a misura che perde il calore. Quando è raffreddata la fornace si apre, si spezzano que' deschi colle padelle istesse inservibili a nuove fusioni, e 'l vetro si macina per servir di materiale e di fondente al nuovo lavoro. Così si fece nella fornace del C. Peretti. Dopo quindici giorni fu aperta; ma nello spezzare le padelle e i contenutivi deschi di vetro, videsi, non senza sorpresa dell' operajo, che alcuni di questi non erano già neri, ma d' un bellissimo azzurro sparso di stellette auree come un bel ciel notturno, ed altri erano d' un fondo verde cupo, sparsi di stelle bianche, o piuttosto di fiorellini, che al colore, alla lucentezza, e al gatteggiamento pareano di madreperla. Alcuni de' vetri, o a meglio dire degli smalti azzurri, non aveano stelle se non alla superficie: altri però (e quelli specialmente che per la molta materia lasciata nel crogiuolo, aveano nella superior parte qualche pollice di vetro nero) nell' azzurro, che stava inferiormente, mostravano le stelle sparse per tutta la sostanza; ma la maggior copia n' era al fondo, ove vedeansi confusamente ammassate. Le stelle color d' oro sono a punte acute divergenti per tutti i sensi, sicchè non mal somigliano allo spinoso frutto del castagno: se non che sovente i raggi son incurvati alla cima (Figura 1.). Nella figura 2 si hanno due raggi separati e molto ingranditi, uno diritto, e l' al-

tro curvo. Ve ne ha delle microscopiche specialmente alla superficie; ma internamente ve ne ha d' ogni grandezza da $\frac{1}{4}$ di linea sino a lin. $1\frac{1}{2}$ (a). Poco men grandi sono le stelle bianche del vetro verdognolo, nelle quali i raggi sono quasi acuti al centro, e troncati in cima (Fig. 3.), per la qual cosa hanno una certa somiglianza a que' fiori che i Botanici chiamano *radiati*. Quando i raggi son solitarj sono per lo più parallelepipedi (Fig. 4). La figura 5 rappresenta un gruppo di stelle bianche e raggi. Questi fiori sono sempre alla superficie, e di rado penetrano per qualche linea nel vetro; ma la porzione ch' è interna ha pur essa de' raggi in tutti i sensi. Oltre le stellette e i fiori vi sono a luogo a luogo de' piccioli dischi non radiati. Le stelle, ove si sono unite e conglobate nel fondo, percosse coll' acciaino danno molte scintille, e ne dà pure, ma difficilmente e poche, il vetro istesso, ch' è assai più duro del vetro comune, e può dirsi una porcellana di Reaumur. Di questo, sì stellato che fiorito, lavoransi al torno collo smeriglio scatole, anelli, e altri monili elegantissimi.

18. Poichè un simil fenomeno non s' era mai dianzi veduto nè nella fornace del C. Peretti, nè in altra che v' è pur ad Intra del C. Simonetta, sebbene talora vi si fosse trovata della pasta di vetro cerulea in fondo alle padelle, non si potè attribuire che al sasso per la prima volta adoperato in quella fornace. E poichè alcune padelle, pe' variati sperimenti e pe' residui d' un precedente vetro, aveano diversi componenti, a questi s' attribuì la differenza nella forma e nel colore delle stelle e de' vetri medesimi. Era facil cosa l' indovinare che pel riposo del vetro mantenuto in istato di fusione, ma senza la menoma agitazione le sostanze specificamente più grevi eransi portate al basso, che fra queste

(a) Nell' inverno del 1798 si fece maggior numero di bottiglie, onde il trappo rimase per tre mesi nelle padelle, sostituendo in queste nuovo materiale a proporzione del consumo. Alla fine si ebbe vetro azzurro stellato, ma confusissimamente, sicchè non s' ottenne quella vaghezza che se n' aspettava: Alcune stelle però solitarie e presso il fondo oltrepassavano le due linee. Se questa differenza debbasi alla prolungata fusione, ovvero all' aver cangiate le proporzioni nelle dosi, non saprei dirlo.

v' era il ferro, già trovato nel trappo, al quale doveasi il color azzurro; che le particelle della materia cristallizzabile sparse pel vetro, attraendosi reciprocamente, aveano formata quella cristallizzazione astriforme o fioriforme; ma qual materia sia quella io confesso di non saperlo. So esservi molte sostanze fossili che hanno la figura stellare; e sen può vedere l' enumerazione presso *Strave* nella Tavola XXI (*a*), oltre quelle che lo stesso Autore annovera fra le mine; ma la cristallizzazione loro non è punto opera del fuoco. Per questa ragione nulla dirò delle astroiti, specie di madrepore petrificate e non vitree; nè delle asterie, gemme che presentano una stella per effetto di riflessione e rifrazione della luce (*b*).

19. Mi era lusingato di trovare rammentate, analizzate, e spiegate dagli Scrittori che ci hanno dati degli estesi ragguagli sui prodotti volcanici delle cristallizzazioni analoghe; ma mi son trovato deluso. *Strange* nella sua lunga Memoria sui Volcani estinti dello Stato Veneto rammenta bensì degli ammassi o gruppi di colonne prismatico-basaltine convergenti tutte ad un centro (*c*): *Gioeni* nella Litologia Vesuviana fa menzione di globuli composti di raggi divergenti trovati ne' pori delle Lave (*d*): *Ferrara* nella Storia dell' Etna parla di globuli radiati come alcune zeoliti e dello spato calcare somigliante a ricci di castagne trovati in alcune Lave (*e*): di questi ne vidi pur io entro i vani della Lava porosa nel torrente che sovrasta a Roncà sul Veronese: *Spallanzani* osservò egli pure nelle Lave di Lipari delle piccole geodi di sottili fili di vetro lucidissime e

---

(*a*) Methode analytique des Fossiles.

(*b*) Ho veduto delle pseudo stellarie artefatte in qualche modo simili al nostro smalto azzurro, formate con una stelluzza di color d' oro fra un vetro azzurro e un cristallo di rocca, o altra pietra dura trasparente e limpida; attaccatavi e legata in modo che sembri una gemma sola. Così sapeasi nella manifattura de' mosaici de' tempi di mezzo mettere una foglia d' oro su un grosso vetro, e sovrappostavi una sottilissima lamina di cristallo, riporlo nella fornace perchè una leggiera fusione formasse un solo vetro aureo; e stellato, se alla foglia d' oro davasi la forma di stella.

(*c*) De' monti colonnari &c. §§. 6. 7.

(*d*) pag. 261.

(*e*) pag. 336.

trasparenti, e somiglianti in miniatura al riccio della castagna (*a*). Ma tutte queste cristallizzazioni, che ben possono per la figura rassomigliare alle nostre, non sono in una pasta vitrea, nè lavoro del fuoco. Il *Thompson* ha osservate nella solfatara di Pozzuolo delle stalattiti silicee or radiate, e or a rognoni; ma neppur quelle erano nel vetro, ed egli le attribuisce all' azione dell' acido sulfureo misto al vapore dell' acqua (*b*).

20. Un fenomeno più analogo al nostro, cioè delle stellette nel vetro, ben vide egli nell' esaminare gli effetti dell' eruzione vesuviana dell' anno 1794 alla Torre del Greco: osservò però che quello non era vetro volcanico, ma bensì vetro delle finestre di quella desolata città, il quale dalla Lava sovente era stato cangiato in porcellana di Reaumur; ed in essa eransi formate le cristallizzazioni astriformi. Simili stelluzze osservate pur aveva il testè nominato *Spallanzani* in un pezzo di vetro tratto da una fornace di calcina, ma non mai nelle Lave (*c*). Io ho alcuni frammenti di venturina fattizia con delle stelle, le quali però son dell' istessa pasta e colore, e non quali nel vetro nostro le veggiamo. Forse più somigliano a queste quelle che *Faujas* (a cui mandai de' frammenti de' nostri vetri stellati) mi scrive d' aver vedute in fondo a crogiuoli del vetro nero di Seve, se non che erano assai men belle e men pure. Ma certamente, se non simili in tutto, almeno molto analoghe alle nostre erano le cristallizzazioni del vetro osservate dal *Keir*, e da lui presentate alla Soc. R. di Londra (*d*). Trovaronsi al fondo di crogiuoli, in paste di vetro destinate a bottiglie nere, e divenute azzurre; se non che, per dare il colore al vetro, erasi adoperata scoria di ferro anzichè trappo. La differenza in questo ingrediente avea senza dubbio prodotta la diversità nelle cristallizzazioni; poichè le sue erano corpicelli bianchi ovali a sei coste dalle quali partivano sei raggi, (o piuttosto *tramezzi* simili a quei che dividono in più *loculamenti* la *capsula* d' un frut-

(*a*) Viaggio alle due Sicilie Tom. II. p. 317.

(*b*) Nuovo Gior. d' Agricoltura Tom. VIII. num. 6. 7.

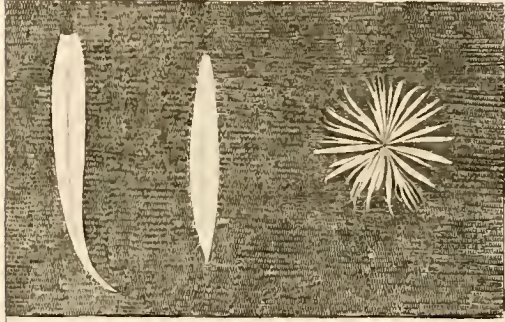
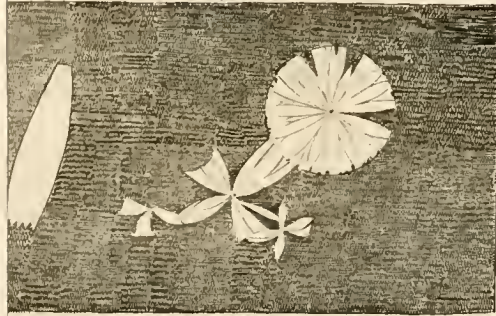
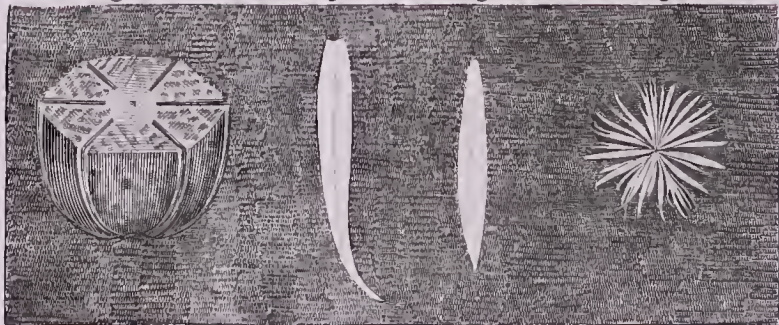
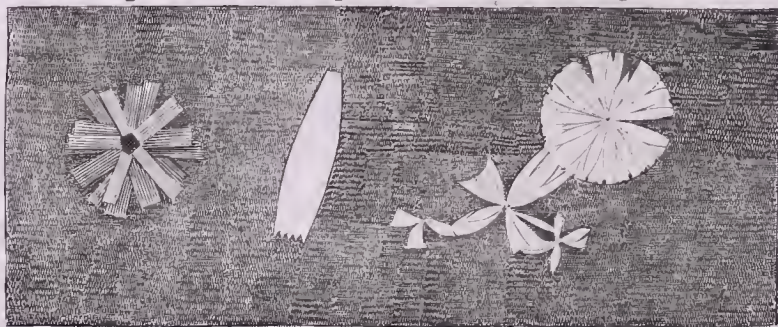
(*c*) Loc. cit pag. 248.

(*d*) Philos. Trans. for year 1776. pag. 530.

frutto) tendenti al centro, ove pur erano de' filetti incrociati. Tai corpicelli aveano poco più di $\frac{1}{2}$ linea di diametro. Vedi la fig. *6.*, ove rappresentasi tagliata pel minor diametro una di queste cristallizzazioni. Un' altra cristallizzazione, ch' egli chiama a raggj di ruota, v' ha pur veduta, che ha molta somiglianza a quella ch' io chiamai fioriforme. Vedi la fig. 7. Amendue le figure, come ognun vede son grandemente accresciute; non oltrepassando in natura $\frac{1}{20}$ di poll. ingl.

21. Come le stellette siansi nel nostro vetro formate, nol so. Molti opinano che la sola perdita del calorico, ossia delle particelle calorifiche, produca la cristallizzazione, come secondo *Mairan* la produce nella neve e nella brina. Diffatti anche le sostanze metalliche sovente si cristallizzano raffreddandosi. Io ho un quarto di palla di cannone, spaccatosi percotendo la casa ch' io abito nell' assedio del castello del *1796*, la quale in tutto il contorno per quattro linee è formata di raggj convergenti al centro, e nel resto è granita come l' acciajo. Ma queste cristallizzazioni, omogenee della pasta in cui trovansi, non devono paragonarsi alle nostre. Il *Keir* s' argomenta di spiegare le cristallizzazioni, che nel suo vetro cangiaron colore come nel nostro, col dire che la semplice cristallizzazione produce il bianco, come vedesi nella porcellana di Reaumur, la quale altro non è che vetro cristallizzato per la continuata azione del fuoco, e imbiancatosi per la nuova disposizione delle parti, che tolsegli la diafaneità; ma il fenomeno della porcellana di Reaumur è ben diverso da quello delle nostre cristallizzazioni sì per la forma che pel colore. Bella trovo l' osservazione del *Keir* intorno al condensamento, e quindi all' accresciuto peso specifico delle parti cristallizzate; poichè laddove il semplice vetro era all' acqua come *1662* a 1000. il vetro cristallizzato divenne come *1676* a 1000. Rendesi così ragione perchè la maggior parte delle nostre stellette gialle siansi accumulate al fondo del vetro; ma al tempo stesso dimostrasi che le stelle bianche, poste sempre alla superficie del vetro nero che più leggiero è

dell' azzurro, non sono una semplice cristallizzazione del vetro, ma una sostanza diversa da quella delle stelle gialle, e per se stessa più leggiera, poichè la densità acquistata dalla cristallizzazione non bastò a farla precipitare.

22. Non tacerò per ultimo che qualche Fisico uso ad osservare i fenomeni elettrici trovar potrebbe dell' analogia fra gli effetti dell' elettricità e quello che vedesi nel nostro vetro, ove notai esservi, oltre le stelle, de' piccoli dischi non radiati (num. 16). Imperciocchè gettando della polvere metallica su un piatto resinoso, che venga in seguito caricato d' elettricità positiva, la polvere prende la forma stellare, e i raggj ne sono sempre a sei a sei, numero non ben determinabile nelle stellette nostre, ma evidente nella cristallizzazione di *Keir*. Se il piatto venga caricato d' elettricità negativa la polvere prende la forma d' un disco. Ma ognun vede che belle analogie son queste anzichè spiegazioni del fenomeno, che a me basta d' aver narrato.

Soc. Ital. Tom. VIII. p 434

Tav. XIII — *Soc. Ital. Tom. VIII. p 434*

DELLE ASTE RITROMETRICHE, E DI UN NUOVO PENDOLO PER TROVARE LA SCALA DELLE VELOCITA' DI UN' ACQUA CORRENTE.

DI TEODORO BONATI.

Ricevuta li 19 Nevoso An. VII. (8 Gennajo 1799)

SE ad un' Asta AC (fig. 1.) di legno più leggiero dell' acqua si aggiunga una tal porzione CB di metallo, che mettendo tutta l' asta in una acqua stagnante essa galleggi con una porzione AD di un piede o più, fuori dell' acqua ed a piombo, si avrà una delle *Aste ritrometriche* da me proposte nel 1784. in questa Raccolta per iscoprire le velocità sotto la superficie dell' acqua nei fiumi. Mostrai, che se la stess' asta AB (fig. 2.) messa in un' acqua corrente da M verso N verrà portata colla porzione AD inclinata all' avanti, la velocità maggiore starà alla superficie; e che si avrà il contrario se la parte AD penderà all' indietro.

Mi avanzai ancora a mostrare come colle medesime aste si potrebbe trovare la Scala delle velocità, ossia la legge, colla quale le velocità crescono, o decrescono dalla superficie sino al fondo. Il mio calcolo suppone tra le altre cose, che sia dato l' angolo ADE d' inclinazione dell' asta.

Di queste aste vedo, che ne parla il P. Ferrari Bernabita nella settima delle sue Dissertazioni Idrauliche date alla luce l' anno scorso 1797. in Milano. Egli conviene, che possano indicare se la velocità sia maggiore in superficie, o sotto. Ma disconviene, che si possa colle medesime rinvenire la Scala delle velocità. La difficultà sua riguarda non i miei raziocinj, nè i miei calcoli, ma l' esecuzione, anzi una parte soltanto della esecuzione, cioè dove si tratta di misurare l' angolo d' inclinazione dell' asta, parendogli questa una cosa praticamente impossibile.

E penetrato dal vantaggio, che ne verrebbe alla Scienza delle acque se si arrivasse al conseguimento di questa Scala si è studiato di supplire al concepito difetto delle

mie aste indagando un altro stromento atto all' intento; e persuaso di averlo trovato lo propone.

Cercherò di spianare prima le difficultà dell'Autore contro le mie aste per poi passare all' esame del suo strumento da esso chiamato *Nuovo Pendolo*.

Trova l'Autore una certa analogia tra le sperienze fatte in passato colla *Palla a pendolo*, e le fatte da me colle aste ritrometriche. Le prime si facevano con una palla P (fig. 3.) attaccata a un filo CYP fermato in un punto C, ed immersa sotto la superficie XZ di un' acqua corrente da X verso Z. Dall' angolo XCY di deviazione del filo CY fuori dell' acqua dalla verticale CX si pretendeva di poter dedurre la velocità dell' acqua nel sito P della palla sotto la superficie XZ (*). Il Ferrari la discorre così.

Nel caso delle palle a pendolo l' osservatore sta a piè fermo, e può notare da vicino, e con agio, l' angolo XCY, o sia ACD sul Quadrante graduato; dovechè nello sperimento dell' asta l' osservatore dee dar giudizio dell' angolo ADE (fig. 2.) senza l' ajuto del Quadrante, e per via d' una semplice estimazione oculare stando sulla sponda del fiume, e per ciò di lontano, ed in uno stato di agitazione per dover seguitare l' asta camminando con un passo ora più, ed ora meno celere.

In secondo luogo il filo della palla pende da un punto fisso C, ed il piano del Quadrante impedisce in parte i movimenti laterali del filo; dovechè l' asta si trova tutta libera in mezzo alle perpetue agitazioni dell' acqua corrente, cosicchè s' inclina ora alla destra, ed ora alla sinistra.

Ma nello sperimento della palla a pendolo si stenta non poco a decidere quale sia il vero angolo di deviazione del filo. Dunque attesi tutti gli svantaggi quì sopra notati nel caso delle aste molto più si deve penare per dire il vero loro angolo d' inclinazione.

Nè gioverebbe (siegue l' A.) che le aste venissero osservate da uno, che le accompagnasse in un battello, perchè anche così manca tuttavia il Quadrante, nè l' osservatore può accostarsi bene alle aste per non perturbare cogli ondeggiamenti del battello i movimenti naturali delle aste.

(*) Queste sperienze sono state da me dimostrate fallacissime.

Rispondo. Nel caso della palla a pendolo la difficultà in fissare l' angolo di deviazione del filo deriva da un' oscillazione, che si osserva nel filo stesso più, e meno forte secondo ch' è maggiore, o minore il contrasto, che fanno il filo, e la palla all' acqua, che urta l' uno, e l' altra con tutta la sua velocità. Ma questo contrasto non può trovarsi nel caso delle aste, perchè queste vanno a seconda dell' acqua. Nè è vero, che in un tratto regolare di un fiume, quale io propongo per tali sperimenti, l' asta soggiaccia a quelle agitazioni, ed a quelle inclinazioni a destra ed a sinistra, che teme l' autore. Se l' alveo è sufficientemente regolare anche il corso dell' acqua è regolare, e le aste vanno di un passo sì equabile e regolare, che non son troppo lontano dal dire, che vi si potesse applicare con buon successo un qualche Quadrante con un indice leggiero.

Si rifletta però, che il Quadrante non è poi quella tal cosa, che senza di esso non s' abbia a poter avere l' angolo ADE (fig. 2.) Basta avere la lunghezza AD della porzione dell' asta fuori dell' acqua, e la verticale AE, il che si ottiene accostandovisi con un battello senza toccare l' asta; e da chi abbia un poco di destrezza questo si può eseguire ottimamente senza gli ondeggiamenti temuti, e con della precisione; giacchè avendo allora il battello, e l' asta una velocità poco diversa da quella dell' acqua sarà come se si operasse in un' acqua quasi stagnante.

Tanto io propongo trattandosi di fiumi navigabili almeno a seconda dell' acqua; perchè nel caso di un torrente in piena già io avea detto nella mia Memoria (n. 100) che conviene *contentarsi di osservare l' angolo di ogni asta all' ingrosso stando sulla ripa, al più coll' occhio armato* per avere una scala delle velocità di qualche approssimazione, il che pure potrebbe dare dei lumi non disprezzabili.

E mi giova il ripetere quì quanto dissi al n. 90. nella stessa Memoria dopo di avere mostrato, che qualora la Scala delle velocità fosse una retta, la velocità dell' asta sarebbe esattamente la media delle velocità dell' acqua fin dove arriva l' asta; e che essendo la detta scala una curva, la velocità dell' asta s' accosta bene alla media dell' acqua. Conclusi adunque, che „ quando non si cerchi la scala

„ delle velocità, ma soltanto la portata di una verticale IS',
„ e che non si curi di aver questa con tutto il rigore (il
„ quale in molti casi è superfluo) si potrà ottenere l' in-
„ tento a sufficienza (ed al certo cento volte meglio, che
„ con qualunque degli altri metodi finora proposti) stando
„ all' ipotesi, che le velocità terminino ad una retta, co-
„ me al n. 71. Ed in questo caso si declina dal fastidio di
„ quei calcoli prolissi, che occorrono nelle ipotesi, che la
„ scala delle velocità sia una qualche curva, e l' angolo
„ dell' inclinazione dell' asta (ch' è il più difficile da rileva-
„ re) in questo caso basterà, che si abbia affatto all' in-
„ grosso per poter dedurre da esso la Cq, la quale con
„ tre, o quattro gradi di più o di meno riesce sensibil-
„ mente la medesima. =

Per ultimo l' Autore mi vien contro dicendo, che anche secondo me è necessario, *che per mezzo di replicate sperienze fatte con altri stromenti conoscasi prima la legge universale, con cui le velocità delle acque correnti vanno decrescendo dalla superficie al fondo* = Ho detto bensì di desiderare, *che altri ancora si occupino in esperimenti di questa natura*, come desidererei, che se ne occupasse anche il Ferrari; ma non ho detto mai, che di *sperienze fatte con altri stromenti* io ne abbia una necessità, perchè intendo, che colle sole mie aste si possa ottenere l' intento cento volte più, che con altri stromenti dei proposti.

Per le cose dette fin quì parmi di poter continuare nel sentimento, che le mie aste sieno benissimo atte a scoprirci la più volte nominata scala delle velocità dell' acqua, che passa per una verticale dalla superficie al fondo in un fiume.

Ora passerò ad esaminare se per lo stesso intento possa servire egualmente, o anzi meglio (il che è sempre desiderabile) il nuovo stromento proposto dallo stesso Ferrari.

Consiste questo in un pendolo, o sia in un filo AB (fig. 4) attaccato a un punto fisso A fuori dell' acqua, e che sostiene un cilindro BC più pesante dell' acqua, immerso sotto la superficie DV di un' acqua corrente da D verso V, e che tiene il pendolo deviato dal perpendicolo AD. Prescrive l' Autore, che l' estremo superiore

B stia sempre appena sotto la superficie DV dell' acqua, il che si ottiene allungando, ed accorciando opportunamente il filo AB.

Questo cilindro BC si dee poter fare lungo, e corto a piacere, perchè dev' essere composto di più cilindri piccoli, tutti eguali tanto nella lunghezza che nel peso, che devono potersi unire e disunire quando si voglia.

Comincia una sperienza con un solo dei cilindri piccoli CF (fig. 5) lungo per esempio mezzo piede, e nota l' angolo BAC. Indi aggiunge un altro cilindro KG. Nel caso, che la velocità dell' acqua dalla superficie in giù si conservi la stessa, mostra l' Autore che il filo resterà in AC, e che se la velocità dalla superficie al fondo sarà crescente il filo passerà come in AD. In quest' ultimo caso nota l' altr' angolo BAD. Indi aggiunto un nuovo cilindro OP nota il terz' angolo BAE; e così di seguito.

Con questi angoli, e col sapere il peso di ogni cilindro, e quello di un egual volume di acqua, calcolando trova delle formole di velocità, una per l' acqua, che va contro il cilindro CF, un' altra per l' acqua, che dee investire il cilindro KG, un' altra per l' acqua del cilindro OP, ec.

Egli è questo in sostanza ciò, che ci ha detto l'Autore, che intendeva di darci la maniera di conoscere *la scala delle velocità in tutta un' intiera sezione di un fiume, che a molta profondità si estenda*. (n. 74.)

Era molto desiderabile (pare a me), che l' Autore ci avesse aggiunto qualche altra cosa intorno all' esecuzione delle sperienze proposteci. Se la sezione è molto profonda, come ottenere un punto fisso A nel filone, per esempio, del Po in piena? Non in altra maniera al certo, che in una barca ancorata. Se questa è piccola sarà troppo agitata pel fiero contrasto, che dovranno fare e la fune, che tiene la barca all' ancora, e la barca stessa contro il corso violento dell' acqua. O la barca è delle grandi, ed allora farà un alterazione grande al circostante corso dell' acqua, e quantunque la barca stasse in una sufficente quiete lo sperimento sarà sempre troppo sospetto perchè non fatto in un corso naturale al fiume. Quello stesso Ferrari, che non sa sofferire i piccolissimi ondeggiamenti di un battello, che va

a seconda dell' acqua presso una mia asta, quì con tanta indifferenza passa sopra a sì notabili alterazioni di corso, sia che si faccia uso pel suo pendolo di una barca piccola, o di una grande?

Non dirò del tempo lungo per le operazioni necessarie in una intiera sezione. A una sola stazione accaderebbe di dover allungare il cilindro fino ai venti, e venticinque piedi. Essendo il cilindro composto di tanti cilindri di mezzo piede l' uno, come pensa l' Autore, vi vorrebbero quaranta e cinquanta osservazioni per notare la deviazione del filo a ogni giunta dei piccoli cilindri.

Altre cose potrei quì aggiungere, ma troppo è da vedersi quanto reggano le formole delle velocità dall' Autore stabilite tutte col supposto, che tutti i cilindri CF, DG, EP, ec. nel loro stato di quiete (se pure siano per ridursi a una sufficiente quiete) si abbiano a comporre sempre nella direzione del filo. *La deviazion* (dice l'Autore al n. 75) *del filo non sarà forse quella stessa del cilindro urtato?* Cosicchè ogni qualvolta che sia nota dalla sperienza la deviazione del filo egli ha contato per nota anche quella del cilindro.

Nel caso delle velocità eguali la proposizione è vera. Ma la ricerca della Scala delle velocità suppone, che queste siano difformi, come se saranno crescenti, o decrescenti, ed in questi casi mostrerò, che il cilindro non può ridursi a una quiete se non facendo un angolo col filo, cosicchè la deviazione del filo osservata fuori dell' acqua non è altrimenti quella del cilindro sott' acqua.

In fatti sia ABC un nuovo pendolo, e sia L il punto di mezzo del cilindro. Una verticale LO esprima il peso del cilindro nell' acqua, che è l' eccesso del peso assoluto del cilindro sopra quello di un egual volume di acqua. Il rettangolo MN mostra, che il peso LO equivale alle due forze LM, LN. Inoltre sia FH quella impressione, che farebbe un velo sottilissimo EH dell' acqua se questa correndo incontrasse in H il cilindro BC in una positura verticale. Il rettangolo GI fa vedere, che lo stesso velo fa al cilindro attualmente inclinato una impressione, che equivale alle due IH, GH, delle quali l' ultima è inoperosa perchè come di un' acqua che strisciasse lungo il cilindro; cosicchè

chè la FH rapporto al cilindro equivale a una sola impressione IH normale al cilindro. Lo stesso si dica di tutti gli altri veli egualmente sottili, e componenti tutta l' acqua dell' altezza DS, e che va ad incontrare il cilindro BC.

Se la velocità di ogni velo EH da D sino in S sarà la stessa, tutte le impressioni IH saranno eguali; E perchè inoltre sono egualmente distribuite lungo il cilindro BC, il centro di tali impressioni caderà nel punto L di mezzo del cilindro, e tutte insieme equivaleranno a una sola forza applicata in L, come la LK normale al cilindro.

Ma se le velocità degl' indicati veli scostandosi dalla superficie variassero o crescendo o decrescendo, il centro delle impressioni nel primo caso caderebbe sotto L, come in P, e nel secondo caso caderebbe sopra L, come in Q; cosa manifesta, ma sfuggita all' Autore, il quale al n. 79, nel tempo stesso che suppone le velocità crescenti, mette che il centro delle loro impressioni cada *nel mezzo dei cilindri*.

Nel primo caso, cioè delle velocità eguali, va bene il dire, che ridotto il cilindro alla quiete debba questo trovarsi nella direzione del filo, perchè si vede come le forze, che lo agitano possano allor equilibrarsi. Basta, che l'angolo DAC sia tale, onde risultino tutte le IH, o sia la LK, eguale alla contraria LM, giacchè l' altra forza LN trova sempre il suo equilibrio nella tensione BT del filo.

Ma se passeremo al caso delle velocità crescenti dalla superficie in giù, le impressioni IH allora crescenti, invece della LK, somministreranno una loro equivalente P*k*, la quale perchè applicata a un punto diverso dal punto L, da se sola non potrà, come la LK, fare equilibrio colla LM, e tutte e due insieme le P*k*, LM tenderanno a spostare il cilindro dalla direzione del filo, e cagioneranno in B un angolo del cilindro col filo, come si vede nella fig. 7.

Per esprimere l' equilibrio tra tutte le forze, che ora agitano il cilindro ridotto in questo caso alla quiete, convien prolungare la CB verso Q. Il rettangolo QR mostra, che la tensione BT del filo equivale alle due forze BQ, BR: e qualora si veda il cilindro ridotto alla quiete, si potrà concludere in primo luogo; che la forza LN sia eguale alla contraria BQ; ed in secondo luogo, che vi sia equili-

brio ancora fra le tre forze PK, LM, BR, il che richiede 1.° che le due cospiranti PK, BR siano insieme eguali alla contraria LM, e 2.° che sia LB : LP : : PK : BR.

Nel terzo caso poi delle velocità decrescenti, con un discorso simile al fatto quì sopra si trova, che il cilindro non si ridurrà ad esser quieto se non facendo col filo un angolo AB*c* contrario all' angolo ABC, cosicchè come nel caso precedente la deviazione del cilindro era maggiore di quella del filo, in questo caso è la deviazione del filo, ch' è maggiore di quella del cilindro.

Dunque le sperienze col nuovo pendolo non ci danno la deviazione del cilindro, ed in conseguenza non ci danno l' angolo d' incidenza dell' acqua nel cilindro, come sarebbe l' angolo EHB. Ma le formole dell' Autore involvono il seno *a* del detto angolo d' incidenza. Dunque involvono un elemento a noi incognito, e perciò sono inutili.

Per poter avere dalla sperienza anche la deviazione del cilindro urtato dall' acqua vi sarebbe il ripiego di abbandonare il filo, e fare, che il cilindro arrivasse fino al punto di sospensione A. Allora sì, che la deviazione della parte sott' acqua sarebbe nota, perchè eguale a quella della parte AB osservata fuori dell' acqua. Ma non per questo si ripiegherebbe a tutto. Vi sarebbe da introdurre nella formola il peso della parte AB del cilindro; e vi sarebbe da correggere l' errore commesso col supporre i centri delle impressioni dell' acqua ai punti di mezzo dei cilindri urtati. Nè io vedo, che tai centri si potessero trovare senza avere la scala delle velocità, ch' è quella, che si cerca.

Riflettendo pertanto sì a queste difficultà, che alle sovraccennate risguardanti l' esecuzione, credo di dovermi attenere (finchè altro non comparisca) alle aste ritrometriche, e di non occuparmi male a proposito se mi studierò di agevolarne l' uso; al qual fine prima di terminare verrò esponendo alcune poche cose.

Alla fine della mia Memoria 1784 suggerii, che per trovare la portata di un fiume si cercasse un tratto dei più regolari, e che di questo si scegliessero 200 tese, o più; e che si facessero tre sezioni, una al mezzo, ed una a ogni estremo delle 200 tese.

Avendo fatto dopo più riflessioni mi sono indotto a

credere, che possa bastare una lunghezza di 60 tese, ed una sezione sola, e questa al punto di mezzo. Così sarà più facile l' incontrarsi in un corso uniforme; quei, che dovranno agire saranno più a portata d' intendersela fra di loro; il viaggio d' ogni asta importerà un tempo minore; e rincrescerà meno se converrà ripetere qualche operazione non riuscita a dovere.

Una cosa potea essere imbarazzante, cioè il sapere il punto della sezione, pel quale passa l' asta portata dall' acqua. Per questo ho immaginato la maniera seguente, che mi pare delle più semplici.

Siano AB (fig. 8) la sponda destra, e DF la sinistra del tratto scelto, e la sezione sia stata fatta in CE. Normalmente alla CE sia misurata sulla sponda destra una linea retta ACB lunga da C in B 30 tese, e di altrettanto da C in A. Sulla sponda sinistra si mettano tre scopi, uno in E, ed altri due in D, ed in F, che cadano nelle visuali AD, BF normali alla AB. S' intendano altre due visuali AF, BD. Colla Tavoletta Pretoriana, o in qualche altra maniera, si misurino le AD, DF. Non importa, che queste sieno eguali.

Preparate così le cose, e collocati tre osservatori ai punti A, C, B, venga da G un' asta portata dall' acqua per una linea retta GHM, e gli osservatori diano il segno dell' arrivo dell' asta ai punti H, I, K, L, M, e con un orologio a secondi, o con un pendolo a secondi, oppure a semi-secondi, si notino i tempi impiegati dall' asta da H in I, da I in K, ec. Se si vedrà che i tempi per HK, e per KM sieno stati eguali, si potrà concludere, che la velocità dell' asta sia stata uniforme. E volendo supporre la GM parallela alla AB il viaggio HM sarà noto perchè = AB, e perciò sarà nota la velocità dell' asta.

Per avere il punto K della sezione CE, o sia per avere la distanza KC, s' intenda condotta la IN normale alla AB. Sarà AN = HI. E facendo come il tempo per HM al tempo per HI : : HM : HI : : AB : AN, si potrà avere la AN. E per essere AB : BF : : AN : NI, si avrà la IN = KC.

Che se si temesse del parallelismo della GM colla AB (come non v' è nella fig. 9), s' intenda condotta anche la LO normale alla AB. Posta la equabilità del moto

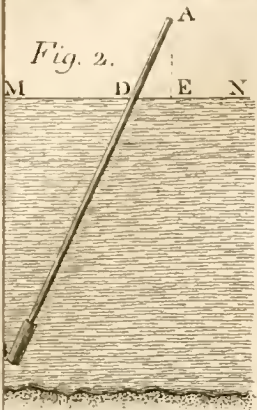
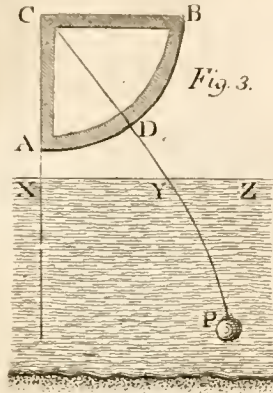
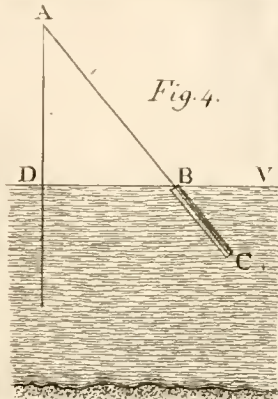
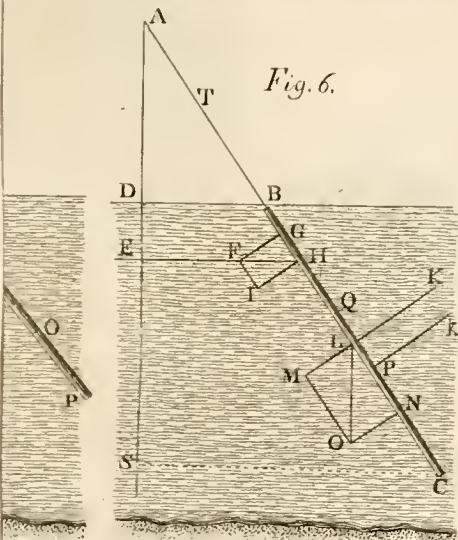
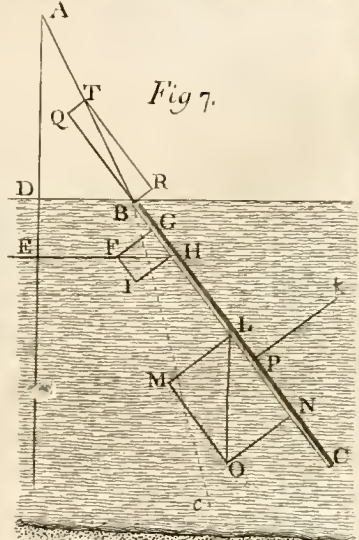
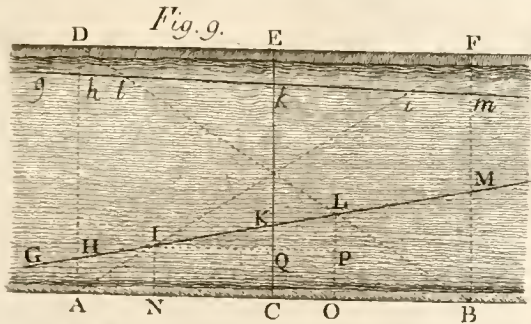
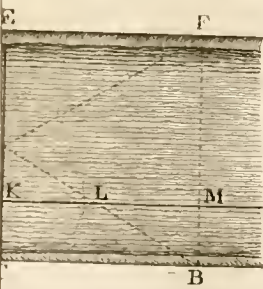
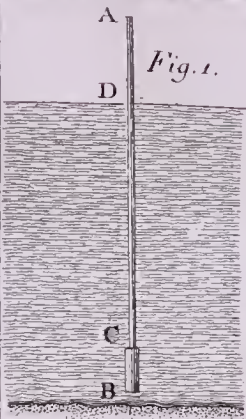
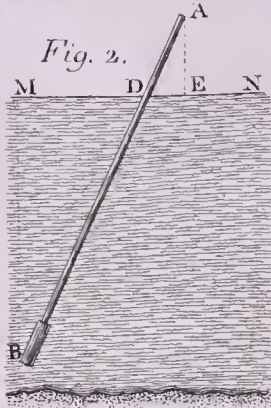
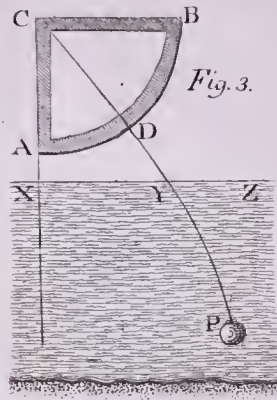
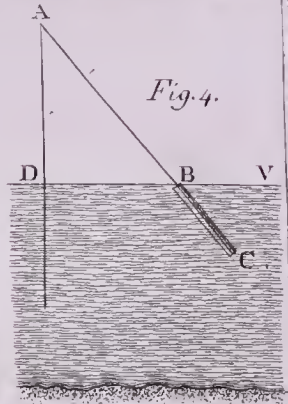
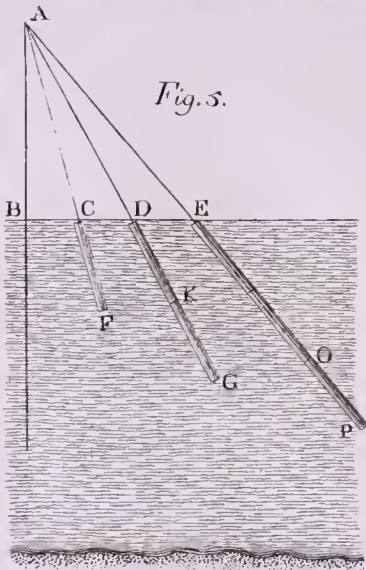
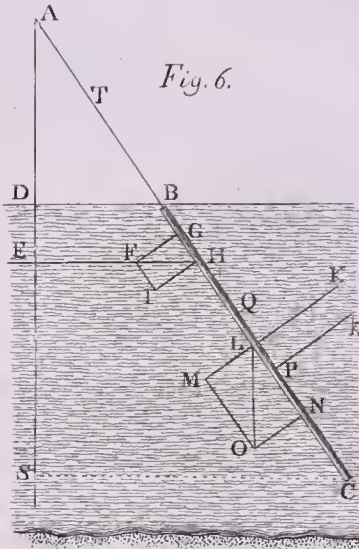
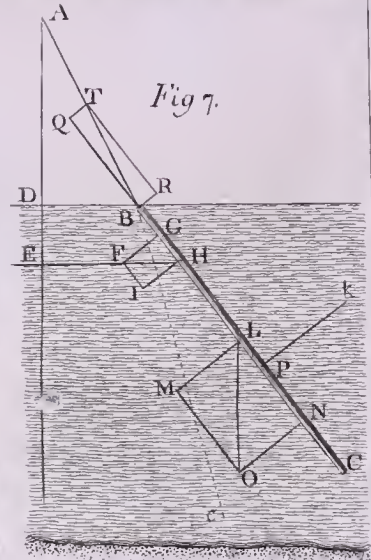
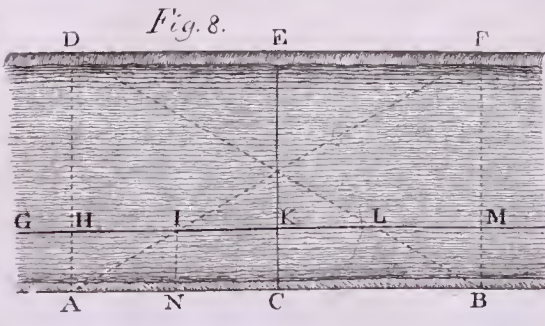
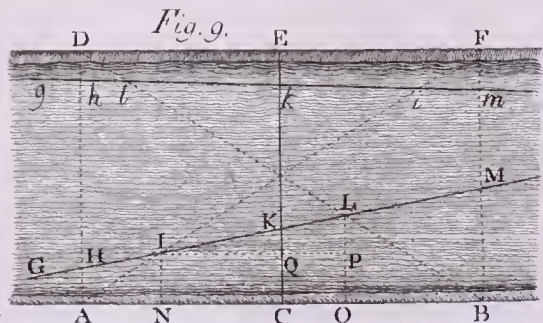
dell'asta, saranno come i tempi notati così le HI, IK, KL, LM, e così pure le AN, NC, CO, OB, onde anche di queste ultime linee rette si possono avere le misure.

E perchè AB : BF : : AN : NI, e BA : AD : : BO : OL, si avranno anche le NI, OL; e condotta la IP parallela alla AB si avrà IP = NO; PL = LO — IN; $LI = \sqrt{(IP^2 + PL^2)}$; e perchè IP : IL : : AB : HM si avrà ancora la HM, spazio scorso nel tempo notato. Dunque la velocità dell' asta sarà nota.

Resta da trovare la distanza CK. Poichè NO : NC : : IP : IQ : : PL : QK si avrà la QK, che aggiunta alla OP (= IN) darà la KC.

Ed ecco trovato il punto K del passaggio dell' asta per la sezione CE, e con quale velocità vi è passata.

Quindi si vede come convenga operare nel caso di qualunque altr' asta, che viaggiasse per altra linea, come per *ghlkim*.

Per le aste più vicine alla sponda sinistra potrebbe tornare meglio il passare alla sinistra, come nel Po, attesa la sua larghezza. Nel resto mi riporto a quanto ho detto nella citata Memoria 1784, che fu ristampata in Pavia nel 1785.

G. Gajani sc.

CONGETTURE
INTORNO ALLE CAGIONI DEL VARIO COLORE DEGLI AFRICANI, E DI ALTRI POPOLI; E SULLA PRIMA ORIGINE DI QUESTI.

Di Leopoldo M. A. Caldani.

Ricevuta li 28. Piovoso An. VII. (16. Febbrajo 1799.)

1. NEl terzo Volume dei Saggi Scientifici dell' Accademia di Padova leggesi una lettera del fu mio illustre Amico Carlo Bonnet di Ginevra. Era quella una risposta relativa ad una mia idea o piuttosto congettura, intorno alla cagione più prossima del color negro degli Etiopi; colore che si sa avere la sua sede sotto la cuticola, in quella mucosità, la quale, per una falsa apparenza di rete e pel suo inventore, viene chiamata dagli Anatomici *Reticolo Malpighiano*. Volendo però io oggi ritornare alquanto più estesamente sull' argomento medesimo, mi si rende necessario il richiamare alla memoria e quella mia congettura, e la risposta di quel mio celebratissimo Amico.

2. L' umor prolifico, io gli scrissi, del cavallo e dell' asino produce diverse spezie di alterazione nel germe dell' asina e della cavalla. Consiste spezialmente questa alterazione (almeno ne' muli più comuni) in uno sviluppo maggiore delle orecchie, minore ne' peli o crini della coda, e nella fabbrica della Laringe; la quale è precisamente la stessa che quella dell' asino. Perchè dunque, io soggiunsi, lo sperma parimente del Moro e dell' Europeo, non si dirà che possa produrre una qualche alterazione nel germe della Bianca o della Negra reciprocamente? Ma qual esser potrebbe questa alterazione? Un cangiamento d' inflessione e distribuzione ne' vasellini della cute: in forza del quale separassero questi canaletti un fluido atto a presentarci un color nero colle sue varie degradazioni insino al fosco; ad ingrossare o assottigliare le labbra; a sviluppare una minutissima lanuggine, o ad impedirne o almeno scemarne lo sviluppo; ad accorciare ed arricciare i capelli, ovvero ad

allungarli e stenderli, secondo che succede l'accoppiamento fra una Mora ed un Bianco, o fra una Bianca ed un Moro: sembrando certo che li figlj partecipano più della Madre che del Padre; siccome è dimostrato che la nutrizione e lo sviluppo delle parti indicate appartiene ai vasellini che proprj sono della cute.

3. A confermare questa mia congettura, la quale fa dipendere la nerezza o altro colore della cute dalla particolare inflessione o distribuzione de' vasi cutanei, concorre l'osservazione delle macchie diverse che occupano la pelle di alcuni, e che il volgo crede essere effetti di voglie, le quali tormentarono la fantasia della Donna in tempo di gravidanza; e vi concorre inoltre quella del color diverso che presentano i varj umori separati da diverse parti del corpo animale. Chiunque anatomizzi quelle macchie troverà che sono prodotte per la massima parte da una particolar distribuzione di vasi cutanei, spesso numerosissimi, e stranamente fra di loro intrecciati: siccome chiunque si mette ad investigare minutamente la fabbrica dei tanti organi secretorj del corpo animale, che tutti somministrano liquidi di color diverso, vede palesemente dissimile la distribuzione de' canali, che que' tali organi compongono. Se dunque da un vario serpeggiamento di vasellini pare che dipenda in gran parte il color diverso de' fluidi separati, da una eguale cagione dovrebbe dipendere il color negro del reticolo Malpighiano ne'Mori: e siccome l' umor prolifico di alcuni animali, sparso sul germe di altri animali affini, e stimola e nutre e modifica diversamente alcune parti; così pare che anche quello del Negro o del Bianco, fecondando il germe della Bianca o della Negra reciprocamente, possa modificare per diversa guisa ed alterare la primitiva distribuzione de' vasellini spettanti alla cute del germe che fecondano.

4. Terminai questa lettera pregando l'Amico di riflettere maturamente su di questa mia qualunque idea, e dirmene con piena libertà il proprio parere; il quale, come può vedersi per ognuno nel citato terzo Volume de' nostri Saggi fu tale che approvò pienamente la proposta mia congettura; a cui, per confessare la verità, mi spinse la diversità de' colori che sono proprj specialmente degli Abitatori dell'America meridionale, secondo che ancora me ne assi-

curò un saggio Religioso Exgesuita, Francesco Berengher, che visse per molt' anni fra quelle genti, e ch' io ebbi occasione di curare quì in Padova sono circa dieciotto anni. E perchè volle Egli significarmi ancora la cagione universalmente colà adottata di que' colori diversi, così io lo pregai di ciò fare in iscritto: ed ecco quì appresso quanto ebbi da lui su questo proposito, unitamente alle immagini di alcuni di quegl' Individui, le quali aggiungo a questa Memoria, perchè possano essere da ognuno considerate.

5. ,, La varietà de' colori ,, scrisse il suddetto Berengher ,, negli Americani procede da tre generazioni di-
,, stinte, le quali esistono in que' luoghi; cioè dai Bianchi,
,, dai Negri, e dagli Olivastri che sono naturali del Paese.
,, Deve prima supporsi che ciascuno di quegl' Individui
,, possegga nella sua perfezione, ossia sino all' ottavo gra-
,, do, il suo proprio e particolar colore; e parimente che
,, nella generazione ciascuno dei due genitori, cioè ma-
,, schio e femmina, comunichi ai figliuoli la mezza parte del
,, color suo. Per esempio, un Bianco, che prende in mo-
,, glie un' Inda Olivastra, degli otto gradi che ha di bianco
,, quattro ne dà al figlio suo; ed altrettanti gradi di oliva-
,, stro vengono dall' Inda madre, degli otto che possiede.
,, Quindi il figlio, per la perfetta mescolanza ad ugual por-
,, zione di questi due colori, chiamasi *Misto* o *Mestizzo*.
,, Se questi si unisce a moglie Bianca, tutti e due li geni-
,, tori fanno parte della metà del loro colore al prodotto
,, che dalla loro unione deriva; e come il maschio ha quat-
,, tro gradi di bianco, e quatro di olivastro, la sua metà,
,, per la perfetta mescolanza, sarà due gradi di bianco e
,, due di olivastro; e quattro gradi di bianco darà la ma-
,, dre che ne ha otto uguali. Ma quattro gradi di bianco
,, somministrati dalla madre, e due di bianco con altrettan-
,, ti d' olivastro dal padre, fanno la somma di gradi sei di
,, bianco, e due soli d' olivastro, cioè tre quarti di quel-
,, lo e due di questo; quindi il frutto di questa unione
,, viene chiamato *Quarterone bianco*. ,,

6. ,, Questo Quarterone bianco se prende in moglie
,, una Bianca, avendo egli sei gradi di bianco e due di oli-
,, vastro, tre di quelli ed uno di questi comunica al
,, proprio figlio; laddove la madre lo fornisce di quattro

,, gradi di bianco. Avrà dunque questa prole sette gradi di
,, bianco, ed uno solo di olivastro: e perciò gli si dà il
,, nome Americano di *Puchuelle*, o piuttosto *Pucinelle*; ter-
,, mine Indico significante il rimanente o la minima parte,
,, perchè un solo grado di un colore, unito a sette di al-
,, tro colore, si crede l' ultimo rimasuglio del color per-
,, fetto. D' onde ne viene che se il *Pucinelle* si accaserà
,, con donna Bianca, i figli saranno bianchi, e lo saranno
,, poi intieramente, se questi figli si uniranno ad una Bian-
,, ca o ad un Bianco, secondo che saranno maschj, ovve-
,, ro femmine. "

7. ,, Quanto si è detto de' prodotti dal Bianco e dall'
,, Inda, e delle varie successive mescolanze di colore per
,, l' unione sempre mai costante del maschio con una Bian-
,, ca, conviene anche ai prodotti che risultano dal *Mestiz-*
,, *zo* e dalli di lui figliuoli, nipoti, e pronipoti, quando
,, tutti questi si uniscano senza interruzione coll' Inda Oli-
,, vastra: cioè in progresso di tempo si perde il bianco e
,, si ritorna all' olivastro stesso, da cui ebbe origine il
,, *Mestizzo* nato dal Bianco e dall' Inda. "

8. ,, Oltre di ciò spesso accade, che quelli i quali han-
,, no diversi gradi dei due mentovati colori si maritino fra
,, di loro; onde ne succedono figli di altri colori distinti,
,, e sono poi anche disintamente nominati. Così quelli che
,, hanno per esempio una terza parte dei gradi di un colo-
,, re si dicono *Terzeroni*, e *Quinteroni* se hanno la quin-
,, ta parte soltanto. Alcuni di questi medesimi hanno un
,, qualche altro nome particolare: per esempio il figlio di
,, un *Mestizzo* e di un' Inda Olivastra (che si chiama *Quar-*
,, *terone Olivastro*) si dice *Ciolo*; e la figlia del *Terzerone* e
,, d' una *Quarterona Olivastra* ha il nome di *Vru*; ec. "

9. ,, Nella maniera medesima deve considerarsi la se-
,, conda generazione; cioè la prole nata da un Bianco e da
,, una Negra, se si eccettuino certi nomi, ed alcune parti-
,, colarità rimarcabili. Fra queste merita di essere ricorda-
,, ta la seguente: vale a dire il vedersi alle volte il figlio
,, di un *Mulato* e di una donna Bianca, sorpassare in bian-
,, chezza la propria madre, ed essere più bianco di un fia-
,, mingo, senza mostrare alcun segno nero o nella pelle o
,, ne' capelli. Questo prodotto chiamasi allora *Salta-Ade-*

,, *de-*

„ *delante*, ossia *Salta-avanti* per aver fatto questo passo
„ gigantesco e sorprendente verso il color bianco. Simil-
„ mente vedesi alle volte il figliuolo di un *Mulato* e di una
„ *Mora* (ch' è il *Quarterone nero*) diventar tanto nero quan-
„ to la propria madre, o quanto un Moro Africano, non
„ ostante i due gradi di bianco comunicatigli dal *Mulato*
„ suo genitore. “

10. „ Finalmente la terza generazione procede dal Mo-
„ ro e dall' Inda olivastra. Succede questa allo stesso mo-
„ do dell' altre due. Dessa però produce una successione
„ di figlj oscuri, e sommamente brutti. Non ostante però
„ questa bruttezza, essendo la madre Inda olivastra, la
„ prole tende ad imbianchirsi, se i figli e nipoti sempre si
„ uniscano con donna Inda, cioè di olivastro colore. Di
„ questa spezie non pertanto pochi sono gl' Individui, per
„ una notabile avversione, e forte antipatia, che regna re-
„ ciprocamente fra il Negro e l' Inda, e fra l' Indo e la
„ Negra: d' onde ne viene che spesso nascano unioni clan-
„ destine. “

11. Sin quì Berengher, il cui racconto somiglia molto, se non erro grandemente, a quanto si legge presso l' Autore delle *Recherches Philosophiques sur les Américains*; le cui idee non furono approvate da Buffon, per quelle ragioni che legger si possono da chiunque nell' VIII. Volume del suo *Supplément à l' Histoire naturelle*. In questo racconto sembrami non pertanto di scorgere molto di arbitrario, spezialmente in quelle divisioni e mescolanze perfette di gradi di colore. Comunque però sia, vi si vede confermata una verità conosciuta: vale a dire che i figli, generalmente parlando, anche nel colore più alla madre che al padre si rassomigliano. E tanto più (posto che le cose vadano a dovere) si confermerebbe questa verità con il caso del *Salta-avanti*, cioè del Bianco prodotto dal *Mulato* e dalla Bianca, e con l' altro dei Negri nati dal *Mulato* e dalla Mora.

Io dico *se le cose vadano a dovere*; perchè se mai questi Bianchi e questi Negri inaspettati fossero per avventura l' effetto di unione clandestina tra la Bianca ed un Bianco amico, e della Mora con amico Negro, piuttosto che col marito *Mulato*, ognun vede che questi due frutti non sa-

rebbero più cosa strana e sorprendente: anzi della suddetta union clandestina forse tanto universalmente si sospetta, che un gran Sovrano, volendo salvar la vita ad un Padre incestuoso della propria figlia, condannato a morte ignominiosa e crudele dalli Giudici delegati, confermò bensì la condanna, ma vi aggiunse il patto che *fosse prima dimostrato essere quella giovane veramente sua figlia*.

12. Così pensò anche il Taverne, allorchè mandò in dono al suddetto Buffon il ritratto di una fanciulla nata da Parenti Mori, tutta seminata nella pelle di macchie oscure e quasi nere, altre molto larghe altre piccole, col restante della cute assai bianco. Giudicò il Taverne che la madre si fosse accoppiata con un Bianco; giudizio non approvato dal Buffon, ma che il Taverne tentò di confermare con quelle ragioni, che si leggono nel citato Volume del *Supplément à l'Histoire naturelle*. Io quì non ardisco decidere qual de' due tra questi Scrittori s' accosti più al vero: osserverò soltanto che non mancano esempli di copiose macchie più e meno grandi, e di molte singolari prominenze di oscurissimo colore nella cute di alcuni Europei, senza sospetto nemmeno rimoto di accoppiamenti illegittimi.

13. L' uomo chiamato *Porcospino*, per la cute sua tutta sparsa di setole grosse pungenti ed elastiche, descritto nel Volume XLIX. delle Transazioni Filosofiche d' Inghilterra, il quale ebbe sei figlj simili a lui, è uno di quegli strani fenomeni che dovea fare svergognare coloro, i quali avevano ardito di pensare che i Mori dovevano riferirsi ad un Progenitore diverso da quello di tutto il genere umano: e la fanciulla, di cui ci diede il ritratto lo stesso Plinio Franzese nel medesimo Volume del Supplemento, che avea la pelle macchiata di prominenze parte ampie, e parte picciole, di oscuro colore, e guernite di peli neri, altri lunghi due pollici, ed altri più corti, somministra un altro esempio consimile. Nata in Lorena, sette leghe lungi da Treveri (come l' uomo *Porcospino* ebbe l' Inghilterra per Patria), non vi fu luogo a sospettare di commercio clandestino, dalla parte delle rispettive Genitrici, con qualche *Mulato* o Negro-bianco. Donde io conchiudo, che tutte queste produzioni, altro esser non potendo che fenomeni dipendenti da una particolare distribuzione de' vasellini cu-

tanei, non pare che d'altronde nascer possa questo cangiamento di distribuzione ne' vasi della tenuissima cute del germe, che dalla singolare attività dell'umore del maschio sparso sul germe medesimo.

14. E per ritornare colà, d'onde per poco mi sono scostato, le sopraddette osservazioni del Berengher non confermano solamente la verità di cui ho fatto parola poco sopra; ma, se non m'inganno del tutto, atterrano sino da' fondamenti l'opinione di coloro, i quali la nerezza de' Mori vollero che dipendesse soltanto dal calore del clima. Imperocchè se sotto lo stesso clima nascono de' Bianchi e si riproducono, come si potrà attribuire il fenomeno ad una cagione che non produce costantemente l'effetto medesimo?

15. Altre cagioni adunque, e non il solo clima caldo, che soltanto può oscurare più o meno le parti specialmente scoperte, e forse sollecitare lo sviluppo di alcune di esse, sono quelle che producono questa spezie di uomini; nè io saprei trovarne una più appropriata di quella che comunicai al Filosofo Ginevrino, che cotanto lo appagò. Imperocchè se ho dimostrato col fatto, sembrare assai verisimile che dalla varia distribuzione de' vasi ne' diversi organi del corpo animale dipende il vario colore de' liquori che in quelli si separano: e s'egli è certo che niente può crescere e svilupparsi nel corpo animale vivente senza l'azione e presenza di canali o vasi fra di loro particolarmente intrecciati: se le strane ed insolite produzioni o mutazioni non morbose che nella superficie del corpo umano tal volta si osservano, tutte e poi tutte appartengono a qualche degenerazione della cute: e finalmente se l'umor fecondo del maschio, secondo la sua varietà, portato all'ovaja della femmina della stessa spezie o di altra, che abbia però con questa qualche sensibile affinità, stimola, nutre, e quindi modifica in singolar maniera il germe, siccome si vede in ogni spezie di mulo; io ardisco ripetere che questo stimolo, o nutrimento, o modificazione qualunque, altro non fa che alterare la distribuzione de' tenerissimi vasellini che appartengono alla cute del germe, o ad altre parti, nelle quali poi accadono quelle mutazioni, e que' singolari sviluppi, che si osservano negli animali prodotti

dalla copula di altri, che non sono della stessa spezie identifica.

16. E poichè ho quì fatto menzione di sviluppi singolari, mi sia lecito il tentare di render ragione del perchè ne' muli comuni la laringe sia modificata diversamente da quella della madre Cavalla.

Ripugna forse alla ragione il pensare che la cute del germe sia fornita di pori più ampli colà dove cuopre immediatamenre la laringe? o il supporre che questa stessa laringe nello stesso germe sia collocata in guisa da ricevere e sentire prima dell' altre parti l' azione del fluido fecondatore? Se non ripugna, poichè la varia ampiezza de' pori della cute è cosa nota agli Anatomici; e quanto alla collocazione del germe niente può dirsi che più favorisca un' opinione dell' altra, s' intenderebbe cred' io come in un caso o nell' altro si svolgessero con qualche alterazione nella distribuzione de' vasi, le parti costituenti la laringe, come irrorata in proporzione prima dell' altre da sperma non solamente più abbondante, ma forse anche più attivo (*a*); e si sviluppasse specialmente ciò che dicesi *tamburro*; il cui abbozzo sommamente picciolo trovasi probabilmente nella laringe del germe della cavalla, siccome sospettò ancora il grande Hallero (*b*). E di fatti, se pare dimostrata bastantemente l' esistenza del germe; e quindi l' umore del maschio niente forma di nuovo, ma svolge soltanto più o meno ciò che preesiste; il tamburro che trovasi nella laringe del mulo, simile a quello dell' asino suo genitore, di cui manca la cavalla madre, e dal quale dipende la differenza dal ragghiare al nitrire; questo tamburro, io dissi, altro

(*a*) Questa congettura della maggiore attività dello sperma asinino sembrami confermarsi per qualche modo dal vedere che l' *hinnus*, e quindi il germe sviluppato dal Cavallo nell' ovaja dell' asina, non ha l'orecchie asinine; ma però la coda è più guarnita di crini, che non è nel mulo propriamente detto: quindi lo sperma asinino più forse nutre le orecchie o ne rilascia le parti costituenti sì che più di fluido vi si porti, o finalmente moltiplica collo sviluppo li vasellini delle orecchie medesime, e fa il contrario nella coda: laddove tutto al rovescio agisce lo sperma del cavallo nel germe dell' asina. Abbiamo una recente osservazione analoga a tutto ciò nel Volume XIV. pag. 294. degli *Opuscoli scelti* di Milano.

(*b*) *Elem. Physiol.* Tom. VIII. Lib. XXIX. Sect. II. §. XXXVII.

non sembra essere che uno svolgimento di parti pria esistenti nel germe come in disegno, le quali non potevano svolgersi sensibilmente che dall' umor prolifico dell' Asino: in quella guisa appunto, per far uso di qualche paragone, che i semi di alcune piante fecondati per caso o artifizialmente da pulviscolo che non sia precisamente della stessa spezie; o consegnati ad alcune terre (in caso ancora di pulviscolo della spezie medesima), o non nascono siccome fanno in altre terre, o, nascendo, sono modificati diversamente dalla pianta, da cui furono tratti.

17. Queste modificazioni non aspettate, o queste sterilità di alcuni semi spettanti a piante, le quali sotto di qualche clima non allignano, o degenerano più e meno dalla pianta madre, offrono alla mia mente un' idea, che forse potrebbe strana parere sulla prima origine de' Negri, e di altre Nazioni da noi diverse nel colorito, e ch' io sottopongo volentieri all' altrui purgato giudizio.

S' egli è vero quanto si legge in molte opere di celebri Autori, e narrato ci viene dell' Africa e del nuovo Mondo, alcuni, anzi non pochi, de' nostri animali colà trasportati degenerano sì fattamente dalla loro spezie coll' andare del tempo, al caso della loro propagazione, che più quasi non si riconoscerebbero, se tornassero a noi; siccome alcuni di quelli dell' America, e di altre lontanissime regioni, condotti in Europa, sono soggetti a qualche sensibile degenerazione. Ciò posto per vero, io inclino a pensare che i Negri abbiano avuto lor nascimento da alcuni Asiatici, o da altri uomini a noi simili fuggiaschi ed erranti per luoghi non conosciuti, o gettati per così dire dalla sorte, e probabilmente da qualche burrasca di mare, in que' climi prima disabitati: che l' influenza del calore; la natura dell' acque e degli alimenti; il nuovo genere di vita che avranno dovuto condurre onde procacciarsi il vitto; l' indole dell' aria, de' vapori, delle esalazioni ec. abbiano impressa ne' loro solidi, non meno che ne' fluidi, una qualità o attività capace a far sì, che il sugo loro prolifico desse al germe, che ne veniva irrorato, un singolar movimento o modificazione; e che questo movimento o modificazione abbia incominciato a svolgere i vasellini cutanei del germe in guisa, da poter separare que' liquidi, atti a pro-

lungare alcune parti; ad accorciarne dell' altre; a riflettere un diverso colore; insomma a dar principio a qualche degenerazione ne' primi frutti di quelli Asiatici, o altri uomini della nostra spezie: e finalmente che questa generazione sia andata crescendo ne' figli e nipoti sino al grado conveniente alla costante efficacia degli agenti poc' anzi indicati; i quali diversificandosi in varj di que' Paesi, produssero le generazioni diversamente colorite; cioè dall' olivastro in sino alla più forte ed oscura negrezza.

18. Ed in fatti, che la distribuzione diversa de' vasellini nelle varie parti del corpo sia atta a separare un fluido di un colore piuttosto che di un altro; e più che questi fluidi nostri siano fatti e risarciti dagli alimenti, non se ne può dubitare. Dunque secondo la varia qualità di questi varia anche sarà la crasi de' fluidi medesimi, ossia la proporzione fra i principj che li compongono. E, per verità, oltre il vario colore de' liquidi umani, separati da canaletti diversamente piegati e distribuiti, de' quali ho fatta tante volte menzione; si consideri che la coroide nell' occhio coperta internamente, siccome si sa, di un negro muco, aderente a certe maglie reticolari, è tutta seminata e quasi tessuta di vasellini vorticosi; distribuzione che in altre parti del corpo non fu insino ad ora osservata. Si aggiunga che noi stessi in forza della suddetta crasi de' nostri umori siamo soggetti a cangiar colore; come si vede nel giallore più o meno intenso dell' itterizia: nel rosso delle infiammazioni; nel pallore della cachessia, e delle varie spezie d' Idrope; appunto come siamo certi, che li più gran Negri, secondo la forza o lunghezza delle malattie, alle quali vanno soggetti, divengono (*a*) del colore dell' acqua, entro cui siasi stemprata della caligine, e più sovente del colore del rame, come si vede comunemente fra li molti popoli dell' America.

19. Non sembrano dunque li Mori una razza di uomini diversa dalla nostra, e che abbiano avuto una origine differente da quella degli altri uomini tutti (*b*); come fu

---

(*a*) Si consulti la dissertazione del grande Anatomico *Albino: de sede & causa coloris Æthiopum*.

(*b*) Si veda a questo proposito l' Opera del Chiariss. Blumenbach: *de generis humani varietate nativa*. Ediz. seconda.

per alcuni falsamente creduto. E se il loro colore, e le altre esteriori sembianze, per le quali pare a prima vista che siano di una spezie da noi dissimile, dipendono da quegli agenti che ho quì più d' una volta indicati; non si dirà più, per quanto io penso, che vi sono i Negri, perchè due furono gli Adami, Asiatico l' uno ed Americano l' altro, siccome immaginò quel pazzo cervello di Teofrasto Paracelso; ch' essi sono il frutto della maledizione data da Iddio a Caino per avere ucciso il proprio fratello; o di quella che da Noè si diede a Cham figliuolo di Canaan; che vi sono Mori, perchè il liquido loro fecondante è negro; o perchè scorre pe' nervi di essi un fluido singolare di color negro che chiamano *Etiope Animale*; o perchè i globetti sanguigni in questi uomini giungono per sino all' estreme arteriuzze della cute, per le quali poi trasparisce il colore del sangue; che sono negri per ciò che la loro bile, la quale scorre col sangue è molto più atra che negli Europei; che il colore del Clima è quel solo agente, cui dee riferirsi la negrezza, specialmente perchè questa segue la ragione del calore; in somma non vi sarà più luogo ai tanti sogni proposti e pubblicati intorno a questo suggetto.

20. Ed a proposito di quest' ultima opinione, che tanto piacque al Buffon, non dee tacersi come ad essa siano stati opposti li *Salta-avanti*; ed altri uomini bianchissimi che si dicono nascere alcune volte da Genitori negri, e indicati sono co' nomi di *Blafards*, di *Bedas*, di *Kacrelas*, di *Dondos*, di *Albinos*, di *Negres-blancs* ec. secondo il vario linguaggio delle Nazioni presso le quali s' incontrano, e nelle quali vivendo dicesi che si conservano sempre bianchissimi. Questo fenomeno, che sembra sì opposto all' opinione suddetta, perderebbe tutta la sua forza, se vero fosse, come alcuni pretendono, che bianchi siano per una spezie di lebbra, alla quale alcuni Negri vanno soggetti.

21. Mi si permetta però di far osservare, come non dubitando che alcuni Negri siano lebbrosi, pure ei sembra non poter negarsi, che le cagioni della negrezza da me proposte siano sufficienti a produrre ugualmente de' *Negri-bianchi* non lebbrosi; de' quali ne riferisce non pochi esempli il Buffon nel citato volume del Supplemento: esempio che a me pure è accaduto di confermare quì in Padova tre volte per

tre anni di seguito. Io parlo di una donna d' anni 50 in circa, che fa il bel mestiere della Pellegrina. Essa è bianchissima al pari della neve: ha gli occhi di un azzurro languido con pupille che alcun poco rosseggiano in un bulbo che non si ristà un momento dall' oscillare in fretta da sinistra a destra, e da destra a sinistra. Essa ha vista cortissima spezialmente nel giorno: candidi sono li suoi capelli, siccome pure li sottilissimi peli delle palpebre, e li pochi delle sopraciglia; e protesta che di tal colore furono mai sempre sino dalla sua puerizia. La sua bianchissima pelle è bensì sparsa di piccole macchie generalmente rotonde, che volgarmente per la loro figura diconsi *Lenticchie*, ma pure è morbida e liscia. Nacque essa da due villici del Territorio Faentino, e fu mai sempre robusta e sana; e tale era anche nella state dell' anno 1790 (nè dopo quel tempo ritornò essa più in queste contrade), senza il minimo sospetto di lebbra, o di altra affezione morbosa della cute.

22. Con questi esempli, e con altre osservazioni e ragioni, tentò il Plinio Francese di sostenere l' opinione da lui adottata, e di dissipare le tenebre sparse su di questa materia; contento di aver provato (spezialmente nell' indicato volume) che i Mori e li Negri-bianchi altro non sono che una degradazione dell' umana spezie; e che il colore di cui sono tinti dipende da una disorganizzazione della pelle; ma siccome poi egli vuole che questa disorganizzazione si debba al calore del clima, che ho, insieme con altri, dimostrato insufficiente di per se solo a spiegare il fenomeno di cui si tratta; così mi sembra ch' egli non abbia diradate quelle tenebre, che l' ignoranza della cagione avea diffuso su di questo argomento. Che se io vi fossi mai in qualche maniera riuscito col mezzo di quelle congetture, ch' io credo ragionevoli perchè sostenute da' fatti, e dall' analogia dedotta dalle mutazioni che induce nel germe l' umor prolifico; dalla degenerazione di alcune piante, e di non pochi animali trasportati da un clima all' altro; dal colore vario de' liquidi umani secondo che sono separati da questo o da quell' organo, fornito di vasi diversamente piegati, e distribuiti in copia maggiore o minore; e finalmente dalla certezza in cui si è, che cangiandosi la crasi de' fluidi ne' Mori per malattia, si cangia anche in

essi

Quarteron
Figl. di Bianco
e d'una Mulata.

Zamba
di Nero
Figl. d'un Mulato,
e d'una Nera.

Nera
o

Indio

Quarteron
Figl. di Bianco
e d'una Mulata.

Mulato
Figl. d'una Nera
e dell'uomo
Bianco.

Zamba
di Nero
Figl. d'un Mulato,
e d'una Nera.

Indio.

Parda
Figl. d'una Nera
e d'un Quarteron

Cino
Figl. di Nero
e d'India.

Mestizza
Figl. di Bianco
e d'India.

essi il colore della pelle, siccome si muta parimente in noi medesimi; se, io dissi, per questo modo io fossi riuscito a diradare quelle tenebre, mi lusingherei allora di non essermi inutilmente occupato sopra un soggetto, che diede occasione a tanti Scrittori di esercitare l'ingegno e la penna non meno ne' passati secoli che nel nostro.

NUOVE OSSERVAZIONI SULLE CAGIONI DEL VARIO COLORITO NEGLI ANIMALI

Di Floriano Caldani.

Ricevuta li 16. Febbrajo 1799.

1. LE molte svariate opinioni, che sulla vera cagione del diverso colorito degli uomini e degli animali furono fino a questo giorno proposte dagl' illustri Filosofi, che di proposito si occuparono di questo argomento, dimostrano evidentemente a quanto difficile impresa eglino si accinsero, e quanto ancora rimanga a studiarsi per sapere la vera cagione di un sì straordinario fenomeno. Leopoldo Caldani mio Zio appoggiato alle osservazioni, ed all' autorità dell' Albino celebratissimo pensa nelle sue *Congetture*, che il color nero degli Etiopi, ed i varj gradi di colorito più o meno oscuro degli altri Popoli, debbasi ad una crasi particolare de' liquidi; aggiugnendo poi all' opinione dell' Albino, che la detta crasi dee combinarsi colle mutazioni che induce l' umor prolifico sul germe, coll' azione del clima, e finalmente con una particolare distribuzione de' vasi, che scorrono per la pelle, e che separano un umore di singolare natura, detto *muco Malpighiano* dal suo inventore; cui devesi la varietà del colorito medesimo. Quanta influenza poss' avere una simile distribuzione de' vasi in questo fenomeno lo provò bastantemente il Zio mio col recare l' esempio de' varj visceri, ne' quali hanno li vasi sanguigni differenti inflessioni, e separano nel tempo stesso alcuni liquidi, non solo diversi nella proporzione de' loro costituenti principj, ma eziandio nel colore. Congetture, e prove, che non solo applaudite furono dal celebre Naturalista Carlo Bonnet, acutissimo ragionatore (a); ma che

(a) Si leggano le lettere del Caldani, e del Bonnet su questo argomento nel terzo volume dei *Saggi Scientifici e Letterarj dell' Accademia di Padova*. Part. II. pag. LVI. segg.

sembra sieno state pure abbracciate dall' infaticabile Blumenbach Professore di Gottinga, il quale nella terza edizione di una laboriosa sua Opera (a) non sa dispensarsi dall' accoppiare alle cagioni, ch' egli immaginò per ispiegare il fenomeno di cui si tratta, anche la particolare azione de' vasellini cutanei. Delle opinioni però che questo chiarissimo Fisiologo ha pubblicato a questo proposito ne parleremo in appresso; dovendo prima riferire alcune osservazioni, che non mi sembra dover trascurare, potendo esse aggiugnere maggior forza a quegli argomenti, che mio Zio portò in campo, sulla crasi o costituzione degli umori scorrenti pe' vasi degli Etiopi, de' Mulati, degli Europei.

2. All' occasione di preparare il reticolo del Malpighi nella lingua di un vitello per la dimostrazione degl' integumenti comuni del corpo umano, solita a farsi nel pubblico Teatro Anatomico di questa Università, osservai che un siffatto reticolo in luogo di apparire di color nero, siccome avea altre volte veduto, era bianco perfettamente. Cercai di sapere quale singolarità avesse l' animale, cui apparteneva la lingua recatami, e fummi risposto, ch' esso era un vitello ancor lattante e di pelo totalmente candido. Queste circostanze, ambedue osservabilissime, m' invogliarono ad ulteriori ricerche; e fatta una copiosa provvista di lingue spettanti a diversi animali, ho trovato, che:

1.° La lingua di un altro vitello egualmente lattante, e di pelo bianchissimo avea il detto reticolo di bianco colore:

2.° Nella lingua di altro simile animale, ma di color nero, pur lattante, era tinta di nero quella superficie del reticolo, che tocca il corpo della lingua:

3.° Il reticolo separato dalla lingua di altro vitello bianco macchiato di colore di cannella, trovossi bianco, con poche macchie dello stesso languido colore:

4.° La lingua di un bue nero, mi presentò il reticolo tutto nero:

5.° Vidi che il reticolo appartenente alla lingua di

(a) *De generis humani varietate nativa. Edit. tertia.* Gotting. 1795.

un bue bianco era bianco, tranne l' interna superficie, che tendeva nel colorito al cenerognolo:

6.° In un altro bue bianco non mancava la lingua di qualche macchia oscura:

7.° Esaminata la lingua di un bue bianco macchiato di nero, presentò il reticolo l' istessa combinazione di colorito:

8.° Nella lingua di un agnello bianco, si trovò il reticolo del tutto bianco:

9.° E la stessa rassomiglianza si osservò nella lingua di un agnello nero.

3. L' osservazione quinta e sesta potrebbero forse da alcuno stimarsi di tal fatta che totalmente si oppongono alla costanza di similitudine annotata nelle altre. Se non che non è nuova siffatta anomalia, e ci conduce essa vieppiù a confermare quanto nella varietà del colorito influisca la peculiare disposizione de' vasellini. Consiglia Virgilio li pastori, che vogliono aver cura della lana a non fidarsi dell' esterno candore degli animali; poichè alcune volte si vede in essi la lingua tinta di nero; e quelle macchie imbrattano poi la pelle de' figli, mentre sembravano esternamente bianchissimi li genitori:

„ . . . . . *Greges villis lege mollibus albos.*
„ *Illum autem, quamvis aries sit candidus ipse,*
„ *Nigra subest udo tantum cui lingua palato,*
„ *Rejice, ne maculis infuscet vellera pullis*
„ *Nascentem* (a).

Conosceva Virgilio, che l' alterato colore della lingua potea forse nello sviluppo di un germe (supposto bianchissimo) portare un qualche cangiamento, che in luogo di poggiar sulla lingua, imbrattato avrebbe altre esteriori parti dell' animale: essendo un puro accidente, che in un animale quà e là macchiato cadano le macchie sopra una piuttosto, che sopra un' altra parte.

4. Sciolta per tal modo la difficoltà dell' anomalia che avrebbe potuto essermi da taluno rimproverata, io la discorro così. Dalla similitudine del colorito, che per la più par-

---

(a) Georg. Lib. III. v. 386. segg.

te delle accennate mie osservazioni s' incontra fra la cute ed il reticolo posto nella lingua degli animali summentovati, chiaro risulta, se pur non m' inganno grossamente, che la stessa qualità di liquidi, e quella stessa distribuzione de' vasi da mio Zio immaginata, si combini tanto nella cute, come nella lingua. Ed io inclinerei piuttosto a stabilire (in istato naturale e non morboso) per causa primitiva di questo colore la distribuzione vascolare, considerando poi la crasi, come un effetto della medesima particolare distribuzione. Ciò che m' induce a pensare in tal guisa si è: 1.° che osserviamo essere somma l' influenza della generazione ne' cambiamenti del colorito, e che quest' influenza può esercitarsi assai più agevolmente sulla distribuzione vascolare (come ne' casi riferiti nel §. III.), che sulla natura de' liquidi, la quale cangiasi ogni dì per moltissime circostanze: 2.° che nelle lingue de' vitelli da me esaminate il reticolo era di un differente colore, quantunque fossero tutti lattanti, avessero cioè una crasi presso a poco eguale nei loro umori. Ed, oltre tutto ciò che fu dal mio Zio riportato nella sua Memoria circa l' influenza della generazione nel diverso colore degli uomini, a me pare evidentissimo, che la causa primitiva del colorito debbasi alla distribuzione de' vasi, e che su questa distribuzione medesima originaria agisca il liquor fecondante del maschio. E tale evidenza si scorgerà eziandio da chiunque consideri, che se dalla cambiata crasi degli umori come da causa prima derivasse il colorito, intendere non si potria per qual cagione il colore del germe fecondato dagli animali di colorito differente (come ne' cani, negli uccelli ec.) sia per lo più a macchie, e non universale: laddove se si stabilisca esercitarsi l' influenza della generazione sulla varia disposizione de' vasi, facil cosa sarà il concepire, come il figlio di una cagna bianca fecondata da un cane d' altro colore porti sulla pelle le orme del colorito paterno.

5. Io dissi di sopra *in istato naturale e non morboso*, essendo note le storie de' cambiamenti di colorito, alli quali vanno soggetti gli Etiopi in occasione di malattia, e volgare essendo la tinta giallo-scura, che apparisce sulla pelle di coloro, i quali vengono attaccati dall' itterizia: situazioni al certo, nelle quali la stessa distribuzione vasco-

lare, che da prima separava un umore di una data natura, è costretta a separare quegli umori medesimi, ma alterati nella proporzione de' loro costituenti principj, nelle fisiche qualità; e perciò corrispondenti alla crasi speciale che indusse la malattia nella massa tutta degli umori.

6. Forse che per convalidare la nostra opinione necessario sarebbe di dimostrare quale sia la particolare distribuzione de' vasi cutanei con que' metodi stessi, che ci fecero conoscere le varie inflessioni vascolari ne' visceri che servono a qualche separazione, voglio dire colle injezioni. Non so che da veruno sia stata avvertita la disposizione de' vasi che scorrono per la cute, ed ai quali si deve la separazione del muco Malpighiano; ed io tanto più sospetto ch'essa presenti qualche singolarità, quanto che il cel. Walter nella bella sua Memoria *sur la résorption* (a) distingue li vasi della pelle in due classi differenti: cioè in quelli che si aprono alla superficie esterna della cute, sotto l'epidermide, ed in quelli che forano l'epidermide stessa: alla prima classe egli attribuisce la secrezione del muco Malpighiano, ed alla seconda la traspirazione e l'assorbimento cutaneo. Ora questa distinzione conosciuta dall'Anatomico di Berlino col mezzo delle injezioni parmi che non poco rinforzi la nostra congettura sulla particolare distribuzione de' vasellini cutanei. Chi sa che questi vasi formando una classe distinta non abbiano qualche singolare disposizione! I vasi che nudriscono il fegato, li reni, li testicoli, e ch'esalano un vapore tenuissimo alla superficie di tali visceri, non sono certamente conglomerati, nè conformati a guisa di stella o di penicilli, come lo sono quelli che nell'interno de' visceri stessi separano li diversi umori dalla massa del sangue.

7. Non si accorda con questi principj ciò che fu scritto in varie Opere dal sopralodato Blumenbach. Questi nel suo Opuscolo *de oculis Leucaethiopum* asserisce che *epidermis, & quod ipsi subjacet malpighianum sic dictum rete ...... non nisi ex cellulosa constabit tela, eidem simili quæ choroideam & iridem & alias ..... oculi interni membranas constituit; utpote quæ eodem plane modo pigmentum nigrum ipsis destinatum recipiunt, uti Malpighianum rete, in*

(a) *Mémoir. de l'Acad. Roy. de Berlin.* Ann. 1786.-1787. pag. 61.

æthiopibus præsertim, nigredinem suam recipit: aggiugnendo poco dopo: *eamdem nigredinem ejusmodi saltem cellulosum contextum amare .... qui in membranam expansus & pinguedini recipiendae ineptus est* (a). Contro le quali proposizioni a me pare che si possano opporre le seguenti riflessioni: 1.° s'egli è vero ciò che scrisse il Santorini, il Morgagni, e l'Albino, cioè che il reticolo malpighiano assai facilmente si discioglie nell'acqua, tingendola di quel colore di cui esso è dotato, è vero altresì che lo stesso non accade alla cellulosa; e se da queste nozioni e dalla totale mancanza di vasi e di nervi nel reticolo e nell'epidermide si decise dagli Anatomici che queste parti non possono annoverarsi fra le parti organizzate, ma che si devono considerare come un muco inorganico, non reggerà certamente lo stabilito confronto fra il reticolo e l'epidermide colla cellulare che compone la tonaca coroidea e l'iride, e che unisce li moltissimi vasellini, de' quali desse sono in gran parte fabbricate. Conveniva dunque dimostrare prima che la cellulosa è una sostanza inorganica, o che le di lei proprietà si trovano eziandio nell'epidermide e nel reticolo del Malpighi. 2.° se nell'interno dell'occhio, e nelle glandole conglobate poste a ridosso dell'aspera arteria, e sull'esterna superficie de' polmoni si veggiono molte striscie nere, senza che vi sia traccia di pinguedine, dovremmo noi dire perciò che intanto vi si osserva un tal colorito perchè non vi è separazione alcuna di grasso? Noi troviamo al contrario che ne' reni succenturiati si prepara un liquore molto oscuro, e qualche volta nereggiante, senza ch'esso sia aderente a cellulare di sorta alcuna come lo è nella coroidea dell'occhio, e quantunque il più delle volte sieno questi visceri attorniati da buona copia di grasso. 3.° Non mi sembra che possa farsi gran conto dell'osservazione dello Staehelin, il quale vide li globi pinguedinosi nelle interne parti dell'occhio di un vitello senza che la coroidea fosse nera; perchè anzi questo fatto serve a comprovare la nostra opinione: essendo probabilissimo che in quell'occhio (quando l'osservazione sia vera) combinata si fosse quella tale distribuzione de' vasellini, che atta non era a separare il so-

(a) pag. 15.

lito muco che tinge internamente la coroidea. E la dimostrazione di questa mia congettura o sospetto ci viene somministrata, se pur non m' inganno, da una osservazione riferita dall' Haller: *in cuniculo albo pupillis rubris niger iste mucus desideratur*, aggiugnendo in una nota: *nam cuniculo cinereo choroidea & pupilla fusca est* (*a*); dal che sembrami che possa conchiudersi senza timore di errare che nel coniglio bianco manca affatto, siccome nella di lui pelle, quella disposizione vascolare che separa in noi il muco nero della choroidea. 4.° In noi dissi, e lo stesso s' intenda di parecchj animali, i quali sono dotati dello stesso muco, senza che poi quella cute, la quale s' inflette nella bocca, nel pene, negli occhj sia macchiata da alcuna tinta nerastra, benchè sotto di essa non si raccolga copia alcuna di grasso. La quale tinta nerastra della cute introflessa mancar certamente non dovrebbe negli Etiopi, tanto più che oltre di essere priva di grasso, è continua alla cute esterna dotata di particolar colorito: ma il fatto mostra il contrario, osservandosi che gli occhj, le labbra, il meato uditorio negli Etiopi non corrispondono nel colorito al restante del corpo. 5.° La così detta terza palpebra de' buoi ha il suo lembo nero, forse perchè in tal sito non v' ha organo capace di separare il grasso; ma e perchè non è dello stesso colore il rimanente della palpebra medesima, che trovasi egualmente privo di grasso? 6.° Nella lingua del bue bianco, ed in quella del bue macchiato, senza presenza alcuna di grasso fra la cute e la sostanza muscolare non si vede nel primo caso traccia alcuna di colore oscuro, e nel secondo il reticolo ha soltanto alcune macchie disposte irregolarmente. Da tutte le quali riflessioni parmi ragionevole il conchiudere, che l' opinione del Sig. Blumenbach non ispiega abbastanza ciò ch' è in questione sulla sede del colorito, e che tutto piuttosto concorre a favorire la congettura proposta da mio Zio, che una particolare distribuzione de' vasi sia la causa del diverso colore degli uomini.

8. Lo stesso celebre Autore, in altra recente Operetta da noi superiormente (§. I.) lodata, congettura che la prossi-

---

(*a*) *Elem. Physiol.* Vol. V. Edit. Gotting. pag. 383.

sima cagione del colorito negro sia nel carbonico del sangue che si separa unitamente all' idrogenio attraversando la pelle. All' accesso, dic' egli, dell' ossigeno che trovasi nell' atmosfera viene il carbonico precipitato, e si attacca al muco Mulpighiano. E' necessario che a questa separazione del carbonico concorra l' azione de' vasellini cutanei. Sembra all' Autore che questa congettura sia bastantemente appoggiata dall' osservarsi: 1.° che il colore degli Etiopi non è connato, ma si sviluppa dopo la nascita, cioè dopo il contatto dell' aria atmosferica; e 2.° che l' azione de' vasellini è dimostrata dal cangiamento di colorito che prende la cute, tosto che o per esterna o per intrinseca impressione fu in modo alcuno turbata l' azione de' vasi cutanei. Sebbene la congettura del Sig. Blumenbach sembri assai soddisfacente per la facilità di spiegare il fenomeno, di cui abbiamo preso a ragionare; pure io mi farò lecito di proporre sulla medesima alcune quistioni, alle quali mi parve non corrispondere chiaramente l' opinione del Professore di Gottinga. 1.° Gli Etiopi, com' avvertirono tutt' i Fisici, hanno alcuni caratteri distintivi dalle altre Nazioni, e tutti uniformi: v' ha dunque una organizzazione speciale in questi Popoli, ed uno sviluppo, al quale non so se possa molto contribuire l' accennata separazione del carbonico; siccome non so quali cangiamenti soffra questo elemento dalla fecondazione di una Mora procurata da un Moro o da un Bianco. Al contrario se si stabilisca la singolare disposizione de' vasellini cutanei, riesce facile la spiegazione di questi fenomeni, siccome provò il mio Zio nella sua Memoria. 2.° Senza l' accesso dell' aria esterna, e nell' utero della Madre si osserva, che li feti Etiopi hanno alcune insegne o rudimenti del colorito che si sviluppa in appresso, come nella radice delle unghie ec. Forse a ciò dà occasione una precipitazione del carbonico previa al contatto dell' aria. 3.° La stessa causa che si ricerca per ispiegare il color nero degli Etiopi, deve servire eziandio a rendere ragione del colorito degli animali; e se ciò è giusto, non conosco per qual motivo, coll' ipotesi del Sig. Blumenbach, li vitelli nascano neri allorchè il padre e la madre avevano lo stesso colorito, e tali siano eziandio nell' utero materno; così li cani, e gli agnelli. 4°. Delle macchie pure ne-

rastre, che si veggiono sulla pelle di questi animali medesimi non potrebbe arrecarsi una lodevole spiegazione, se non si stabilisse, che tante sono nell' animale le macchie, quante le parziali precipitazioni di carbonico. Delle quali tre ultime questioni a me pare, che possa avere ognuno una completa spiegazione dall' opinione proposta da mio Zio, e dalle annotazioni che ho fino ad ora riportate.

9. L' osservazione fatta dall' Haller ne' coniglj, e da me poco innanzi accennata (§. 7.) m' invogliò ad istituire alcune ricerche sulla relazione che può esservi fra il colore della cute, e quello di cui è dotato il muco della coroidea. Quindi mi procurai gli occhj di varj buoi bianchi, cinerei, rossi, neri, macchiati di rosso e di nero. Esaminato e paragonato il muco della coroidea di un bue con quella dell' altro, non vi ritrovai differenza di sorta alcuna, essendosi in tutti osservato dello stesso oscuro colore. Si sa però che una tale membrana ne' buoi, ne' gatti, ne' coniglj, ed in altri animali non è ovunque ricoperta di muco; ma che una porzione di essa ha un colore suo proprio: e ne' buoi essa è o verde, o gialla o argentea, o mista di nero, ceruleo, verde, ed aureo di varia intensità. A questa parte della coroidea fu da alcuni dato il nome di *tappeto*, e nel colore di essa osservai alcune varietà; poichè nel bue nero una simile macchia era di azzurro oscuro: nel bue rosso si avvicinava al color della rosa: e nel bianco presentava un misto di giallo ed argentino.

10. Anche da queste osservazioni a me sembra dimostrata l' analogia che v' ha fra la distribuzione vascolare di quelle parti che presentano un muco colorato. Mi si dirà forse che supposta una siffatta analogia fra la tessitura della pelle e quella della coroidea, necessario sarebbe, che gli animali di bianco colore avessero anche la coroidea corrispondente, siccome vide l' Haller nel coniglio surriferito. Desso è però un caso straordinario, che si oppone all' oggetto essenziale, per cui la natura ornò l' organo della visione di quella membrana, e la ricuoprì di muco più o meno nereggiante; siccome straordinaria fu l' osservazione degli Accademici di Parigi, che trovarono bianca la coroi-

dea di un Etiope (*a*). Si vede tutto giorno nel coniglio bianco la coroidea di colore dorato o roseo; colore, che assai bene corrisponde alla tinta della pelle, e che può supplire nel tempo stesso agli ufficj, a' quali fu essa destinata. Ma questo colore della coroidea, siccome quello dell' iride, si cangia, secondo alcuni, col cangiar dell' età; e gli stessi Etiopi invecchiando presentano la pelle di colore meno oscuro, ed i crini biancastri. Un tal fenomeno però, quando sia stato veramente osservato dagli Autori che ne parlarono, potrebbe ripetersi dalla viziata crasi dègli umori, per la quale li vasellini in qualsisia modo inflessi o disposti, sono obbligati, direm così, a separare un fluido alterato per guisa che non sembra derivare da quel fonte medesimo, donde prima scaturiva in qualità e quantità corrispondente alla fabbrica della coroidea, dell' iride, della pelle ec. E chi non vede per verità, che acquistando anche li solidi per l' età una coesione maggiore fra le parti componenti, accader potrebbe che separassero in conseguenza un umore diverso da quello che separavano quando erano meno coerenti? Dissi *quando sia stato veramente osservato*, poichè se a bella posta si esamini, siccome fec' io, il colore della coroidea nel cadavere di più vecchj in vario grado canuti, si troverà assai di rado verificata simile proposizione.

11. Ma noi abbiamo sempre parlato d' inflessione o distribuzione de' vasellini come causa primitiva del colorito, ed il cel. Wolff di Pietroburgo pubblicò non ha gran tempo negli Atti di quella Imperiale Accademia (*b*) alcune riflessioni contro l' opinione di que' Fisiologi, li quali credono, che nelle separazioni de' varj umori fatte dai diversi visceri possa molto influire la differente disposizione de' vasellini nel viscere stesso. Il Boerhaave ci dipinse questa varia distribuzione vascolare con le seguenti parole: *in hepate disponuntur extremæ arteriolæ in penicillos, in testibus filorum instar conglomerantur, flexæ & arcuatæ sunt in rene, in intestinis arborum ramos exprimunt, in aliis particulis corporis humani aliam propriamque semper suæ sedi fabricam ad-*

(a) *Hist. de l' Acad. Roy. des Scienc.* 1740. n. 5.

(b) *Acta Acad. Imper. Petrop. pro anno* 1779. Tom. III. P. II. pag. 231.

fectant (*a*); e ben conobbe il gran Contemplatore della natura l' influenza di una sì variata distribuzione, allorchè scrisse: *toutes les liqueurs animales sont plus ou moins melangées*, *&* *ces petits tuyaux* (cioè li vasi distribuiti ne' visceri) *se diversifient sans doute assez pour separer les différentes molécules qui doivent entrer dans la composition de chaque liqueur* (*b*). Il mio Zio dimostrò la verità di tali congetture sì nelle Istituzioni Fisiologiche, come nella sua Memoria sul vario colore degli uomini da me citata nel principio di questo mio scritto. Ma il Wolff asserisce, che punto non giova la condizione o la varia distribuzione de' vasi a fare che in un viscere si separi un fluido piuttosto che un altro; meravigliandosi che uomini celebratissimi sostengano questa opinione, la quale sembra ad esso distrutta totalmente dal considerare l' itterizia nata dall' ostruzione del fegato. *Si anguli vasorum in hepate, si ulla secretoriorum ductuum conditio causa esset vel generandæ vel eliciendæ ex sanguine, aut secernendæ bilis, adeo ut nisi peculiari horum ductuum artificio & interventu nulla in corpore nostro bilis oriri possit; nulla sane oriretur, cum ductus isti vasaque obstructa sunt. Jam contra omnia potius bile inundari vides, his vasis obstructis; prope ut majorem nunc quam in statu naturali ejus copiam produci credas. Universus sanguis oppletus est bile; albuginea oculorum, cutis, cellulosa, flavedine tinguntur, & cum urina bilis mingitur. Quid aliud ergo hoc indicat, nisi sua natura bilem suisque viribus ex sanguine venæ portarum progigni absque ullo ductuum hepaticorum adminiculo; suscipi tamen his ductibus una cum sero & separari a cruore, quod ni fiat, generari tamen & manere in sanguine?* Aggiunge in appresso: *renales ductus, hepaticis obstructis, aeque ac isti laticem biliosum suscipiunt, & a cruore separant, & vasa quaecunque serosa in albuginea, in cute universa, in omni cellulosa cruorem modo angustia sua excludant, haud minus quam ductus hepatici laticem biliosum suscipiunt separantque, quem, qualis in cute & albuginea haeret, si committerent vesiculæ felleæ, eamdemque putes bilem inde enaturam, quæ ex latice in ea hepatico enascitur*. Conchiuden-

(*a*) *Prælect. in instit. med.* §. 132.

(*b*) Bonnet *Contempl. de la nature*. Part. VII. Chap. VI.

do poi: *vehementer ergo illi mihi errare videntur, qui causam cur bilis potius, quam aliud fluidum in hepate secernatur, in conditionibus ductuum ponendo, aptitudinem non modo his ductibus peculiarem excerpendi bilem, sed vim quoque adscribunt quasi extrahendi eam aut eliciendi ex sanguine; siquidem cum bilem sponte subortam, abstrahendam modo a sanguine, dederis; & nihil præter angustiam, quod opus sit, superest, & nulla in ductibus causa erit, cur tantum in hepate, non pariter in renibus bilis secernatur.*

12. Non saprei decidere quale delle due opinioni sia a più debole base appoggiata, se quella del Wolff, o l' altra degli Autori da esso confutati. Ed infatti quando si rifletta, che nei casi morbosi viene alterata l' economia di tutto il sistema animale, si troverà che le massime Fisiologiche dedotte soltanto da' casi morbosi non sono sempre legittime, siccome legittima non è quella che inferisce l' Anatomico di Pietroburgo dall' itterizia. In questa malattia attesa l' ostruzione del sistema vascolare del fegato, la bile ossia li principj, de' quali essa è composta nello stato naturale, rimane nell' alveo comune de' fluidi, dal quale suol separarsi per mezzo di quello stesso sistema. Quindi tutt' i liquidi che scorrono nel corpo animale, o che da esso si separano hanno alcune alterazioni dipendenti da questa unione; siccome la parte rossa del sangue, la linfa, il siero ec. è alterato nel suo colorito, nè riconoscibile co' proprj suoi caratteri, allorchè si converte in bile passando per il fegato. Ed essendo, siccome insegnano li Fisiologisti, e mio Zio principalmente, quasi preparati gli umori prima che passino ne' canaletti secretorj: noi troviamo una facile via, per cui la bile od i suoi principj scorrenti pella vena porta possano trasferirsi al sangue, e indurre un colore giallognolo al siero; e questa facile via è, se pur grandemente non erro, somministrata dai rami della vena cava epatica, e da quei linfatici che prendono origine dall' interna superficie della vena porta. Nè l' orina degl' itterici dimostra, come pretende il Sig. Wolff, che la distribuzione vascolare de' reni sia atta a separare la bile: 1.° perchè non è dessa una separazione, ma soltanto un' alterazione nelle qualità dell' orina, che dovrebbe d' altronde in istato di sanità esserne priva; e 2.° perchè non essendo li-

bero il passaggio alla bile per il fegato, ragion vuole, che assorbita, come dicea poco fa, esca essa per qualche parte; in quella guisa appunto che nell' ostruzione delle mammelle si osservano le altre separazioni alterate, e quindi la diabete lattea o i depositi lattei; come nell' ostruzione od altra malattia dei reni accade il sudore o il vomito urinoso; come ne' vizj dell' utero troviamo essere nata spesse volte l' escrezione sanguigna de' mestrui per le gengive, per le glandole lacrimali, per le mammelle, per li polmoni ec. Dovrebbe egli dirsi perciò, che la struttura e la distribuzione vascolare delle mammelle non è quella sola che possa separare il latte? che gli archi e le papille de' reni sono simili a' vasi della cute e dello stomaco? Che la lassezza e la moltiplicità de' vasi uterini, non che la particolare economia di quel viscere è comune al polmone, alle mammelle, alle parti esterne dell' occhio ec.? A me certamente non pare; e non trovo dietro questi principj assai ragionevole il dire ch' esiste e si genera la bile senza ch' essa abbia subito l' azione de' condotti epatici: poichè non è la bile propriamente detta quella di cui *universus sanguis oppletus est*, ma gli elementi che concorrono per la vena porta a formare la bile, essendo noto, che il sangue il quale scorre per questa vena è pregno di principj di tal natura, che insieme combinati nel fegato costituiscono la bile.

13. Ma io vedo, che se ad una ad una esaminar volessi le opposizioni fatte dal Sig. Wolff a coloro, li quali pensarono grande essere l' influenza de' vasi nella separazione degli umori animali, troppo mi discostarei dal principale argomento di questa qualunque Memoria. Una siffatta influenza nel produrre umori di color differente, fu dal Glissonio prima di noi sospettata: poichè facendo egli parola delle penne de' volatili così ragiona: *succi, quo plumae pennarum (elegantibus istis coloribus donatae) aluntur, priusquam ad illas plumas perveniant, neccessum habent, sive per cornu pennae, sive per medullam ejusdem, sive per utrumque percolari. Haud mirum igitur, si post tam accuratam tamque operosam colaturam, plumae variegatis pulcherrimisque coloribus imbuuntur* (a). E parlando della pelle, se è vero, che

(a) *Tractat. de partib. continent.* ec. Cap. IX.

una piccola alterazione sulla pelle del cavallo il più nero vi fa crescere il pelo bianco senza passare per li colori intermedj (*a*), da quale altra causa potrà ciò ripetersi, se non dalla perturbata disposizione de' vasi scorrenti per quella parte? Se le cicatrici che rimangono nella pelle degli Etiopi, dopo che questi andarono soggetti alle ustioni od ai tagli, sono bianche, non dovrà forse dirsi che si è distrutto non solo il nero reticolo sottoposto alla cuticola, ma ben anche la tessitura vascolare della cute stessa, sì che resa la pelle allo stato di sanità separa un umore corrispondente alla disposizione de' vasi che vi si ritrovano? Questa congettura, qualunque essa sia, parrà certamente più probabile di quella che propose il Sig. Le Cat per ispiegare lo stesso fenomeno; scrivendo che intanto rimane bianca la cicatrice, perchè si distruggono o si cambiano li tubuli nervosi che conducono l' *etiope animale*, dal quale deriva il colore de' Mori (*b*).

14. Dalle alterazioni di colore, alle quali vanno soggetti gli Etiopi all' occasione di alcune malattie stimò l'Albino dimostrata l' influenza che ha la crasi degli umori nel colorire la pelle; e mio Zio nella sopracitata Memoria espose alcuni casi morbosi, ne' quali cangiandosi la crasi si cangia negli uomini la tinta naturale. A tutto ciò per altro mi sembra che aggiungner si possa una particolare circostanza riferita nelle mie osservazioni sul colore del reticolo nella lingua (§. 1.). Il vitello nero lattante non ha il reticolo egualmente bruno, che il bue dello stesso colore: e ciò vuol dire, se non m' inganno, che quantunque la distribuzione vascolare del vitello sia tale, che separar debba un fluido sotto la cuticola capace di soffocare li raggi luminosi; pure la natura de' proprj liquidi blandi (come deggiono essere quelli di un animale ancor lattante) induce siffatta mutazione in quello stesso fluido, sì che non corrisponda perfettamente alle qualità che in esso dovremmo osservare; egualmente che le orine degl' itterici hanno alcune qualità dipendenti dalla mutazione indotta nella massa de'

(*a*) Maupertuis *Venus Physique Part. étrang.* Tom. IX. Artic. XXIV. Part. II. Chap. IV. del *Discours prélimin.*

(*b*) Si veda la *Collection Academ.*

fluidi dalla bile non separata, ed il sudore di coloro, che si cibarono di certe sostanze acquista l'odore proprio de' cibi medesimi.

15. Per le quali cose tutte dimostrato mi sembra: che le osservazioni da me istituite sulla lingua di molti animali di svariato colore ed età conducono a render certa la congettura esposta dal mio Zio sulla causa del vario colore degli uomini: cioè ch' esso dipenda dalla differente distribuzione de' vasellini cutanei, la quale poi dia origine ad una particolare separazione di umori; che questa singolare distribuzione de' vasi può supporsi esistente nella cute, atteso che dessa è dotata di classi differenti di vasellini; che altre opinioni recentemente pubblicate su questo argomento non soddisfano egualmente a tutte le quistioni, che possono essere proposte in simile rapporto; che v' ha qualche relazione fra il colore, di cui è dotato il tappeto della coroidea negli animali diversi, e quello della lor pelle; che il Wolff non oppose argomenti molto validi contro l' opinione di quegli Anatomici, li quali furono d'avviso che le varie separazioni degli umori dipendessero dall' influenza de' vasi in dissimile maniera distribuiti; e finalmente che dalle stesse mie osservazioni sulla lingua apparisce, esservi una discrepanza nel colorito per rapporto alla crasi degli umori.

Queste sono le ricerche e le riflessioni, che sul colore del reticolo Malpighiano mi venne fatto di radunare; le quali, se così il Pubblico ne giudicherà, formar potranno un' Appendice alle *Congetture* da mio Zio proposte su questo interessante argomento.

NUO-

NUOVO METODO PER ISTABILIRE I CONFINI DEI TERRENI.

Di Vincenzo Chiminello.

Ricevuta li 15. Febbrajo 1799.

QUanto utile sarebbe un metodo di stabilire i confini dei Terreni in modo che fossero sempre riconoscibili senza equivoco, se per malizia degli uomini, per alluvioni o devastazioni sparissero, come pur troppo avviene in decorso di tempo, ognun lo comprende, e specialmente chi avendo ricuperato per Legale sentenza il diritto sopra una terra poi non può entrarne in possesso, perchè non sa indicarla *pede*, *&* *digito* siccome vuole la Legge. Io pensando a questo importante argomento ho immaginato il metodo seguente, che propongo a considerare.

In mezzo di un terreno libero, e piano da confinarsi si tiri una meridiana AB (Fig. 1.) di sufficiente estensione, e se il terreno fosse acclive la si tiri fuori, o in qualche sito piano dentro il terreno medesimo; poi da un punto C tra li due A, B con sestante orizzontale fornito dei due soliti cannocchiali si miri ad un qualche oggetto non molto distante, come es. gr. torre, o grossa fabbrica, o marcata cima di un monte K, e si prenda l' angolo BCK; e all' altra parte (o pure alla stessa parte) dallo stesso punto C si miri ad altro oggetto L, e si prenda parimente l' angolo BCL, ma nello stesso tempo si osservino gli angoli di elevazione dei due oggetti; dai quali angoli si avrà un altro modo di riconoscere la meridiana, come vedremo. Ciò fatto, due dei termini che si vogliono porre per confinare il terreno si piantino sulle linee CK, CL, come in T′, T″, e si misurino tutte le distanze da C degli altri termini piantati a piacere, e comodo. In questo modo l' Agrimensore avendo tanti triangoli col vertice in C, quanti saranno li termini che piantò, concluderà l' area del terreno bene egualmente che coll' usato metodo, siccome è certo per Geometria; e avendo registrato nella carta della sua Perizia l' indicazione dei due oggetti K, L cogli osser-

vati angoli, e colle misurate distanze, potrà in ogni tempo ritrovare li smarriti confini.

Per ciò dimostrare premetto, che due meridiane tra se vicine possono considerarsi come parallele, e se lontane si può conoscerne la convergenza per li principj dati dall' Astronomia, o più comodamente in pratica si può valersi del metodo di semplice falsa posizione col ritrovato di una prima sperienza. Ora smarriti li già stabiliti confini di un terreno, si tratti di esplorare, quali fossero.

Dentro il dato terreno si tiri ad arbitrio una meridiana MN (Fig. 2.), e la si scorra sino a che da due punti S, V mirando agli oggetti anticamente notati K, L trovinsi gli angoli NVK, NSL uguali agli antichi angoli registrati BCK, BCL (Fig. 1.), poi si prolunghi KV sinchè taglj SL in C, e per C si tiri la AB parallela alla MN. Or è manifesto, che se tali due linee riescono tra se vicine, la parallela AB sarà l' antica meridiana, perchè l' angolo KCB è uguale a KVM, e l' angolo BCL uguale ad MSL.

Ma se tali due linee riescono tra se lontane, o se anche vicine si voglia operare con tutta esattezza, per il punto C (Fig. 3.) si tiri la vera meridiana *mn*, e in essa, come prima, si esplorino due punti *d*, *e*, da' quali trovinsi uguali gli angoli K*dn*, L*en* agli antichi KCB, BCL, e prolungata L*e* sino a che taglj K*d* in *c*, questo sarà finalmente il punto dell' antica meridiana, da cui furono presi li due angoli verso li oggetti K, L, e tirata *acb* parallela ad *mn*, sarà essa quell' antica meridiana che si cercava; e prendendo dal punto *c* tutto attorno gli angoli stessi che furono presi anticamente, e le distanze uguali alle registrate, si concluderà l' area giusta co' suoi veri confini, siccome è manifesto.

Se poi anticamente non si avesse potuto mirare che ad un solo oggetto, ancora il metodo vale, purchè ne sia stato osservato l' angolo di elevazione. Si tiri es. gr. la meridiana MN (Fig. 4.), e cerchisi un punto O, da cui mirando all' oggetto L, l' angolo LOM sia uguale all' anticamente osservato; poi si prolunghi LO, e scorrendo di quà e di là da O, si cerchi un punto E, da cui l' angolo di elevazione di L sia uguale a quello che fu osservato

nello stabilire l' antica confinazione; e sarà tal punto quello da cui sull' antica meridiana ebbe principio il sistema degli antichi termini, e la parallela FE sarà l' antica meridiana, se però tali due linee riescono tra se vicine; perchè l' angolo MOL è uguale ad FEL. (Fig. 1.)

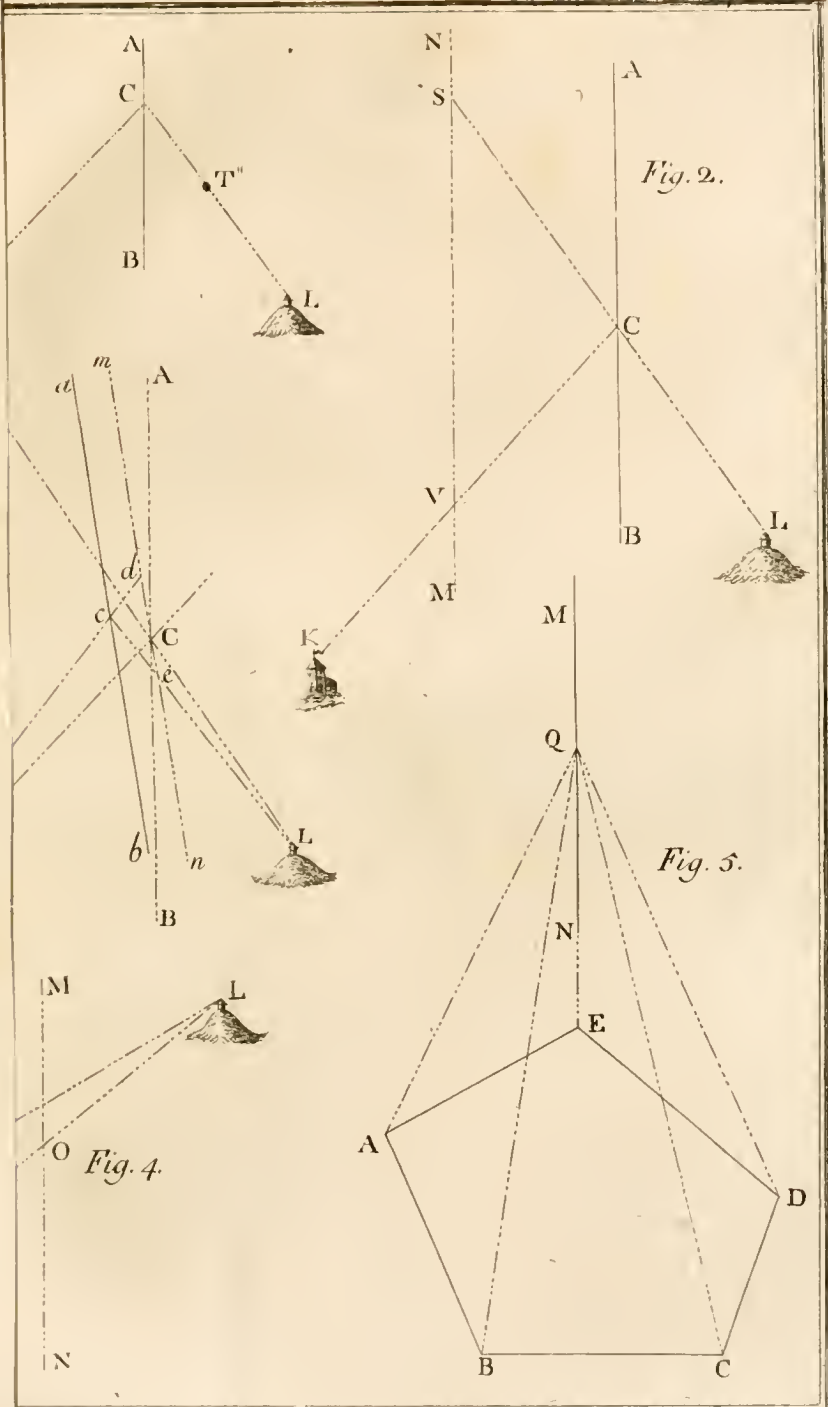
Ma se tali due linee riescono tra se lontane, per il punto E si tiri la vera meridiana HG, e si troverà in essa un altro punto *p*, da cui l' angolo H*p*L sarà uguale ad MOL, e prolungando L*p* si troverà un punto *q*, da cui l' angolo di elevazione dell' oggetto L sarà ancora lo stesso, e questo finalmente potrà tenersi come il vero punto dell' antica meridiana, da cui ebbe principio la confinazione che si vuole riconoscere, e la *qr* parallela ad *he*G sarà quella meridiana.

Che se il terreno da confinarsi sarà un monte, o un bosco, si tiri una meridiana fuori, se non puossi tirarla dentro, ad una qualsivoglia distanza, notandone il sito cogli angoli ad uno o due oggetti esterni per poterla sempre riconoscere, ma però a quella parte, ove si possano misurare le linee DQ, EQ, AQ (Fig. 5.), e le DC, AB, o pure gli angoli QDC, QAB, e tutti gli angoli DQE, AQE, DCQ, CQB, BQA. E' manifesto, che si avrà nota la somma di tutti li triangoli DCQ, CBQ, BAQ, da cui detratta la somma dei triangoli DQE, AQE si conoscerà l' area DCBAE, supposto il terreno orizzontale.

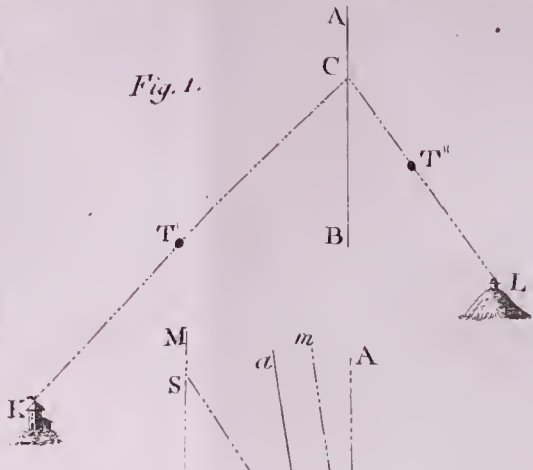
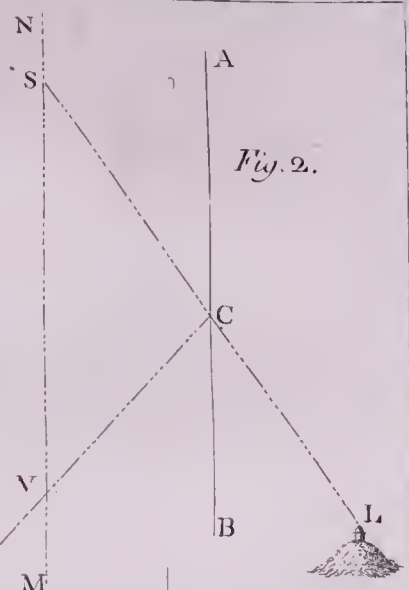
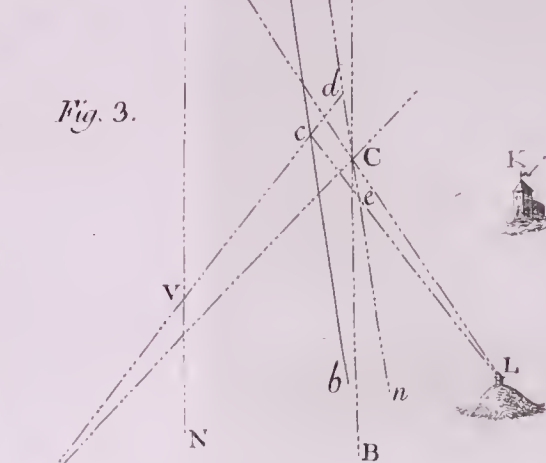
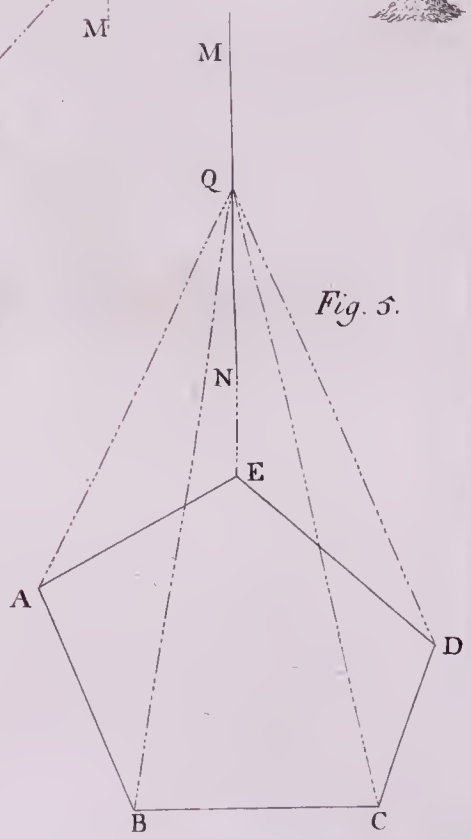
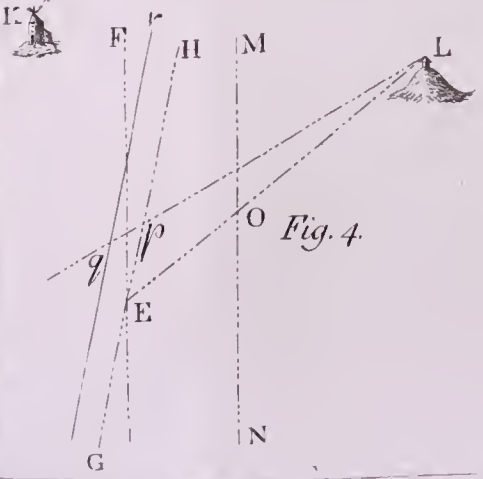
L' area dunque non sarebbe giusta, se il terreno fosse acclive, e bisognarebbe cercarla con altro metodo. Ma poichè quì si tratta principalmente di piantare i termini in modo che siano sempre riconoscibili, qualunque sia l' area, essendo legati alla meridiana per mezzo degli angoli osservati e delle notate distanze, col nostro metodo potrannosi sempre ritrovare, e saranno veramente ritrovati, se l' area risultante, qualunque sia, corrisponda a quella stessa, che fu conclusa anticamente.

Ma se il terreno fosse in regione deserta, e tanto disabitata, che non esistessero oggetti elevati poco lontani, nè pur monti, da mirare, il proposto metodo sarebbe insufficiente per ritrovare l' antica confinazione. In tal caso un gran possessore per assicurare i confini delle sue terre potrebbe erigere qualche solida piramide; e sarebbe anche

assai lodevole quel Governo, il quale ad imitazione degli Egizj ne facesse erigere quà e là molte sulle vie pubbliche di un paese disabitato.

Tal si è il mio pensiero e desiderio del metodo, che vorrei si praticasse nel confinare i terreni, e perciò esorto li Agrimensori a studiare un poco l'Astronomia per conoscere le diverse maniere di tirare una meridiana, ch' è il principio di siffatta operazione.

Soc. Ital. Tom. VIII p. 476.

G. Gajani sculp.

G. Gajani sculp.

SULLO STABILIMENTO D' ALCUNI NUOVI GENERI DI PIANTE.

DI GAETANO SAVJ AJUTO DEL PROFESSORE
DI STORIA NATURALE IN PISA.

Presentata da Antonio Cagnoli li 2. Dicembre 1798.

TOZZETTIA.

Famiglia natur. le Gramigne. Sistema Sessual. Triandr. Digyn.

Carattere generico.

Calice quasi romboidale, unifloro, di due *valve* triangolari, callose nell' angolo dorsale.

Corolla di una sola *valva* fatta a *follicolo,* aperta da un lato nella cima, e munita di una *resta* alla base.

Tre *Stami;* due *Stimmi;* un *Seme* ovale-compresso.

Tozzettia pratajola.

Tozzettia con spiga ovale, colle valve del calice compresse pelose nella carina, la resta articolata, e la guaina superiore gonfia.

TOZZETTIA.

Famil. natural. Gramineæ. System. Sessual. Triandr. Digyn.

Character genericus.

Calyx *gluma bivalvis, uniflora, subrhomboidea.* Valvæ *triangulares, angulo dorsali calloso.*

Corolla *univalvis.* Valva *folliculus, uno latere ad apicem longitudinaliter debiscens, basi aristata.*

Stamina 3. Stigmata 2. Semen 1. *ovato-compressum.*

Tozzettia pratensis.

Tozzettia *spica ovata, valvis calycinis compressis, carina pilosis, arista articulata, vagina superiori utriculata.*

Phalaris utriculata *panicula spicata, petalis arista dorsali articulata, vagina supremi folii spathiformi.* Lin. Spec. Plant., Scopol. Delic. Flor. & Faun. Insubr. Tom. I. pag. 28. Tab. XII.

Phalaris utriculata *panicula ovata spiciformi, glumis calycinis navicularibus, dorso dilatato, arista receptaculi glumis longiore.* System. vegetab. cur. Willden.

Gramen pratense spica purpurea ex utriculo prodeunte, seu gramen folio spicam amplexante. C. Bauh. Pin. pag. 3., Scheuchz. Agrost. pag 55. Tab. 2. fig. 3., B, D, G, H.

Alpiste à vessies. Encicl. method.

Scagliola de' prati. Flor. Pisana Tom. I. pag. 56.

Descrizione.

La *radice* è annua, sottile fibrosa. *I culmi* nascono molti insieme dall' istessa radice, son semplici, dritti, alti un piede o un piede e mezzo, cilindrici, glabri, articolati, piegati un poco alla base. Le *foglie* son lunghe da sei linee fino a tre pollici, larghe una linea, o una linea e mezzo, dritte o patenti, nella pagina inferiore glabre e lustre, nella superiore sottilmente striate e scabre all' ingiù. Le loro *guaine* son glabre, le inferiori strettamente applicate al fusto, quelle di mezzo un poco larghe, e la superiore larghissima, di figura ovale, e in essa è chiusa la spiga prima della fiorescenza; e all' ingresso di tutte le guaine è situata una *linguetta* bianca, triangolare, ottusa. La *spiga* è terminale, solitaria, dritta, densa, ovata, lunga circa un pollice, larga quattro o cinque linee, di color bianco-verdastro. Il *calice* è unifloro, di figura quasi romboidale, lungo tre linee e largo due, brevemente peduncolato, composto di due valve conniventi, compresse, triangolari, delle quali il lato maggiore è l' interno, e l' angolo esterno dorsale è gobbo, rilevato, e calloso: tali *valve* son biancastre nella metà inferiore, colle linee dei margini verdi e rilevate, intieramente verdi nella cima, col callo dorsale spesso rossastro, e la carina ciliata. La *Corolla* è formata di una sola valva fatta a follicolo, membranosa, aperta longitudinalmente nella cima da un lato solo. Lunga quanto il calice, di figura lanceolato-acuta, biancastra, con due linee verdi, conniventi nella cima, munita alla base di una *resta*, lunga cinque o sei linee, articolata verso la metà, inserita nel lato opposto all' apertura. Le *Antere* son bislunghe, lineari, smarginate in ambedue le estremità, lunghe una linea e mezzo, di color violetto quando sbocciano, poi giallognole, attaccate a filamenti capillari, pendenti fuori delle valve. Li *stimmi* son capillari e piumosi. Il *Seme* è ovato-compresso. Nasce in gran quantità nei Prati intorno Pisa, e fiorisce ai primi di Aprile. *Ann.*

Osservaz. Siccome tutte le altre *Phalaris* hanno la corolla bivalve senza resta, però non si può lasciar con esse, nel medesimo genere, la specie or descritta. Questa, per

la corolla, si approssima molto agli *Alopecuri*, ma la figura particolare del di lei calice impedisce che ad essi si possa unire. Ho dunque formato con questa un genere nuovo, che ho chiamato *Tozzettia*, in onore del mio Amico Sig. Dottore Ottaviano Targioni Tozzetti, Professore di Botanica nel R. Museo di Firenze, Autore delle *Instituzioni Botaniche*, e di varie altre Memorie inserite negli Atti della R. Accademia dei Georgofili.

SANTIA.

Famiglia natur. le Gramigne. Sistema Sessual. Triandr. Digyn.

Carattere generico.

Calice unifloro di due valve aristate.
Corolla di due valve.
Tre *Stami*, due *Stimmi*, un *Seme*.

Santia piumosa.

Santia con pannocchia spighiforme, calici alquanto ventricosi, aristati sotto le cime: una valva della corolla aristata, l'altra inerme.

SANTIA.

Famil. natural. Gramineæ. System. Sexual. Triandr. Digyn.

Character genericus.

Calyx *bivalvis*, *uniflorus*; *valvis aristatis*.
Corolla *bivalvis*.
Stamina *tria*, Stigmata *duo*, Semen *unum*.

Santia plumosa.

Santia *panicula subspicata*, *calycibus subventricosis*, *sub apice aristatis*: *corollarum altera valva mutica*, *altera aristata*.

Var. α *paniculæ ramis divulsis*.

Alopecurus monspeliensis *panicula subspicata*, *calycibus scabris*, *corollis aristatis*. Lin. Spec.

Phleum crinitum *calycibus linearibus*, *basi subventricosis*, *hispidis*, *aristis capillaceis longissimis*. Schreb. gram. pag. 151., tab. 20., fig. 3. coniungit cum Alopecuro paniceo Linnæi.

Agrostis panicea α *panicula subspicata*, *ramis*, *ramulisque fasciculatis*, *valvis calycinis alteraque corollina aristatis*, *arista corollina brevissima*. Willden.

Agrostis panicula oblonga, *calycibus æqualibus*, *terminatis aristis longis rectis*. Ger. prov. 80.

Gramen alopecurum majus spica virescente divulsa, *pilis longioribus*. Barrel. ic. 115. fig. 2., Scheuchz. Agrost. pag. 155.

Alopecurus altera anglica, maxima paludosa; seu gramen alopecuroides maximum. Jo. Bauh. Hist. 2. pag. 474., Moris. Hist. 3. pag. 19. Sect. 8. Tab. 4. fig. 8.

Var. β *panicula ramis adpressis*.

Alopecurus paniceus *panicula subspicata, glumis villosis, corollis aristatis*. Lin. Spec.

Agrostis panicea β. Willden.

Gramen alopecurum minus spica longiore. Scheuchz. Agrost. pag. 154.

Gramen alopecurum minus spica virescente divulsa. Barrel. ic. pag. 115. fig. 1.

Cauda vulpis monspeliensium, Alopecuros Theophrasti. Lob. ic. pag. 45.

Codino piumoso. Flor. Pisan. Tom. I., pag. 79.

Descrizione.

La *radice* è annua, sottile, e fibrosa. *I culmi* nascono molti insieme dall' istessa radice, son dritti, benchè un poco piegati alla base, cilindrici, articolati, lunghi da sei pollici fino a due piedi. Le *foglie* son lunghe da uno a quattro pollici, larghe al più due linee e mezzo, patenti, acute, glabre, striate e scabre all' ingiù in ambedue le pagine, con guaine strette, munite all' ingresso di una linguetta bianca, trasparente, lacera in cima, di figura quasi triangolare, lunga tre linee. La *pannocchia* è lunga da un pollice e mezzo fino a mezzo piede, composta di diversi gruppi di rametti ineguali disposti alternamente a ineguali distanze, più o meno aperti nel tempo della fiorescenza, lunghi al più un pollice, con secondarj pur disposti à gruppetti, e carichi di moltissimi rami fiori. Le *valve del calice* son lunghe una linea, un poco ventricose nella metà inferiore, quasi lineari nella cima, verdi nel dorso, bianche nel ventre e nei margini, asperse di minutissimi peli, i quali son più patenti nella carina; munita ciascuna di una *resta* lunga due o tre linee, che ad occhio nudo sembra liscia e terminale, ma che osservata con lente si vede esser minutamente dentellata, e piantata un poco sotto l' api[illegible] delle valve. Le *valve della corolla* son bianchiccie, tras[illegible]enti, ineguali: la maggiore lunga al più

più mezza linea intaccata in cima, con resta piantata sotto l'apice: la minore inerme, acuminata. Il *Seme* è piccolissimo, e ovale. Nasce comunemente intorno Pisa sugli argini, lungo i fossi, e per le strade. Fiorisce nel Maggio. *Ann.*

Osservaz. Anche a questa pianta era stato da Linneo assegnato un posto non conveniente, giacchè tutti gli *Alopecuri* hanno la corolla di una sola valva. Schreber, vedendo l'incongruenza, l'avea collocata nel genere *Plheum*, ma il rimedio non era stato troppo buono, poichè oltre il non essere in nessuno dei *Flei* le valve della corolla aristate, vi è ancora una gran differenza nei calici, i quali son veramente aristati nella specie in questione, mentre nei *Flei* son puramente dentati. Willdenow gli ha di nuovo mutato genere, ma neppur esso con esito troppo felice. Ei l'ha situata fralle *Agrostidi* colle quali è vero che ha molta analogia per i calici uniflori, e per le corolle aristate, ma ne differisce ancora essenzialmente per la struttura dei medesimi calici, aristati in questa specie, e mutici in tutte le *Agrostidi*. Nella formazione dei generi delle gramigne bisogna molto attendere alla figura dei calici, dando questa dei caratteri, che servono molto bene per fare delle divisioni, più che è possibile, naturali; e se non si fosse considerato questo carattere, si sarebbero potuti unire i *Flei* e le *Crypsis* colle *Agrostidi*, le *Segali* con i *Tritici* &c.

Considerate tutte queste cose, ho formato con questa gramigna un nuovo genere, al quale ho dato il nome di *Santia* in onore del mio Amico Signor Giorgio Santi Professore di Storia Naturale nell' Università di Pisa, Autore dell' *Analisi dell' Acque dei Bagni di Pisa*, e dei *viaggj per la Toscana*.

Non è possibile avere i generi veramente naturali ed esatti, poichè in qualunque serie di individui che uno si possa immaginare, disposta in qualunque maniera si voglia, si osserva sempre, che i caratteri non si conservano nel medesimo grado, nè essi soli in tutti gl' individui della serie, ma che vanno a poco a poco perdendo di intensità, e che a poco a poco subentrano dei nuovi caratteri, cosicchè in qualunque luogo si voglia porre il principio e il termine della serie, mai si potrà trovare il vero principio e il ve-

ro fine dei caratteri. Per avere i generi naturali converrebbe, che uno o più caratteri si conservassero esclusivi per un numero di individui, il che in natura non segue, e noi vediamo fralle specie una graduata e continua progressione di somiglianze, cosicchè potrà riuscire di trovare tutti gli *Anelli* della *Catena* o della *Rete* degli esseri, ma non già di formare delle divisioni staccate e distinte.

Per altro i generi che noi abbiamo, benchè imperfetti, hanno reso molto servizio alla scienza, e se non è possibile perfezionarli, bisogna almeno migliorarli per quanto si può, e non lasciarvi le specie che mancano dei caratteri generici, o ne hanno dei contradittorj. Questo è appunto quello di cui si occupano al presente i Botanici, e le mutazioni dei generi cagionate dalle osservazioni, e dalle nuove scoperte, son tali e tante, che la Botanica ha cangiato quasi totalmente di aspetto. E' per altro vero che tutti questi lavori, che potrebbero essere utilissimi, saranno in gran parte inutili, e serviranno piuttosto di confusione, se nel tempo stesso non si pensa a renderli facilmente alla portata di tutti, e a conservare unica la nomenclatura.

Egli è pertanto necessario.

1.° Di convenire fra i Botanici dei nomi da ritenersi per quelle specie che hanno di già sofferta una, o più mutazioni di genere.

2°. E di fare un *Pinace* esatto, ragionato con giusta critica, di tutto quello che è stato scritto da tutti i Botanici su tutti i vegetabili finor conosciuti.

Ma non essendo questa un' opera eseguibile da poche persone, bisognerebbe che una Società Botanica assegnasse a ciascuno dei suoi Membri, i quali dovrebbero essere sparsi per tutta l' Europa, una determinata *Famiglia di piante* perchè di quella ne compilasse il Pinace, correggesse i generi difettosi, e fissasse i nomi da ritenersi.

Questo lavoro, benchè grande, diviso in molti sarebbe facilmente eseguibile, e mi pare che tutti i Botanici debbano vedere la necessità di intraprenderlo.

Le *Riforme*, e gli *Auttarj* non possono di gran lunga produrre il medesimo effetto, poichè supponendo ancora che sian fatti nel miglior modo possibile, oltre che un' uomo solo non può aver notizia di tutte le nuove scoperte,

nè tutto conoscer chiaramente, nè tutto esaurire, è certo che non potrà nemmeno avere una tale autorità da rendere universali i nomi da lui impiegati. Un altro Autore che in seguito si metta a una simile impresa disapprova le mutazioni del primo e ne fa delle nuove, che poi sono alterate da un altro, e così si moltiplicano i nomi, e si accresce e si perpetua la confusione. Abbiamo per esemp. un genere *Thouinia* della Famiglia dei *Gelsomini* stabilito da Thunber, e un genere *Thounia* fatto da Smith di una pianta della famiglia dei *Convolvuli*, la quale da Commerson e da Lamarck è chiamata *Humbertia*, e *Endrachium* da Jussieu. Lo *Schoenus aculeatus* di Linneo è stato successivamente nei generi *Phleum*, *Anthoxanthum*, *Agrostis*, *Pallasia*, *Antitragus*, *Crypsis*. Il *Polygonoides* di Tournefort fu chiamato *Calligonum* da Linneo, *Pterococcos* da Pallas, *Pallasia* da Schreber, e nel Syst. Veget. di Federigo Gmelin trovansi la *Pallasia Caspica*, e il *Calligonum polygonoides* come se fossero due piante diverse. Le *Passerine pilosa*, e *prostrata* di Linneo Suppl. furono da Forster situate nel genere *Banksia*, da Federig. Gmelin nel genere *Cookia*, e da Willdenow nel genere *Pimelea*. Il genere *Dombeya* di Lamarck e di Schreber contiene una pianta delle *Conifere*, la *Dombeya* di l' Heritier una delle *Bignonie*, le *Dombeye* di Cavanilles molte malvacee; così nel genere *Cavanilla* di Federig. Gmelin si trovano le *Dombeye* di Cavanilles, nel genere *Cavanillea* di Lamarck una pianta della famiglia delle *Eriche*, e nel genere *Cavanillesia* di Ruiz una malvacea particolare col pericarpio alato come quello dell' olmo. Infiniti esempi si trovano ora in Botanica di uno stesso nome assegnato a diverse piante, e di piante indicate con nomi diversi. Ogni Autore vuol sostenere i suoi nomi, ognuno ha i suoi seguaci: si disputa, e si perde del tempo inutilmente. Il diritto di anteriorità che dovrebbe decidere sulla preferenza del nome non è sempre facile a provarsi, ma provandosi ancora non basta per determinare l' opinione universale, la quale sicuramente non potrà determinarsi se non che da un ceto di Botanici rispettabile per il numero e per il merito. Lamarck ha uniti gli *Spilanthus* colle *Bidenti*, le *Athamanthe* di frutto glabro con i *Selini*, i *Tordilj* di frutto spinoso colle *Caucalidi*, i *Migli* colle *Agrostidi* ed ha fatto bene, ma queste sue

Ppp 2

utili correzioni non sono state abbracciate da tutti. Il genere *Calamagrostis*, come si trova nel Syst. Veget. di Federigo Gmelin, è molto giusto, perchè riunisce quelle gramigne, che per il numero dei fiori non possono stare nel gen. *Arundo*, e non convengono colle *Agrostidi* per la corolla pelosa. Willdenow per altro non l' ha adottato. Così è in libertà di ciascuno di disapprovare, anche senza ragione le buone riforme dei predecessori, il linguaggio Botanico diventa una cosa arbitraria, cresce il numero dei libri insieme col bisogno di consultarli e la difficoltà di procurarseli, e l' enorme fatica di imparare una spaventosa farragine di nomi ritiene dal darsi a questo studio, malgrado le utilità che se ne posson ritrarre: e se una ben fatta riforma non toglie questi inconvenienti, la parte più amabile, più ricca, e più facile della Storia Naturale sarà un giorno o l' altro necessariamente abbandonata.

Sulla *Magnolia grandiflora*.

Quest' albero, che è sicuramente il più bello di quanti sono stati trasportati dall' America in Europa, vegeta felicemente nell' orto Pisano, ove fu introdotto nel 1787 mercè le cure del Sig. Direttore Giorgio Santi. Dall' altezza di poco men di un piede che aveva a quell' epoca, è cresciuto adesso fino a tredici piedi e mezzo, ed il fusto ha quattordici pollici di circonferenza verso la base. E' ormai abbastanza conosciuto in Italia, ed io ne parlo a solo oggetto di notare alcune particolarità dei suoi fiori. Quest' Anno (1798) ha principiato a fiorire il dì 10 Giugno, ed ha seguitato fino a tutta la prima settimana di Luglio. Le *bocce* dei fiori hanno una figura ovale-conica acuminata, e son coperte da una Spata quasi coriacea, di color giallo-sudicio, pelosa all' esterno, internamente glabra, la quale, nel punto della fiorescenza si apre longitudinalmente da un lato, si stacca circolarmente di sotto al fiore, e cade. Non vi è che Jussieu il quale abbia parlato di questa spata: egli però la chiama = *una brattea che circonda il calice, fessa longitudinalmente, e caduca*. Linneo, e tutti i Botanici assegnano alla Magnolia un calice di tre foglie ovali, concave, petaliformi, caduche, e nove petali; e nell' Enciclopedia

si dice che tali foglie calicinali sono allungate, strette, rossastre. Un calice siffatto in questa specie non vi è. Caduta la spata, e aperto il fiore, tutti i petali che compariscono son veri petali, e non si scorge in nessuno di essi differenza alcuna, nè per la proporzione, nè per il sito, nè per la figura, nè per la consistenza, nè per il colore, nè per la durata. Alcuni fiori hanno nove petali, alcuni dieci, altri undici, altri dodici. Onde, per questa specie, bisogna dire che ha per *Calice una Spata coriacea, di un sol pezzo, fessa longitudinalmente da un lato, caduca, e molti petali*. I fiori non si conservano intatti più di tre giorni; a quest' epoca, e anche prima, i petali principiano ad arrossire, e il quarto giorno cadono. Il diametro del fiore, intieramente aperto, è al più dieci pollici. I petali vanno gradatamente diminuendo di grandezza verso l' interno: son crassi, candidi, largamente ovati, appuntati in cima, ristretti alla base. Il germe è lungo un pollice e mezzo, retto da un ricettacolo conico, più lungo di mezzo pollice, sul quale son situate a più ordini le antere, strettamente imbricate, lunghe otto linee, spatolate, munite in cima di una linguetta triangolare, appuntata, tutte di color giallo-pallido, toltane una piccola callosità alla base, che è di color rosso, e gli serve di attaccatura. Il polviscolo è contenuto in due logge longitudinali, e lineari, dalla parte interna. Il germe è conico, ed ha gli stili subulati, curvi in fuori, colli stimmi lineari, pubescenti. I frutti son lunghi al più cinque pollici, di diametro, alla base, di circa due pollici, di figura ovale conica ottusa, formati di cassule compresse triangolari, le quali hanno il lato anteriore rotondato, e sono bivalvi, e uniloculari, con valve grosse, coriacee, persistenti, coperte internamente da una membrana bigia e lustra. Tali cassule contengono uno o due semi, e son disposte intorno al prolungamento del ricettacolo in modo da formare uno strobilo. I semi son lunghi sei o sette linee, larghi tre, alquanto compressi, ottusi nelle estremità, di color rosso-scarlatto, e son formati di un involucro esterno, carnoso, di sapore alquanto simile a quello del Calamo aromatico, poi di un guscio legnoso sottile e fragile, e finalmente di una membrana bigio-giallognola: ma questi due involucri interni non rivestono in-

teramente la mandorla, la quale nell' estremità superiore è coperta solamente dall' involcuro carnoso. I frutti maturano nell' Ottobre: allora diventano rossi, di verdognoli che eran prima, le cassule si aprono verticalmente, ed escon fuori i Semi, i quali restano pendenti e sospesi perchè attaccati a un filetto bianco inserito in una smarginatura nell' estremità inferiore del Seme, e nel fondo della cassula. Un tal filetto è composto di molti sottilissimi fili avvolti a spira, è lungo un pollice o poco più, e sporge fuori della cassula circa tre linee. I semi hanno germinato nel Maggio, tanto quelli seminati subito dopo la maturazione, che quelli conservati fuori di terra fino all' Aprile.

SOPRA IL SAL SEDATIVO D' HOMBERGIO O SIA ACIDO BORACICO, CHE SI TROVA AI LAGONI DEL VOLTERRANO, E DEL SENESE, E SOPRA DIVERSI BORATI CHE PUR IVI SI TROVANO.

COMMENTARIO I.

Di Paolo Mascagni.

Ricevuta li 8. Maggio 1799.

Notizie preliminari riguardanti il Borace di soda che viene trasportato dalle Indie in Europa, e l' Acido Boracico.

Il Borace del Commercio, che viene anche denominato *Tinkal Crisocolla*, è una sostanza salina neutra composta dall' acido boracico e dalla soda. Ci vien portata dall' Indie Orientali sotto diversi aspetti. Ora rassomiglia a una terra bigiastra in grumi, assai pesante, di un sapore di zucchero, e d' alkali di soda, o di sal marino, con cui sono mescolati dei corpi estranei terrei, e petrosi colorati diversamente, contenendovisi ancora dei cristalli verdastri e come romboidali di un borace semitrasparente, e in tale stato si nomina *Borace bruto*, *Borace grasso* dell' Indie, e viene da Gomnon, e da Bengala. Un borace quasi tutto in cristalli viene inoltre per Caravana da Bender Abassy a Hispahan e fino Gihlan; d' onde s' imbarca sopra il mar Caspio, si trasporta a Astracan, appresso per Terra a Pietroburgo, e di quì ad Amsterdam. Si trova in commercio anche del borace in pani, che rassomiglia a del zucchero candido poco trasparente, o a un ammasso di cristalli confusi di Tartaro vitriolato, e si chiama Borace in massi della China (1).

---

(1) Vallerio nella sua mineralogia ne distingue tre varietà, nominandole come appresso. Primo *Borax nativus purus qui cristallina vel farinacea alba apparet facie*. Secondo *Borax nativus terra grisea involutus*. Terzo *Borax nativus pinguedine involutus Tincal saponaceus*.

Il commercio di questa sostanza salina fu un tempo nelle mani dei Veneziani, che la raffinavano purificandola (credo io) col mezzo ordinario usitato per purificare i sali. Al presente è passato nelle mani degli Olandesi che la raffinano, e la mettono in commercio sotto il nome di *Borace raffinato*. Il valore del Borace bruto ed in specie di quello di Caravana è superiore al valore del raffinato, onde potrebbe credersi, che gli Olandesi ne accrescessero la dose coll' aggiunta della soda.

Abbiamo diverse relazioni sopra la maniera che si tiene all' Indie per avere il Borace. In alcune si riferisce che nel Thibet in un luogo denominato Sembul si estrae da un gran lago, dopo che per la forza del Sole si è evaporata una porzione d' acqua, e dopo che per mezzo di fosse se n' è fatta uscire una quantità sufficiente a facilitare il lavoro dell' estrazione. Questo sale è biancastro, formato a strati, ha un gusto alkalino, e si chiama sal di Persia. In questo stato è inservibile per saldare, gli manca l' untuosità del Tinkal, che gli si dà a piacimento. Del Tinkal si servono le donne Tartare per ammorvidire la pelle delle braccia, e del viso. Da questa relazione si rileva, che il sale che si estrae dai laghi, è una vera soda, e che per ridurlo in borace le aggiungono il Tinkal, che deve essere un acido boracico, che si troverà nel Thibet, come si trova in Toscana, avendo il nostro acido boracico naturale la qualità di render morvida la pelle.

Inoltre si riferisce che si forma, mescolando insieme una terra bigiastra sabbionosa grassa, che talvolta è dura ed in forma di pietra, la quale ammollisce e si fonde esposta all' umidità; un' acqua areata, lattea, acre, lissiviale e come saponosa, che nasce nell' istesso luogo ove si trova la suddetta terra; ed in fine un' acqua della consistenza di una gelatina chiarissima, che si trova in Persia in fosse assai profonde vicino a una miniera di Rame: che mescolate le dette sostanze se ne fa la lissia, si fa evaporare il liquore alla debita consistenza, e appresso essendo alquanto raffreddato si versa in fosse ricoperte d' un intonaco d' argilla bianca, si coprono poi coll' istessa materia fino ad una certa altezza, e in termine di tre mesi si trova una deposizione terrosa bigiccia di un sapore viscoso nauseante,

mes-

mescolata con alcuni cristalli verdastri più salati. Si scioglie di bel nuovo questa deposizione procedendo come sopra, si versa il liquore in una fossa simile alla prima, due mesi dopo vi si trova similmente una deposizione terrosa, ma più salina, ripiena di un maggior numero di cristalli più regolari, semitrasparenti, e in questo stato si porta in Europa sotto il nome di *Borace bruto*. Da questo processo pure può rilevarsi, che la terra bigia sabbionosa grassa, che talvolta è dura, ed in forma di pietra, che s' ammollisce e si fonde esposta all' azione dell' acqua, non può esser altro che il nostro acido boracico, che pure si trova in tal forma ai Lagoni, e che questo vien mescolato colle soluzioni d' altro acido boracico.

Baumé ha dato un processo per fabbricar del borace; che consiste in far digerire separatamente il grasso con delle materie vitrescibili molto attenuate, come la sabbia la terra d' allume l' argilla il quarzo e un poco d' acqua. Su ciò sono state fatte da altri delle prove senza successo.

Si è detto che il borace è un composto di soda, e d' un acido particolare, che va sotto il nome d' acido boracico. La scoperta di questa sostanza si deve ad Hombergio, che negli atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' An. 1702. descrisse il primo *un processo* per ottenerlo per sublimazione dal borace di soda unito con sulfato di ferro calcinato e con acqua. Il detto Autore lo credè efficace a sedare la smania nelle Febbri ardenti; e siccome si figurava che il vetriolo concorresse alla sua formazione, lo chiamò sal volatile narcotico di vetriolo; appresso fu nominato Sal sedativo d' Hombergio.

Luigi Lemery fece delle sperienze sul borace, che furono rese pubbliche negli atti della suddetta Accademia An. 1728. Se ne ebbe per resultato, che combinando colla soluzione di borace qualunque dei tre acidi minerali allora consciuti si poteva ottener per sublimazione l' acido boracico. Geofroy unendo i detti acidi minerali alla soluzione di borace osservò che comparivano nella soluzione i cristalli di acido boracico e si depositavano, che poi evaporando s' otteneva altra quantità dell' istesso sale, ed in fine essendosi servito dell' acido sulforico ritirò un zulfato di soda, ciò che provava l' esistenza della soda nel borace. A Baron

si deve una più esatta cognizione del nostro sale (Accademia suddetta An. 1745. e 1748.) Osservò che gli acidi vegetabili lo decomponevano nell' istesso modo dei minerali, ed avendo unito l' acido boracico alla soda riformò il borace, e per la sintesi restò confermato che il detto sale era un sal neutro composto di sal sedativo, ed alkali minerale.

Sciogliendo il borace nell' acqua, si separa dal medesimo una sostanza terrosa. Fu creduto da alcuni, e in specie da Cadet che questa contenesse del rame ed entrasse alla composizione del sal sedativo, e che questo sale differisse secondo la qualità dell' acido; ciò fu appresso smentito da Baumè che provò l' identità dell' istesso sal sedativo qualunque fosse l' acido, che avesse servito di mezzo. Fu provato che la sostanza terrosa era estranea, e semplicemente mescolata e unita all' alcali, e all' acido boracico, e fu confermato che il borace è composto dall' acido boracico sempre identico, e della soda.

Fino al 1778. non si conosceva che il sal sedativo tirato dal borace. A quest' epoca il Sig. Hoefer Soprintendente alle Farmacie di Pietro Leopoldo Granduca di Toscana nell' analizzare le acque di un Lagone di Monterotondo, denominato Cerchiajo, a cagione che le sue acque calde e il suo vapore servono a render pieghevole il legno per ridurlo in Cerchj, trovò che vi si conteneva del Sal sedativo alla dose di 36. grani e $\frac{2}{3}$ per Libbra, (l' acqua essendo stata presa il 10. Novembre 1777.), e secondo l' ultimo esperimento alla dose di gr. 72 (l' acqua fu presa il 9 Giugno 1778). Analizzando appresso le acque di un Lagone di Castel nuovo ne ricavò gr. 40. per Libbra.

Nel mese di Febbrajo del 1779 fu da me ritrovato ai Lagoni di Montecerboli, e di Castel nuovo il Sal sedativo concreto, e nel mese di Maggio dell' anno suddetto a quelli di Monte Rotondo, tanto a quelli vicini al Paese che a quelli denominati dell' Edifizio. Trattai in breve di questo concreto salino nel primo mio commentario sopra i Lagoni del Volterrano e del Sanese, pubblicato nel mese di Settembre dell' anno suddetto.

Nell' anno 1788. Westrumb (1) analizzando dei cristalli pietrosi che si trovano a Lunebourgh nel gesso, trovò che alla composizione di questi cristalli per la massima parte entrava l' acido boracico, che era unito alla calce e alla magnesia, onde questo preteso quarzo cubico lo denominò Borate magnesiaco calcare. Hëyer (2) pure esaminò il detto quarzo cubico e vi trovò egualmente il sal sedativo.

Nell' anno 1791. (3) M. Martino Wittk, avendo lasciato riposare l' olio che egli aveva ottenuto dalla distillazione dell' olio delle Montagne del Monte Carpazio, trovò in termine di quaranta giorni dei Cristalli al fondo del vaso; raccolse i detti cristalli, e li fece sciogliere nello spirito di vino: l' Alkool dopo questa dissoluzione bruciava con un color verde, onde ne conclude che fosse del Sal sedativo. Si è trovato dunque il Sal sedativo in abbondanza sciolto nelle acque termali dei Lagoni del Volterrano e del Senese, si è trovato concreto presso gli stessi Lagoni, si è trovato entrare alla composizione di una specie di quarzo cubico colla magnesia e la calce, e in fine si è trovato nel Petroleo.

L' uso che si fa del borace nelle arti, e l' estensione maggiore, che potrebbe avere se non fosse a un prezzo sì alto, devon rendere interessante qualunque lavorio che mostri il mezzo di accrescer la massa di questa sostanza nel commercio, e così renderla più vile, per estenderne l' uso a vantaggio degli uomini. Questo motivo mi ha indotto a intraprendere delle sperienze sul nostro acido boracico Toscano, e a renderle pubbliche in tanti commentarj. Questo primo sarà diviso in quattro parti: nella prima darò un' idea generale dei Lagoni; nella seconda esporrò l' esame di diverse qualità di acque, che contengono diversa dose di acido boracico; nella terza tratterò delle diverse qualità di concreti, che contengono acido boracico, e di quello che potrebbe tirarsi dalle pietre terre e loti; nella quarta

Qqq 2

(1) Hist. de la société des Curieux de la nature de Berlin; année 1788. Tom. IX. pag. 1.

(2) Extraits des Annales de Chymie de Crell; An. 1788. part. VII. pag. 21. Art. 3.

(3) Crell Annales de Chymie An. 1791.

ed ultima, del metodo che potrebbe tenersi per estrarne l'acido boracico, formarne il borace, e metterlo in commercio.

Idea Generale dei Lagoni del Volterrano, e del Senese.

P A R T E I.

Si chiamano Lagoni (1) nel Volterrano e nel Senese certe aree spaziose di Terreno situate in qualche Valle, o nella pendenza di qualche Monte o Collina, piene d' eminenze, d' incavi, di dirupi, di fossati, di caverne, di varia grandezza e figura, spogliate più che altro di vegetabili, colorate diversamente, dominandovi un biancastro; d' onde si vedono elevare, più quà e più là, a maggiore e minore altezza, delle varie masse di bianchi vapori a guisa di nubi, che si spargono e si dileguano nell' aria, facendo sentire a distanze considerabili forte odore di fegato di zolfo; ed ora si manifestano diverse sorgenti di acqua minerale calda, che a luoghi vien fuori limpida e quietamente, e a luoghi è più o meno torbida, per l' agitazione in cui è tenuta continuamente dai vapori ed esalazioni, che si sprigionano dal fondo con diverso grado di forza per l' aperture che vi sono, e che nell' attraversarla, secondo la mole e la densità del fluido contenuto negl' incavi, e secondo la forma degl' incavi stessi, producono un bollore molto variato, che fa sentire all' orecchio del romore nell' istesso mo-

(1) Il nome di Lagone, derivato corrottamente dal Latino *Lacunæ*, è stato preso per accrescitivo di Lago, e la maggior parte degli Oltramontani hanno creduto falsamente, che il nostro acido boracico si trovasse in Laghi grandi.

La cavità che contiene le acque del Lagon cerchiajo, che è il più grande di quelli di Monterotondo più vicini al paese, è lunga braccia 20. soldi 2. quattrini 2., larga braccia 14. e mez.; la sua profondità, nel luogo di mezzo ove si eleva uno dei maggiori bollori, è braccia 3. e mez.; dal detto luogo verso le sponde la profondità diminuisce a poco a poco; e si vede che la detta cavità è fatta a guisa di catino, e deve esser così perchè l'acqua spinta dal bollore verso le sponde a ondate, a misura che se ne allontana, depone successivamente di quel loto che in copia contiene.

do variato. In alcuni luoghi i Lagoni, attese quelle nuvole di vapori, che di continuo s' inalzano dal suolo, e si fan vedere a delle gran distanze, sono detti Fumacchj, e finalmente per il continuo moto che si osserva in tali siti sono detti anche Bulicami.

Esaminando il suolo dei Lagoni, si rileva che son posti in monti secondarj, o in colline, le quali riconoscono la sua origine da deposizioni seguite nel tempo, che vi soggiornava il mare, trovandosi nelle vicinanze ed anche in luoghi più eminenti dei Testacei marini. La disposizione degli strati delle diverse qualità di pietra, e in specie dell' arenaria, tra i quali a luoghi a luoghi sono interposte delle sostanze bituminose, lo conferma pienamente. Ai Lagoni e nelle vicinanze non si trova alcun vestigio di Vulcani estinti.

Intorno ai Lagoni si trovano delle Pietre ove predomina la sostanza silicea, che diremo quarzose; se ne trovano di quelle, che per il predominio della sostanza calcaria possono dirsi calcarie; altre per il predominio dell' argilla argillose; e in fine delle composte. Fra le quarzose si trova un quarzo impuro, che contiene anche dell' alumine; è una specie di silex corneus biancastro e colorato diversamente, che contiene molta alumine.

Fra le calcarie, lo Spato, l' Albarese ossia Albazane che si vede e in massi e a Strati interposti a luoghi alternativamente con quelli del silex corneus: fra le argillose si trova uno Schisto che abonda molto in sostanza ferruginea, colorito ora di un bigio più e meno cupo, ora di un rossastro oscuro intersecato da filoni di una specie del detto silex corneus più oscuro abbondante in sostanza ferruginea: questo Schisto si divide in sottili lamine, e subisce una specie di decomposizione riscaldandosi molto. Si trova disposto a strati, e occupa delle estensioni considerabili in specie a Monte rotondo. Delle composte la pietra arenaria di diversa grana è quella che abbonda molto ai Lagoni, si trova in ammassi, e a strati. Le indicate qualità di pietra presso alcuni Lagoni si trovano tutte, presso altri non se ne trovano che alcune. Delle terre ve ne sono ove predomina la silice, altre ove predomina l' argilla variamente colorita, e vi si trova una terra zulfurea, che resulta

dalla divisione delle diverse pietre, dalla mescolanza colle terre, e dall' unione con esse del zolfo.

In tutte le qualità dell' indicate pietre, ma in maggior copia nell'arenaria, a luoghi a luoghi si vede del sulfure di ferro sparso quà e là nella sostanza della pietra, in cristalletti isolati, in mucchietti, oppure in ammassi. Esaminando poi le rotture dei dirupi se ne trovano grandi ammassi, e disposti a strati, servendoli più che altro di matrice l' arenaria. Nell' istesse rotture se ne vedono in alto penetrati dall' acqua, che han concepito calore e si decompongono, mentre che in basso non sono penetrati e si conservano senza che vi abbia luogo nel suo interno la decomposizione.

Se si visitino i Lagoni lungo tempo dopo la pioggia, si vede il suolo tutto ricoperto, ove più ove meno, di fioriture e di masse saline, più che altro biancastre, ma in alcuni luoghi colorite di giallognolo di un verde cupo di un color d' ocra composte di filetti, le quali esaminate si trova predominare in esse, ora l' acido boracico mescolato con altri sali fra i quali anche dei borati, ora un borate ammoniacale, ora un zolfato d'ammoniaco, ora un zolfato d' alumine, ora un zolfato di ferro, ed ora un zolfato di calce, e qualche rara volta un zolfato di magnesia.

La terra, o le pietre sotto tali fioriture si trovano calde ed umide, e penetrate dall' istesse sostanze saline, che formano le dette fioriture e masse, che ricuoprono l' esteriore; lungo i fossati, sopra il loto che si deposita alle sponde e su le pietre si manifestano per un tratto considerabile le dette fioriture procedenti dalle sostanze saline, che si contengono nell' acqua, e nel loto portato via dal suolo istesso dei Lagoni, che venendo la pioggia vengono sciolte e trasportate dall' acqua.

Il suolo dei Lagoni si riscontra ovunque umido, e riscaldato variamente da pochi gradi al di sopra della temperatura dell' atmosfera fino al di sopra dell' acqua bollente. Vien riscaldato dal calore che s' eleva dall' interno col vapore acquoso insieme con diverse sostanze sotto forma di fluidi aeri-formi, sorgendo ove quietamente ed insensibilmente a poco a poco dal Terreno, ed ove per delle aperture di vario diametro, da poche linee a molti pollici e un

piede, con maggiore e minore impeto, onde formano un leggiero sibilo e uno strepito che si fa sentire a cinque e sei miglia di distanza, tanto è grande l' impeto con cui vien fuori per certe aperture, colle sue gradazioni intermedie fra questi estremi.

Delle dette aperture se ne trovano negli incavi ove si contiene l'acqua, e allora non si vedono, e si vede soltanto l' acqua agitata dai bollori più grandi e più piccoli, che muovono variamente l' acqua secondo il diverso impeto e il diametro dell' apertura da cui si sprigionano le suddette esalazioni, sollevandola appena le bolle che vengono dalle più piccole aperture, ed inalzandola a due e tre braccia i torrenti che si elevano dalle aperture più grandi, essendovi all' estremo variate le gradazioni intermedie. Ciò si vede, quando tali incavi nella Stagione estiva non sono proveduti d' acqua, e che le aperture rimangono all' asciutto, contandovisi tante aperture quanti erano i bollori che comparivano; se ne trovano anche all' asciutto, e nelle parti elevate, e nelle pendenze ove l' acqua non si può raccogliere, d' onde si vede uscire e si ode lo strepito variato come sopra.

Il vapore acquoso mescolato con diverse sostanze forma un fumo bianco, che elevandosi dalla superficie dell' acqua per la perduta forza viene a folate, e di mano in mano che si elevano i Bollori, e poi lentamente sorge da tutta la superficie dell' acqua istessa riscaldata ove sotto il grado dell' acqua bollente, ed ove al di sopra a motivo della sostanza terrosa, che vi è mescolato. Dalle aperture ove non è acqua si eleva di continuo il vapore medesimo con più impeto, ed in principio la massa è concentrata, poi di mano a mano che va perdendo di forza, nel sollevarsi si espande, ed occupa uno spazio di gran lunga maggiore; tanto il vapore che si solleva dall' acqua, che l' altro si dilegua insensibilmente per l' aria, o sciogliendosi nell' istessa, o raccogliendosi in piccole goccioline, che si precipitano, e si senton cadere nelle vicinanze; il diverso stato dell' atmosfera concorre a far sì che si alzino simili torrenti di vapori a maggiore, e minore altezza, servendo perciò l' indizio agli abitanti dell' adjacenze, come il Barometro al fisico, della serenità, se si vedono depressi, e dalla Pioggia

se si vedono elevati. Questi vapori colle altre sostanze, che contengono nell' appressarvisi fan sentire un odore di fegato di zolfo, e a luoghi di petroleo. La superficie del corpo e le villosità che la ricuoprono si caricano d' un immenso numero di minute goccioline, come se ne caricano le vesti che hanno una peluria. Le carni sembra che prendano un color più fosco e tanto esse che i vestiti per del tempo fanno sentire a delle Persone assuefatte all' odor dei Lagoni un odor di zolfo. La respirazione non rimane offesa anzi vi si effettua con maggior facilità e sembra vi si respiri molto meglio. In molte malattie polmonali potrebbe essere efficace; il Bestiame Bovino nel tempo che non pascola vi accorre sì d' estate, che d' inverno per esporsi a detti vapori forse per riscaldarsi, e per non essere incomodati dagl' insetti che sfuggono tali esalazioni. Nei luoghi ove uno per il calore può appressarsi alle aperture d' onde s' elevano le dette sostanze a una certa altezza, non si può respirare, e si sentono gl' istessi incomodi, che produce il tentar di respirare un' aria incapace di mantenere la respirazione, come succede anche nelle Mofete naturali; applicando all' aperture piccole dei cappelli il vapore si condensa in acqua, e alle pareti si attaccano secondo i diversi luoghi, delle sostanze saline e del zolfo, del zulfure di ferro, e fra le sostanze saline anche la selenite, ciò che fa vedere che col vapore si sublimano anche le sostanze le più fisse. Applicando dei Tubi pieni d' acqua a quei piccoli bollori si caccia l' acqua dai fluidi aeriformi, e si ottengono a parte, ed introducendovi un animale non può respirare e muore, e non può avervi luogo la combustione estinguendosi una candela accesa. Detti fluidi aeriformi sottoposti all' azione dell' acqua vi si sciolgono in gran parte, e l' acqua prende un odore di gas idrogene zolforato e d'acido carbonico, manifestandovisi per le altre sue qualità, e affondendovi dell' acqua di calce si ottiene un precipitato di calce aerata mescolata con un sulfure calcare; in fine si ottiene un residuo insolubile nell' acqua che si accende all' appressarvi una candela accesa, e brucia con fiamma celestina; il detto residuo non è un' aria infiammabile pura, ma vi è mescolata dell' aria epatica, come ce lo dimo-

mo-

mostra il colore, e l' azione di sostanze che si espongono al contatto dell' indicato residuo.

Le soluzioni metalliche esposte all' azione dei fumi che s' elevano dai Lagoni formano una pellicola e dei precipitati che sono tanti zulfuri secondo il metallo; i metalli in sostanza pur si cangiano nella loro superficie in zulfuri. E' bello a vedersi come di lamina in lamina vanno a penetrarsi, e a ridursi in tale stato. Le calci metalliche si decompongono, l' idrogene dell' aria epatica si combina coll' ossigene della calce, il zolfo che riman libero col metallo, e ne vengono parimente dei zulfuri. Il detto vapore nell' attraversare il terreno, in specie ove s' eleva non con molto impeto, vi deposita dello zolfo che si combina in parte colle terre e forma delli zulfuri, e vi lascia anche del zolfo in sostanza, che alla superficie forma dei crostoni di diversa grossezza, ed ove sono delle caverne ove possa aver luogo il libero accesso dell' aria esteriore forma dei bei ventri gemmati di cristalli di diversa grandezza figurati in piccoli aghi, e in ottaedri. In alcuni luoghi lascia dei zulfuri di ferro ben cristallizzati che si posano sopra diverse sostanze, e qualche volta su dei legni che accidentalmente vi si trovano; questi sono sulfuri di seconda formazione. Lascia secondo i luoghi diverse sostanze saline, ed in ispecie l' ammoniaco sulforoso, l' acido boracico, e un borate ammoniacale, che si trova più che altro ove il vapore esce con grand' impeto, formando dei solidi ammassi di detto sale mescolato con delle piriti. Attraversando l' acqua la carica delle sostanze saline che trasporta, e siccome l' acqua continuamente agitata si mescola colla parte più sottile della terra ove sono incavati i Lagoni, e con quella che resulta dalla scomposizione delle pietre, così per la continua agitazione si combinano le parti terrose con il zolfo e dei sali, si formano de' zulfuri ed altre sostanze saline composte, e di più del zolfo in sostanza rimane unito alla terra, e si forma un' acqua lotosa nera, che bolle e deposita alle sponde a ondate di questa terra, che prosciugata arde in parte tramandando un forte odore di zolfo, e per il resto contiene dei zulfuri terrosi, delle sostanze saline, e dell' allumine, e questa sostanza è efficacissima, stemprata nell' olio e applicata alla parte affetta, a fugare i mali cu-

tanei come le diverse specie d'erpeti, la rogna ec. Penetrando il detto vapore le diverse qualità di pietre fa loro soffrire diversi cangiamenti; ove trova la calcare, la scompone, forma del zulfure calcare, ed essendovi l'acido zulforico, del zulfato di calce; ove trova le suddette pietre quarzose, a poco a poco le penetra fa loro perder la trasparenza, e le riduce bianche. Queste pietre rese così opache sono più pesanti, e vengono a costituire la miniera d'allume petrosa, che in questo stato non contiene il minimo indizio d'allume. Detta pietra si espone per più o meno ore, secondo le qualità all'azione del fuoco, il quale sviluppa un odore di zolfo. Si espongono appresso in monticelli all'aria, e si annaffiano più volte il giorno, ed a poco a poco si fendono, si riducono in parte in una specie di pasta, si caricano di fioriture alluminose, e così si sviluppa l'allume, che poi si ritira col metodo ordinario. Queste pietre contengono in realtà dello zolfo come uno se ne può avvedere facendone l'esame. Sembra dunque che lo zolfo dell'aria epatica si unisca, e contragga una forte adesione con le terre che compongono le dette pietre, e si riduca così in pietra alluminosa, che l'azione del fuoco venga a diminuire la detta adesione, che l'acqua che s'usa per innaffiar dette pietre si decomponga in parte, che l'ossigene dell'acqua si combini collo zolfo, e che così venga a formarsi l'acido zulforico, che unito all'argilla forma l'allume. L'azione istessa dell'aria e dell'acqua a lungo andare decompone alcune di queste pietre, che vi son più disposte, e così si formano sulla loro superficie delle fioriture alluminose. L'istesse pietre quarzose ridotte opache come sopra si penetrano dai vapori, s'inumidiscono in tutta la loro sostanza, si riducono a luoghi in una pasta, e si caricano di fioriture alluminose, oppure mantengono la sua figura, e conservano una certa solidità, e si riducono assai leggiere, essendo state portate via le parti argillose per la formazione dell'allume, e per questo secondo il diverso stato di penetrazione ora si trovano che in tutta la loro sostanza spezzate comunque manifestano l'acidità, ora manifestano l'allume, ora sono opache insipide e pesanti, ed ora insipide e leggeri. In alcuni luoghi le pietre quarzose conservano in gran parte la loro trasparenza, e divise in

molti pezzi più grandi e più piccoli, si trovano nella lor sostanza penetrate dall' umido e da una sostanza salina acida, che si fa sentire da per tutto; allora si spezzano con somma facilità, e si riducono in frantumi. Penetrando le diverse terre, come l' argilla o allumine la magnesia e la calce, si formano similmente dei zulfuri, e se al zolfo si unisce l' ossigene, ne viene l' acido zulforico, e dall' unione di questo con le terre indicate il zulfato d' allumine di magnesia e di calce.

D' onde vengano questi vapori, colle altre sostanze che danno origine ai sopra accennati fenomeni, in seguito delle sopraccennate osservazioni è facile il conoscerlo. Gli ammassi grandi di zulfuri di ferro, che si trovano ovunque sono i Lagoni, il ritrovarsi nelle rotture riscaldati, e in stato di decomposizione fino dove sono penetrati dall' acque, e in stato naturale ove non lo sono, sembra che ci dimostri, che tutto deriva dalla scomposizione dei zulfuri di ferro, che si effettua dalla penetrazione dell' acqua che ha luogo negli strati delli zulfuri e dalla scomposizione dell' acqua stessa. L' acqua penetrando i zulfuri di ferro, e gli ammassi di sostanze bituminose, che si trovano in alcuni strati con i zulfuri, sembra che abbia luogo la scomposizione dell'acqua e dei zulfuri di ferro. Per la scomposizione dell' acqua ne viene che lo zolfo de' zulfuri predetti s'unisce in parte all'ossigene dell'acqua, forma l'acido zulforico, che attaccando il ferro e l' argilla della pietra arenaria, ne forma del zulfato di ferro e d' allumine; l' idrogene si unisce al zolfo e forma gas idrogene zolforaro. L' istesso idrogene si combina coll' azoto, che si contiene nella matrice delle piriti e nell' aria, e forma in questo modo l' ammoniaco, che unendosi all' acido zulforico forma un zolfato d' ammoniaco, oppure coll' acido zolforoso e coll' acido boracico un borate ammoniacale. L' idrogene zolforato venendo a contatto dell' aria esso pure in parte si decompone, l' idrogene si unisce all' ossigene, forma dell' acqua, ed il zolfo abbandonato si precipita; e nell' uscir che fa l' idrogene zolforato del terreno, e nel penetrar le diverse qualità di pietre pure, si decompone, formandosi dei zulfuri terrosi; e sopravanzando nelle caverne, e alla superficie ove arriva il contatto dell' aria, si decompone pure dall' ossigene

istesso dell' atmosfera, e lascia il zolfo, che deponendosi regolatamente forma delle croste disposte a strati, composte di ammassati filetti di un bel zolfo, e nei voti e nelle superficie, che si presentano al suo contatto, si deposita a poco a poco, e colle sue particelle va a formare dei ventri gemmati di regolari cristalli ottaedri, e degli ammassi minutissimi di aghi che somigliano i fiori di zolfo. L' istesso zolfo separato dall' idrogene si unisce ancora all' ossigene, e forma un acido zulforico, che qualche volta si manifesta puro sul zolfo istesso, e sulla selenite, come si può accertarsene per mezzo degli opportuni sperimenti. Questo incontrando sostanze da combinarvisi vi si unisce, e forma diversi zulfati secondo le basi. L' istesso idrogene zulforato incontrando la sostanza ferruginea le dà lo zolfo, e ne resultano i zulfuri di ferro di nuova formazione, che s' incontrano per ogni dove ai Lagoni, e in specie ove si trova lo schisto, che abbonda in ferro, o altra sostanza ferruginea resultante ancora dalla scomposizione stessa dei zulfuri di ferro di prima formazione. Dalla scomposizione dei zulfuri di ferro e dell' acqua sembra derivino tutte le accennate scomposizioni, ed i nuovi composti che hanno luogo ai Lagoni. L' evoluzione dell' acido carbonico può derivare, e dalle sostanze che sono mescolate con li zulfuri nella sua matrice, e dalla decomposizione delle pietre e terre calcarie dall' acido zulforico. I zulfuri che si formano nella maniera sopra indicata esposti all' azione dei vapori dei Lagoni, all' umidità dell' atmosfera, e alle pioggie, essi pure sono suscettibili di scomposizione, e di dare origine a molte altre combinazioni.

Presso alcuni Lagoni si trova il mercurio, e vi comparisce naturale, o combinato collo zolfo in forma d' etiope minerale e di cinabro, ed in tal modo si sublima formando delle incrostazioni sulle parti che incontra, ed anche su dei legni che accidentalmente vi si trovano; quest' incrostazioni si vedono disposte a filetti, e nella superficie delle caverne si deposita in cristalli formando di bei ventri gemmati. Si trova ancora un zulfato di mercurio. Di tutto in somma si spiega facilmente l' origine, fuori che di quella dell' acido boracico, che non si trova a tutti i Lagoni come gli altri sali, ma soltanto in alcuni, e in questi non in tutte le

parti. Il sulfato d' ammoniaco, e di ferro si trova in tutti, e in tutte le loro parti, in maggiore e minor copia, o costituente un concreto salino che per il suo predominio può dirsi ammoniacale, o che entra in piccola parte alla composizione degli altri concreti salini, nell' acqua pure ovunque si trovano i predetti sali o in copia o in piccola porzione uniti agli altri. Il zulfato di calce e d'allumine si trova presso alcuni, e solo in qualche parte dei medesimi a seconda delle basi.

PARTE II.

Dell' Acido Boracico Toscano.

PRemesse queste nozioni generali, destinate a rappresentare una chiara idea del Locale, e ad evitare gli errori, in cui sono caduti specialmente gli Oltramontani per avere riputati i Lagoni veri ed estesi laghi, e non piuttosto maravigliosi laboratorj della natura, è ora necessario procedere all' esame dell' acido boracico. L' acido boracico si trova in maggior dose, e più frequentemente in quei luoghi, o nelle vicinanze, ove la decomposizione si fa con maggior impeto, ed ove i vapori, e i fluidi aeriformi sortono con grande strepito. L' acido boracico non si trova costantemente in tutti i siti dei Lagoni ma soltanto in alcuni, mentre il solfato di marte e il solfato d'ammoniaco e lo zolfo si trovano ovunque. Ai Lagoni di Travale nel Territorio di Monte Rotondo, a quelli detti di Carboli non ho potuto trovar vestigio di acido boracico. Ai Lagoni di Monte Rotondo l' ho incontrato, in molti di essi siti, ed in specie ove si trova uno schisto argilloso. Inoltre a quelli denominati dall' Edifizio e a quelli detti del Benifei. Al Sasso in più siti ove si trova la pietra di grana finissima, ai Lagoni di Serazano e Lustignano se ne trova quà e là minor dose; più frequente si trova ai Lagoni di Castel nuovo e Montecerboli, particolarmente nelle vicinanze di quelli, che sono incavati in una terra che il Targioni denomina Morgone, e che non è altro che una terra che si può dire argillosa perchè vi predomina l' argilla. L' acido boracico si contiene sciolto nell' acqua in alcuni luoghi in minor quantità, in altri in maggiore, co-

me si vede facendo svaporare l'acqua presa da diverse cavità degli istessi Lagoni, e dalle diverse sorgenti. Nell'estate siccome la quantità dell'acqua è minore, così maggiore diviene la dose dell'acido boracico in essa contenuto; la varietà che vi ho trovato, è da grani 9. a grani 12. per Libbra di acqua. L'acido boracico s'inalza unitamente al vapore acquoso e ai fluidi aeriformi, come uno può accertarsene raccogliendo i vapori con cappelli di vetro posti all'aperture dalle quali esalano, nei luoghi ove si trova l'acido boracico. Da ciò apparisce che raccogliendo i vapori con opportuni apparati, oppure disponendo agl'istessi vapori delle sostanze terrose, che già contengano qualche dose di acido boracico, si potrebbe profittare ancor di quello, che si dissipa per l'aria coi vapori stessi. Il fluido che si raccoglie per la condensazione de' suddetti vapori evaporato lascia dell'acido boracico mescolato con qualche porzione di sale ammoniacale zolforoso e di borato d'ammoniaco; dell'istesso acido boracico se ne attacca anche alla parete interna del Cappello. Le aperture, che si lambiscono dagl'istessi vapori nell'uscir che fanno, si vedono incrostate di acido boracico concreto, che vi si lascia dagl'istessi vapori. Il vento li spinge talvolta rasente terra, e la terra in quest'occasione si vede biancheggiare, dall'acido boracico che vi si attacca. Da ciò si rileva, che raccogliendo i vapori con degli opportuni apparati, oppure esponendo agli stessi vapori delle sostanze terrose, che già contengano qualche dose di acido boracico, si potrebbe raccogliere ancor quello, che si dissipa per l'aria coi vapori stessi. Per venire in cognizione della quantità di sostanza salina contenuta nell'acqua dei diversi Lagoni ne feci i seguenti saggj in tempi diversi.

Nel dì 3. Agosto 1792. feci evaporare l'acqua di alcuni Lagoni di Monterotondo, che diedero i resultati che appresso.

1. Libbre due once 7. acqua del Lagon Cerchiajo diè denari 6. di sostanza salina.

2. Libbre due once 1. acqua del fossetto, per cui si scarica l'istesso Lagon Cerchiajo, diè denari 5. grani 8. di sostanza salina. Quest'acqua si accresce e diminuisce secondo la stagione, ed anche secondo lo stato dell'atmosfera, essendo più copiosa quando è imminente la pioggia.

La massa riunita formerebbe un oggetto del diametro di nove linee.

3. Libbre due once 7. acqua di un fossetto prossimo al Lagon Cerchiajo, che nasce da tanti stillicidj diede denari 4. 14. sostanza salina. L' acqua che nasce dai suddetti stillicidj insieme unita può dare un getto del diametro di 10. linee, è limpida e molto calda. Intorno intorno alle sponde del detto fossato, o nel fossato stesso vi fiorisce molto acido boracico.

4. Libbre due acqua di una sorgente calda da non potervi tener le mani limpida e abbondante collocata a qualche distanza sopra il Cerchiajo lasciò denari. 1. e gr. 5. di sostanza salina: nelle sue vicinanze fiorisce molto acido boracico.

5. Libbre due, once 4. acqua di un' altra sorgente più copiosa posta al di sopra della precedente diè grani 16. sostanza salina.

Nell' Ottobre 1795. feci il saggio dell' appresso acque.

1. Acqua tirata dagli stillicidj sopra il Cerchiajo Lib. 2. 4. 12. 18. evaporata lasciò den. 22. 18. sostanza salina, che fattone il saggio si trovò essere per la massima parte acido boracico.

L'acqua del n. 3. dell'Agosto del 1792., di cui poc'anzi si è trattato, fu presa dallo stesso luogo, e lib. 2. on. 7. non diedero che den. 4. gr. 14. sostanza salina: ciò fa vedere a quante variazioni può esser sottoposta la dose di sostanza salina, che si contiene sciolta nell' acqua; quest' ultima è la maggiore che abbia trovata in tutte le prove da me fatte.

2. Lib. 1. 11. 15. 18. di acqua di un Lagone, che si trova in una spianata sopra il Lagon Cerchiajo diè den. 11. gr. 17. sostanza salina un poco più impura della precedente, che per la maggior parte era acido boracico.

3. Once cinque di un' acqua lotosa, in modo che una bottiglia capace di lib. 2. 14. di acqua non ha dato più della sopraddetta dose di fluido, deposero con l' evaporazione den. 3. gr. 1. di acido boracico.

4. Libbre due d' acqua presa da uno dei Lagoni più grandi, che si trovano verso il mezzo del Lagone del Sasso, diedero den. 4. 4. sostanza salina, che conteneva dell' acido boracico mescolato con altri sali.

Altri saggj di acqua presa nell' Ottobre dell' anno passato 1798.

1. Libbre due on. 2. acqua del Cerchiajo hanno dato den. 4. 5. sostanza salina.

2. Libbre due acqua dei Lagoni di Monterotondo detti dell' Edifizio e di quelli più bassi evaporate hanno lasciato den. 1. gr. 4. acido boracico impuro di un colore giallognolo.

3. Once 8. 13. 5. acqua d' uno dei Lagoni di Serozzano ha lasciato den. 1. 20. sostanza salina contenente qualche porzione di acido boracico.

4. Libbre 2. 3. 2. 2. acqua del Lagon di S. Guglielmo al Sasso han dato den. 1. 15. sostanza salina, che conteneva pochi grani di acido boracico.

Le diverse sostanze saline ottenute, essendo state sottoposte all' azione dello spirito di vino, mi han dato l' acido boracico separatamente, ed ho potuto rilevare che è sempre più o meno mescolato e con diversi borati, e con piccola dose di zulfato d' allumine, e d' ammoniaco zolforoso. Incontrasi una varietà tale, che l' acqua di un ricettacolo non dà gl' istessi resultati di quella dell' altro, e quella dell' istesso presa in tempi diversi diversifica pure sì nella quantità totale, che nella varietà dei sali che formano la mescolanza.

L' acqua che soprabbonda ai ricettacoli e quella che viene da diverse sorgenti, che con dei saggj in piccolo si trovi contenere dell' acido boracico, si potrebbe introdurre in adattati ricettacoli detti comunemente piazze alle saline, ed ivi lasciarla schiarire quando è torbida per il loto che contiene, appresso farla passare in altre piazze per ottenerne la sostanza salina mediante l' evaporazione prodotta dal calor solare nella calda stagione. E qualora si volesse tirar anche profitto dall' acido boracico rimasto impegnato nel loto, basterebbe riunire il loto umido in piccoli monticelli alla cui superficie si vedrà fiorire, e raccogliesi la sostanza salina concreta, dalla quale si potrà ricavare l' acido boracico nella maniera che verrà sotto indicata.

PAR-

PARTE III.

Dell'Acido Boracico concreto.

L'Acido boracico si trova concreto nelle vicinanze delle cavità, ove si contiene l'acqua nelle istesse cavità quando nell'estate si sono asciugate per il calor del sole, e per la mancanza dell'istesso fluido acqueo, lungo i fossati attaccato al loto che si depone alle sponde; intorno alle aperture, dalle quali sortano i vapori, e nelle vicinanze dell'istesse aperture attaccato al terreno, che al di sotto è riscaldato per delle esalazioni, e scoprendolo si trova penetrato molto dall'umido e come ridotto in fanghiglia. In tali luoghi si trova in maggior copia e in masse più considerabili. In tutte le indicate parti si trova sotto diverse esterne apparenze.

Ove l'hanno lasciato le acque per essersi evaporate è mescolato colla terra del loto, e comparisce di un color cenerino simile a quello della terra, colla quale è mescolato, e si crederebbe a vista, che fosse semplice terra, ma esaminato più d'appresso, e con la lente, si vedono dei gruppetti di piccoli cristalli lucenti e rompendolo vi si distinguono delle laminette bianche. Questi gruppetti nella superficie che riguarda l'esteriore sono pieni di disuguaglianze, vi si vedono degl'incavi, che circondano dell'elevazioni conformate a foggia di papille, per ogni dove sono coperti di piccoli cristalli velati in parte dalla terra. La disposizione di questo concreto è in lamine di maggiore e minore altezza, che riunite formano diversi strati. Questa qualità di acido boracico l'ho incontrata ai Lagoni di Castelnuovo, e di Montecerboli in certi incavi che avevano la loro sede con una specie di argilla mescolata con terra calcare e magnesia, dai quali si era svaporata in gran parte l'acqua essendo rimasti all'asciutto. L'ho trovata a Monte Rotondo a quei Lagoni dell'Edifizio detti del Benifei, come pure al Sasso, a Lustignano, e a Serazzano. Una libbra del detto sale sciolto in acqua bollente ha dato: 1.° Nel raffreddarsi la soluzione onc. 2. acido boracico, 2.° Per la successiva evaporazione del fluido acquoso,

onc. 4. 6. 6. acido boracico mescolato con piccola porzione d' ammoniaco zolforoso, e di borate ammoniacale. 3.° Den. 10. 14. sostanza salina che conteneva pure dell' acido boracico mescolato con altri sali ed in specie con dei cristalli in prismi di borate ammoniacale: onde il totale della sostanza salina onc. 6. 16. 16. Il residuo insolubile, lavato bene coll' acqua per separare la sostanza salina, per l' istesso mezzo dell' acqua si separò in due parti, la più sottile, raccolta sul filtro, e nel fondo del vaso ove si decantò, e ben prosciugata fu onc. 4. 3. 11., si trovò, che conteneva dei zulfuri, del solfo in sostanza, della selenite, dell' allumine e della silice; la più grossa fu den. 2. 14., vi erano dei frantumi di zolfo, dei cristalletti di zulfure di ferro, e dei frantumi petrosi. Si ebbe una perdita di on. 1. 1. 7. che attribuisco al maggior prosciugamento della terra e sostanza salina, ed anche all' evaporazione di parte dell' acido boracico insieme coll' acqua.

Si trova il sal sedativo sotto altro aspetto attaccato al loto dei diversi fossati per cui scorre l' acqua, che sopravanza alle cavità nella quale si contiene il sal sedativo. Fiorisce quivi su la superficie del loto, e forma tanti piccoli gruppettini, a luoghi bianchissimi, e a luoghi coloriti leggermente di giallo; si vede che questo sale si trova incorporato nel loto, e viene alla superficie, e si formano i detti gruppetti a foggia di papille per una apposizione di una particella sopra l' altra, e quando è molto tempo che non è piovuto si vedono le sponde dei detti fossati biancheggiare per il detto sale, e vi si può raccogliere facilmente in quantità con una piccola pala, o con le mani. La maggior parte di questo sale è formato da laminette riunite insieme, non vi si vede che di rado la struttura filamentosa. In questo modo l' ho trovato ai Lagoni di Castelnuovo, di Montecerboli, del Sasso, di Serazzano, di Lustignano, e di Monterotondo. E' il più impuro di tutte le altre qualità di sal sedativo, e alle volte si trova anche più impuro quando all' acqua dei fossati, che viene dai cavi, nella di cui acqua si contiene il sal sedativo, se ne mescola altra proveniente da quelli, che non ne contengono.

Libbre quattro di questo sale raccolto dai Lagoni di

Monterotondo, sciolto in acqua bollente ha dato per il raffreddamento della soluzione: 1.° Acido boracico biancastro onc. 17. 2.° Once 3. 21. 14. acido boracico alquanto impuro dopo aver fatto evaporare successivamente una parte del fluido. 3.° Onc. 3. 15. 8. acido boracico rossastro mescolato con del borato di ferro: 4.° Onc. 4. 2. 7. sostanza salina rossastra con acido boracico, zulfato di ferro, zulfato d'allumine, ammoniaco zolforoso, e borate ammoniacale cristallizzato in prismi. Totale della sostanza salina lib. 2. 4. 18. 19. La sostanza insolubile, divisa per mezzo dell'acqua nelle sue parti, e appresso prosciugata, ha dato lib. 1. 4. 3. 4. residuo fine consistente in allumine e silice mescolata con de' zulfuri terrosi del zolfo, ed altre sostanze; e onc. 1. 5. 8. sostanza grossa con cristalli di zulfuri di ferro, di frantumi di zolfo, ed altri frantumi di schisto, ed altre pietre: perdita onc. 1. 20. 17.

Della suddetta qualità ne ho esaminate due altre varietà, cioè una di Castelnuovo e l'altra di Monte Cerboli, e le ho ritrovate più impure, e quella di Castelnuovo conteneva intorno alla metà di sulfato d'allumine.

La terza specie di sal sedativo, che è quella che si trova in maggiore abbondanza di tutte le altre, si rinviene non solo intorno alle cavità che contengono l'acqua ove si trova il sal sedativo, ma ancora, benchè non vi sia acqua, intorno alle aperture che mandano fuori i vapori nei siti vicini a detti luoghi sopra il suolo, che è riscaldato al di sotto dalle esalazioni che si alzano insensibilmente, essendo lo schisto argilloso scomposto, e ridotto parte in fanghiglia colorita di oscuro; e la pietra arenaria di grana fina ridotta nell'istesso modo, si trova quivi pure similmente attaccata anche alle sponde perpendicolari di alcune rotture: intorno ai ricettacoli contenenti acqua si trova parimente l'acido boracico attaccato alla pietra vicina.

Questa qualità di acido boracico si trova in masse maggiori e minori, composte per la massima parte di filamenti fra loro parallelli, e perpendicolari alla superficie alla quale sono attaccati. I filamenti, e le particelle che li compongono, sono più o meno composti: fra i mucchi di filamenti spesso s'interpongono dei voti, e talora si osserva, che quei filamenti che partono dal suolo su cui posano i

detti mucchi, non arrivano alla superficie libera dei medesimi, onde in tali circostanze ne resultano delle masse assai leggiere e ciò tanto più allorchè le particelle, che compongono i filamenti sono meno riunite, e ammassate insieme. La superficie di detta massa attaccata al suolo si adatta a quella del suolo stesso, ed è più uguale di quella che riguarda l'aria, che è piena di papilie atteso che i filamenti vengono a terminare disugualmente alla detta superficie. Queste masse quando sta molto tempo senza piovere si osservano alte fino a tre pollici, e più, e in poco tempo se ne può raccogliere delle centinaja di libbre. Se si osservino minutamente le particelle che compongono i filamenti, si vedono consistere in tante piccole laminette lucenti. Questo concreto salino si trova bianco come la neve, e si trova diversamente colorito secondo le sostanze che vi sono mescolate. Il bianco, il verde, ed il celeste si trova essere il più puro, perchè derivando i mentovati colori dalle conferve, queste non lo alterano in veruna guisa. Quello colorito di varie gradazioni di giallo è il più impuro, siccome vi è mescolato del zulfato e del borato di ferro. Si trova colorito di bigio, particolarmente nella superficie esteriore, dalla terra che vi si mescola, e si crederebbe tal volta che fosse terra con superficie disuguale, ma esaminato più d'appresso si vede che internamente è più, o meno bianco, e vi compariscono i filamenti che lo compongono. Al tatto è morbido come il sapone, e maneggiandolo con le dita vi si attacca, e rende la cute più morbida. Di questo sale in masse se ne trova di quello in cui non si manifesta la tessitura filamentosa, composto di piccole laminette più o meno ammassate, onde costituiscono dei pezzi più pesanti, e più leggieri.

Di questa qualità ne ho esaminate le appresso qualità prese da diversi luoghi, e mi han dato i seguenti resultati.

N.° I. Acido boracico concreto in massalette dell'altezza di un pollice, di due, od altra dimensione, bianche per la massima parte, colorite a luoghi di un color verdastro, formate da filamenti composti di lamine; raccolto ai Lagoni di Monterotondo, lungo un fossetto che si trova sopra il Cerchiajo, e accosto a un luogo un poco più elevato, donde sortono con grand' impeto i vapori, ove era

aderente al suolo; e nei piani, e alle sponde quasi perpendicolari del fossetto, ed agl' incavi; il qual tutto è composto di schisto argilloso ammollito dalle esalazioni che vengono di sotto, in modo che può ridursi in pasta, il cui calore ascende a gradi 71. della scala di Reaumur, e nella cui sostanza si vedevano, a luoghi a luoghi, dei gruppetti di zulfuri di ferro di nuova formazione: sottoposta all' azione dell' acqua bollente ha dato gli appresso resultati. 1°. Once 7. 6. residuo insolubile grosso consistente in frantumi di schisto argilloso, in zulfure di ferro, in cristalletti, e in qualche porzione di seleniti. 2.° Once 3. 7. 7. sostanza terrosa più fine che conteneva del zolfo, e dei zulfuri calcare, e argilloso. 3.° Libbre 7. 5. acido boracico puro per il raffreddamento della soluzione. 4.° Onc. 11. 2. 17. acido boracico puro separato nelle successive evaporazioni. 5.° Once 2. 15. 19. acido boracico più impuro, colorito, mescolato con del borate di ferro. 6.° Once 11. 5. zulfato d'alumine. 7.° Once 4. 18. sostanza salina, per la massima parte in cristalli prismatici di diversa figura, contenenti diversi borati e del zulfato d'ammoniaco, come sarà dimostrato in altra Memoria. Sostanza salina in tutto Lib. 4. 11. 9. 11.
a cui aggiunto il residuo insolubile . . — 10. 13. 7.

Totale Onc. 5. 9. 22. 18.
Perdita — 2. 1. 6.

La perdita può essere derivata dal maggior prosciugamento, e dall' essersi evaporata col fluido acquoso porzione di acido boracico.

N. II. Onc. 4. acido boracico concreto, raccolto ai Lagoni del Sasso intorno alla parte media in un fosso prossimo a uno dei ricettacoli più estesi, ove il suolo non è formato che d' ammassi di pietra arenaria, e di arenaria disposta a strati, conformato in masse di maggiore e minore estensione, più che altro bianche, e colorite a luoghi di giallognolo, composte di filamenti: che sottoposto all'azione dell' acqua bollente ha dato 1.° Once 4. 11. 17. residuo insolubile grosso contenente dei frantumi cristallini di arenario, porzioni dell' istesso arenario, dei cristalletti di zulfure di ferro, e di più una sostanza petrosa in cristalli

disposti in filamenti che si crede un borate terroso di cui si darà l' esame in altra Memoria. 2.° Onc. 4. 18. 5. residuo fine insolubile di un color bigio oscuro, consistente in zulfuri terrosi, in zolfo, e in frantumi e cristallini più sottili dell' arenaria. 3.° Onc. 1. 7. 7. 9. acido boracico purissimo deposto per il raffreddamento della soluzione. 4.° Onc. 9. 5. 13. acido boracico puro ottenuto dalla successiva evaporazione del fluido. 5.° Onc. 6. 11. acido boracico colorato leggiermente, alquanto impuro. 6.° Onc. 2. 22. sostanza salina, ottenuta evaporando il resto della soluzione, contenente dell' acido boracico mescolato con zulfati di alumine di ferro, d'ammoniaco, e del borato d'ammoniaco:

sostanza salina	Totale Once	3.	— 21.	21.	
sostanza insolubile	„	—	9.	5.	22.
	Once	3.	10.	3.	19.
	Perdita	—	1.	2.	5.

referibile alle cagioni individuate.

N. III. Libbre 1. 1. 10. 9. acido boracico bianchissimo in massalette composte di filamenti, raccolto ai Lagoni del Sasso accosto al ricettacolo grande accennato di sopra, sottoposto all' azione dell' acqua bollente, ha dato: 1.° den. 21. 18. residuo insolubile grosso consistente in frantumi di pietra arenaria, in cristalletti di zulfure di ferro, in pezzetti di una sostanza biancastra come sopra al num. 1. del N. II. 2.° Den. 13. sostanza più fine dell' istessa natura della precedente al detto n. 2. 3.° Onc. 7. 4. 5. acido boracico purissimo deposto nel raffreddarsi la soluzione. 4.° Onc. 3. 11. acido boracico bianco ottenuto per l' evaporazione del fluido acquoso.

Acido boracico . . . . Totale	Onc. —	10.	4.	16.
sostanza insolubile . . .	—	1.	10.	18.
	Onc. —	11.	15.	10.
Perdita	—	1.	19.	23.

N. IV. Once 4. concreto d'acido boracico, color giallo oscuro, in massalette composte di filamenti, raccolto ai Lagoni detti dell' Edifizio nel Territorio di Monterotondo; sot-

toposto all' azione dell' acqua bollente ha dato. 1.° Den. 8. residuo insolubile. 2.° Acido boracico, mescolato con borato e zulfato di ferro, per il raffreddamento del fluido. 3.° Once 2. 14. 19. sostanza salina rimasta dopo l' evaporazione del fluido acquoso, contenente acido boracico, zulfato e borato di ferro, zulfato d' ammoniaco, borato d' ammoniaco, e qualche piccola porzione di zulfato d'allumine.

N. V. Libbre quattro acido boracico in masse grandi dell' altezza di quattro, o cinque pollici, che all' esteriore compariscono bigie perchè velate da una terra di questo colore, essendo internamente composte di filamenti bianchi raccolti ai Lagoni di Monterotondo alquanto sopra al Cerchiajo ove il suolo è formato dello schisto argilloso: sottoposto all' azione dell' acqua bollente ha dato. 1.° Once 2. 14. 17. residuo insolubile consistente in frantumi di schisto ed altre sostanze. 2.° Once 1. 2. 17. 20. terra argillosa fine, mescolata con della silice, con dei zulfuri terrosi, dello zolfo, e della selenite. 3.° Once 1. 6. 3. 5. acido boracico deposto nel raffreddarsi la soluzione. 4.° Once 6. 2. 21. acido boracico alquanto impuro ottenuto successivamente per l' evaporazione. 5.° Once 3. 17. 8. sostanza salina ottenuta coll' evaporare il resto della soluzione in cui si vedevano dei cristalli in prismi mescolati con dell' acido boracico giallognolo; onde il totale della sostanza salina Once 2. 3. 23. 10.
sostanza insolubile . . . . ,, 1. 5. 8. 16.

Totale	Once	3. 9. 9. 2.
Perdita	,,	— 2. 14. 22.

derivata dall' istesse cagioni come sopra.

Ho fatto prova di molti altri concreti salini, contenenti acido boracico, che lascerò indietro per non dilungarmi troppo. Dall' esposto resulta, che si potrebbe tirar dai Lagoni molta copia d' acido boracico raccogliendo il concreto.

Dalle diverse terre e pietre, penetrate dall' esalazione de' Lagoni come pure de' diversi loti, si potrebbe anche tirar copia dell' acido boracico, e sottoponendo tali sostanze all' azione dell' acqua bollente degl' istessi Lagoni si farebbe con molta economia. Per provare ciò ho creduto opportu-

no riportare quì alcuni saggi da me fatti su tale articolo. 1.° Once 6. loto prosciugato preso alla superficie dei Lagoni del Benifei vicini al Lago nel Territorio di Monterotondo, trattato coll' acqua, e questa poi evaporata, ha dato den. 6. 9. acido boracico. 2.° Altre once 6. preso più profondamente ha dato den. 3. acido boracico. 3.° Once 2. 9. 12. schisto argilloso prosciugato, stato esposto all'esalazioni dei Lagoni di Monterotondo, ha dato den. 3. 8. acido boracico. 4.° Once 4. terra dei Lagoni del Sasso prosciugata, sottoposta all' azione dell' acqua, ha dato den. 4. 15. acido boracico. 5.° Once 4. loto dei Lagoni di Castelnuovo, prosciugato e trattato coll' acqua, ha dato den. 5. 2. acido boracico. 6.° Once 6. del loto dei Lagoni di Montecerboli trattato come sopra ha dato den. 7. 4. acido boracico.

Recapitolando adunque le cose esposte si vede: che si potrebbe profittare dell' acido boracico che si contiene nell' acqua, di quello che si trova concreto, e di quello che è incorporato nei diversi loti, nelle terre, e nelle pietre dei luoghi ove si trova quest' acido.

PARTE IV.

Del Metodo di estrarre l' acido boracico dei Lagoni, di formarne il borace, e di metterlo in commercio.

Si è detto che fino dal 1778., e dal 1779. fu scoperto l' acido boracico, e fin da quel tempo fu proposto lo stabilimento di una lavorazione per mettere in commercio questo ricco prodotto. Sono già passati 20. anni senza che siasi pensato a tirar profitto da una scoperta così utile. La poca quantità che se ne contiene nell' acque, il consumo della legna nella svaporazione; le spese per lo stabilimento di una fabbrica, l' incertezza della durata dell' acqua del Lagon Cerchiajo, la lontananza dal mare per i trasporti, ed altri motivi possono aver dato luogo a questo. Ma giova sperare che l' industria degli abitanti non mancherà di profittare dei doni che la natura ci ha prodigati.

Le osservazioni da me fatte sopra la maniera di accrescere il prodotto del nostro sale, e sopra un metodo di

tasarlo con pochissimo dispendio (che non potei pubblicare avanti quest' epoca per essere stato occupato in ciò che direttamente riguarda la mia professione), dilegueranno tutte le dubbiezze, e faranno conoscere che si può con tutta sicurezza e con molta economia e vantaggio intraprendere una lavorazione intorno a questo sale.

Il calore dell' acqua è soggetto a variare nei diversi Lagoni da pochi gradi al di sopra dell' Atmosfera fino al di là dell' acqua bollente. L' istesso si può dire di quello del suolo dei Lagoni ove non si trova acqua. Il calore del luogo è dunque sufficiente per ottenere la svaporazione dell' acqua che contiene il sal sedativo, senza consumo di legna.

Avendo osservato che il piombo resiste alle esalazioni dei Lagoni, ne esposi un vaso di figura parallelogramma, profondo pollici $3\frac{1}{2}$, lo riempiei di una soluzione di acido boracico, l' interrai nel suolo dei Lagoni, e in cinqu' ore si svaporò a siccità il fluido, e abbandonò il sale che si conteneva nella soluzione.

L' acido boracico si contiene sciolto nelle acque di alcuni lagoni, e si trova concreto nelle vicinanze, ove o lo depositano le acque che si svaporano nei calori estivi, o fiorisce alla superficie del terreno, il quale si accresce continuamente per l' apposizione di una particella sopra l'altra, e in questo modo si forma la maggior quantità del suddetto sale concreto. La terra alla quale si trova aderente il detto sale è penetrata dalle esalazioni dei Lagoni, è caldissima nella maggior parte dei luoghi, e ritiene incorporato molt' acido boracico. Se dunque si procuri di accrescere la superficie di questa terra facendone dei monticelli nelle parti dei Lagoni, che si trovano all' asciutto, ed ove s' inalzano le esalazioni; per mezzo di quest' artifizio può grandemente accrescersi il prodotto dell' acido boracico concreto.

Poste le sopradette cose, da una parte abbiamo l' acqua calda al grado dell' acqua bollente, o vicino, e dall' altra abbiamo l' acido boracico concreto, per poterne aggiungere quella maggior quantità, che se ne può sciogliere nell' acqua bollente, che già ne contiene una porzione. Sciolto il sale in questa, non si deve far altro che fare schiarire la

soluzione, e passarla in altro vaso, ove raffreddandosi depositerà quella quantità di acido boracico che di più teneva sciolto quando era bollente, e in questo modo avremo una quantità considerabile di acido boracico senza il più piccolo consumo di legna. La soluzione che rimane si potrà porre in caldaje di piombo, poste, e accomodate sul suolo dei Lagoni, coperte da padiglione di panno per difenderle dalle pioggie, nella qual forma evaporata l' acqua si otterrà la sostanza salina.

Di questa sostanza salina si potrà scioglierne nell'acqua bollente dei lagoni per ottenere per il raffreddamento l' acido boracico che è mescolato con altri sali, ed in fine estratta la maggior parte dell'acido boracico con reiterare quant' occorre l' indicata operazione, si getterà l' acqua madre, o volendo tirar profitto degli altri sali, che vi sono mescolati, si evaporerà a siccità. Procedendo nell' indicata maniera, con due vasi contenenti lib. 383. soluzione, ho ottenuto acido boracico per il raffreddamento lib. 23; la liscia evaporata ha dato lib. 21. 1. 12. 18. sostanza salina di cui la maggior parte era acido boracico.

L' acido boracico non si trova in tutti i Lagoni ma in alcuni soltanto. Quando il concreto è stato raccolto ed esaurito, vi abbisogna un certo spazio di tempo perchè si riproduca nel modo indicato; per questo converrebbe avere un apparato portatile per eseguir quà e là l' indicata operazione nei tempi asciutti, e passare in giro dai Lagoni di un Paese a quelli d'un altro, per ritornare a quelli già esauriti, quando l' acido boracico concreto si fosse riprodotto. In tal modo con pochissimo dispendio, e coll' impiegar poche persone si può ottenere ai nostri Lagoni l' acido boracico purificato.

L' acido boracico si può mettere in commercio, parte in questo Stato, per l' uso che se ne fa in medicina, e parte si può impiegare alla formazione del borace: per questo bisognerebbe stabilire una fabbrica, ed il luogo più comodo per questo oggetto mi sembrerebbe Portoferrajo. Da Monterotondo agli altri luoghi dei Lagoni si potrebbe trasportare al Pontone di Scarlino l' acido boracico, e di quì a Portoferrajo.

In Portoferrajo vi sono le saline, onde per mezzo dell'

acido boracico si potrebbe decomporre il muriato di soda, tirar partito del murio mettendolo in commercio, e formare il borace; così si avrebbe anche un risparmio nei trasporti mentre una libbra d' acido boracico ne dà tre di borace.

APPENDICE.

Si è detto trattando dei Lagoni in generale, che vi sono dei siti all' asciutto, nei quali i vapori per l' aperture di diverso diametro escono con tant' impeto e strepito, da farsi sentire a tre, quattro e più miglia di distanza. Il calore in tai luoghi è tanto grande che il vapore acquoso non vi si ferma. Intorno a tali aperture si osserva una specie di concrezione lasciatavi dalle esalazioni, che si sprigionano nell' atto del loro passaggio per le medesime aperture, or bianca, or macchiata di giallo, ed ora bigia sparsa di bianco e giallo. Si trova questa in massalette di maggiore, e minore estensione, e in ammassi grandi che pesano molte libbre. Questi concreti alla superficie esteriore sono pieni d' incavi, di elevazioni, e di caverne ricoperte da una quantità di papille tutte ingemmate da un numero immenso di piccoli cristalli formati dalla sostanza salina, mescolati con alcun' altri cristalletti di zulfure di ferro. Tali concreti sono di una durezza tale che vi bisogna il martello per rompergli; hanno però delle fessure naturali ove possono spezzarsi con facilità. In alcuni pezzi si vede accennata la struttura in filamenti; ma nella maggior parte la tessitura è in laminette bianche sottili strettamente fra loro unite, che a luoghi a luoghi interpongono dei cristalletti di zulfure di ferro. Questa sostanza sottoposta all' azione dell' acqua bollente vi si scioglie in gran parte lasciando diversa dose di residuo secondo il diverso stato di purità. Avendo fatta l' analisi di questo concreto, ho rilevato esser composto di un borate ammoniacale, che vi ha il predominio, di altri borati, e di acido boracico. Ma io mi riserbo di dare il dettaglio di quest'analisi in altra Memoria, che comprenderà tutto ciò che riguarda l' esame chimico delle concrezioni contenenti l' acido boracico, e sue combinazioni.

SOPRA ALCUNI STRUMENTI METEOROLOGICI, CHE SEGNANO PER SE STESSI LE VARIAZIONI ATMOSFERICHE PER 24 ORE, O PIU'

Di Anton Maria Vassalli.

Ricevuta li 3. Marzo 1799.

L' importanza delle osservazioni meteorologiche per l' agricoltura, l' economia politica, e la medicina non si può negare se non da chi ignora 1.° che l' abbondanza o scarsezza dei prodotti della terra dipende specialmente dalle meteore, di modo che Teofrasto già scrisse *annus fructificat non tellus*. 2.° Quanto importi ad un Governo il prevedere i danni futuri dalle siccità o pioggie straordinarie, e dagli eccessivi freddi, e simili; onde potere per tempo provvedere ai bisogni della Società. 3.° Che le malattie epidemiche dipendono specialmente dalla qualità delle stagioni; e le pesti distruggitrici, quando non siano portate da estere regioni, provengono dalle meteore: Così in Piemonte le due ultime pestilenze, secondo le osservazioni del Medico Fiocchetto, furono cagionate da invernate calde ed umide precedenti. Che anzi nelle stesse ordinarie malattie l'efficacia de' rimedj dipende in gran parte dallo stato dell'atmosfera, come provò il Dott. Berriat, che vide corrispondere i sintomi alle varie altezze barometriche, e che i rimedj agiscono diversamente secondo il vario stato dell' atmosfera: Così p. e. i purganti hanno molto maggior efficacia, quando l' aria è umida di quel che abbiano, quando l' aria è secca; ma di queste, ed altre analoghe osservazioni parlerò più diffusamente nel Prodromo di un Trattato completo di Meteorologia, che da due anni avrei terminato, se le mie circostanze non si fossero opposte. Per ora rifletterò soltanto, che generalmente le osservazioni meteorologiche fatte sino al giorno d' oggi sono incomplete, non solo pel difetto degli strumenti, ma ancora perchè ci indicano

soltanto lo stato dell'atmosfera nei momenti che gli osservatori guardarono i loro strumenti, ignorandosi affatto ciò che possa essere succeduto nello spazio tra l' una e l' altra osservazione; p. e. d'inverno si osservi il termometro alle ore 10 della sera, e trovisi il grado 5 sotto il o: si osservi lo stesso termometro alle ore 8 del mattino seguente, e si trovi a gradi 3 sotto il gelo; si conghiettura che il freddo andò scemando dalle 10 della sera alle 8 del mattino, mentre può essere cresciuto straordinariamente il freddo sino alle quattro, o cinque del mattino, di poi cangiando il vento, od annuvolandosi il cielo, per la perduta capacità dell' acqua passata dallo stato elastico allo stato di vapore, può essersi in un' ora o due cresciuta la temperie dell' atmosfera dagli 11 o 12 gradi sotto il gelo sino ai 3. In tal modo si osserveranno effetti straordinarj, che si ascrivono a piccoli gradi di freddo; perchè si ignorano i gradi intermedj fortissimi, che vi furono tra l' una, e l' altra osservazione. Per evitare questo massimo inconveniente ho preparato strumenti, che lasciano per 24, o più ore la traccia delle variazioni atmosferiche, a segnare le quali sono destinati. Comincierò a descriverne alcuni dei principali, riserbandomi a parlare in altra circostanza degli altri. Il barometro ed il termometro sono due strumenti, di cui si servono non solo i meteorologisti, ma ancora generalmente i Medici, i Chirurghi, e tutte le persone colte. Ed appunto questi due strumenti sono generalmente difettosi in molte parti: l' esame però dei loro difetti lo riserbo altrove, contentandomi per ora di indicare quelli che ho fatto eseguire, e che sembranmi corrispondere meglio d' ogni altro allo scopo, cui sono destinati. Il barometro, come vedete nella Fig. 1, è a sifone. La capacità del suo tubo di cristallo è di un centimetro. Il mercurio purgatissimo occupa lo spazio ABC. Sopra C havvi un galleggiante di sovero D, il quale è unito ad un tubetto di vetro DE ben rotondato, e liscio in E. L' estremo OO del braccio corto del sifone è chiuso da un anello, che dà libero passaggio nel suo centro al tubo DE. In F infisso nella tavola del barometro vi è un ago d'acciajo, attorno al quale si aggira la leva GH di legno quasi equilibrata, ma alquanto più pesante nella parte

FG, perchè poggi sempre sopra il tubo DE, e perchè questo non declini il braccio FG è incanalito. In F vi è un piccol circolo di vetro per diminuire il fregamento con l' asse d' acciajo. La lunghezza della leva è di sei centimetri nella parte FG, e di diciotto centimetri o più nella parte FH. Se alla tavola del barometro si adatta un semicircolo QS graduato, e descritto col raggio FH, l' estremo H della leva segnerà le elevazioni, e depressioni del barometro ingrandite a proporzione della lunghezza FH, perciò capaci di suddivisioni ben distinte, più numerose delle ordinarie. Desiderandosi che il barometro segni per se stesso, al semicircolo suddetto si sostituisca il cilindro MN di carta, o tela incerata, portato in giro nello spazio di 24. o più ore da un orologio posto alla base N: la superficie di questo cilindro sia divisa da linee verticali, che segnino ciascun' ora, e da linee orizzontali che corrispondano alle divisioni della scala del barometro. In H estremo della leva si adatti un pennello I, che si può bagnare con olio di tartaro, ossia carbonato di podassa allungato, perchè mantenga l' umido: la superficie del cilindro sia coperta di qualche polvere attaccaticcia che si toglie facilmente dal pennello: girando nelle 24 ore il cilindro MN, il pennello lascierà sul medesimo la traccia, togliendo la polvere, ed in questa guisa si avranno nella superficie del cilindro segnate le menome variazioni barometriche occorse nella giornata. Molte carte, o tele preparate da coprire diversi cilindri, su i quali siano numerati i giorni del mese, danno il comodo all' osservatore di restare più giorni, od anche mesi lontano dall' osservatorio, purchè abbi una persona che ogni giorno all' ora fissa sostituisca i successivi cilindri. Oltre di questo comodo impareggiabile di segnare per se stesso in ogni momento le variazioni barometriche, questo strumento presenta anche il vantaggio di segnare quelle menome variazioni, che negli altri barometri sono impercettibili, poichè l' adesione del mercurio al vetro anche nei tubi barometrici rarissimi di un centimetro di capacità, ed anche maggiore fa sì, che molte volte nel solo centro della colonna succeda la variazione, e questa essendo menomissima non si distinguerebbe senza massima difficoltà, non essendovi il braccio FH del-

la leva assai lungo, ma in questo barometro il galleggiante D poggiando sempre per via dell' anello OO sul centro della colonna barometrica, la menoma variazione p. e. di abbassamento nel barometro crescerà in C la convessità del mercurio, quindi alzandosi il tubo DE, per conseguenza il braccio GF della leva farà abbassare il pennello L, quindi si avrà sul cilindro MN tosto indicato l' abbassamento. Chiunque è accostumato ad osservare il barometro conosce tosto i vantaggi di questo, nel quale le elevazioni sono anche tosto indicate, giacchè scemando la convessità del mercurio in C tosto si abbassa il galleggiante, e si innalza l' estremo H della leva. Con gli stessi principj è formato il termometro indicato nella fig. 2. ABC è una boccia di vetro, che contiene almeno sei libbre di mercurio, cui è unito il tubo calibrato DE di un centimetro circa di diametro, chiuso in EF da un anello, che dà libero passaggio al tubo GT unito al galleggiante G: è fatto collo stesso artificio del tubo del barometro DE per muovere la leva MO mobile attorno al fulcro N, costrutta secondo i principj della sopra descritta leva del barometro, portante nell' estremo O il pennello P per segnare i gradi di caldo, e di freddo sopra lo stesso cilindro del barometro, oppure in un graduato semicircolo. Dalla descrizione dei movimenti barometrici è chiaro, che le menome variazioni nel caldo, e nel freddo saranno segnate da questo termometro che lascierà pure la sua traccia sul cilindro MN. La sola variazione si è che i gradi di freddo saranno nella parte superiore del cilindro, e quelli di caldo nella parte inferiore: abbassandosi il pennello P a proporzione che il mercurio monta nel tubo DE, e viceversa. Questo termometro ha il vantaggio sopra quello di Six (difficilissimo a costruirlo a dovere) segnando non gli estremi del caldo, e del freddo come questo, ma bensì tutte le menome variazioni, che occorrono nella giornata. Gli errori, che potrebbero prendersi nelle ore per le varie elevazioni degli estremi H ed O delle leve del barometro, e del termometro si correggono con la descrizione sopra lo stesso cilindro dei semicircoli QS, TV. Nella stessa guisa sopra lo stesso cilindro possono lasciare la traccia l' Udometro formato anche con galleggiante; l' Atmidometro costrutto a guisa di bilancia,

della quale il braccio non gravato dal vaso che contiene il liquido da evaporare porti il pennello; l'Igrometro costrutto anche a bilancia; l' Elettrometro a cannette per misurare l' elettricità fulminea, che ho descritto nel Vol. V. dell' Accademia delle Scienze di Torino. L' Anemometro richiede un altro cilindro mosso da altro orologio per misurare per se stesso la direzione, e la forza del vento. Ma di questi ed altri strumenti altra volta.

LETTERA

Di Giovanni Verardo Zeviani

In risposta

a Leopoldo Marco Antonio Caldani.

Ricevuta li 10. Maggio 1799.

La vostra lettera a me indirizzata, ornatissimo Amico, stampata nel tomo settimo della Società Italiana, contiene la Storia ben ragionata di un vivo Mostro Umano, talmente configurato, o per meglio dire, trasfigurato, che dava dubbio di sè stesso se fosse uomo o donna. Dopo di aver voi accuratamente ogni parte del suo corpo osservata ed esaminata, senza esitazione veruna avete dichiarato che quella era una femmina, e non un maschio.

Nel leggere io con sommo piacere questo vostro referimento, e le dotte riflessioni che lo illustrano, mi è venuto in mente come io pure pochi anni sono ho abbozzato uno scritto in un argomento, in cui correva dubbio se un mostruoso parto di donna dovesse dirsi di una persona unica e sola; o pur composta di due soggetti insieme confusi ed immedesimati. Non fu allora uopo di compiere e perfezionare quello scritto; perchè fui prevenuto da una esatta relazione di quel medesimo Mostro, pubblicata dal dotto Medico Zenone Bongiovanni. Quale allora mi uscì dalla penna, ardisco ora di esporlo ai vostri amici riflessi, avendo qualche correlazione coll' argomento nella vostra lettera trattato; sebbene sarà di gran lunga inferiore di merito, per poca abilità di chi volle trattarlo.

DISCORSO SOPRA UN MOSTRO UMANO

monocefalo, bifaccia, semidoppio, nato vivo e maturo nel Distretto di Verona nel Giugno dell' anno 1789.

Questo Mostro era una Bambinella facilmente nata, di perfetta simmetria e grandezza. Avea una testa niente difforme, nè più grande del solito: era capillata al di dietro

e nella sommità al modo naturale : ma la faccia era compigliata di due faccie: perfette alle tempie al di fuori, ma al di dentro, o sia nel mezzo, incorporata una con l' altra. Così che avea perfetti e vivi li due occhi laterali, ma i due interni avevano il solo segno dell' occhio, senza il bulbo, e senza il moto delle palpebre. Bensì erano perfetti e belli li due nasi, perfette le due bocche, e perfetti i due menti di ciascheduna. Nella bocca a sinistra stava dentro mobile e perfetta la lingua: nella bocca destra la lingua era imperfetta ed immobile; inferiormente annessa e conglutinata. Per le due bocche si entrava in una sola cavità o bocca interna, comune a tutte due le faccie; dentro la quale metteva capo una sola trachea, ed un solo esofago. In ambedue le narici mancavano i *setti*, o sia le cartilagini che naturalmente i nasi a lungo internamente dividono. A questo perfetto e ben organizzato corpo nella sommità del petto davanti uscivano due corte imperfette braccia, con le corrispondenti imperfette mani, aventi ciascheduna due soli diti mal figurati. Immediatamente sotto di queste corte braccia usciva del corpo un altro mezzo corpo inferiore, rivolto col dosso in fuori, avente nel piè sinistro soli quattro diti. Avea questo pure l' ano aperto, e patente il segno del sesso femminino. Dentro il corpo perfetto era un solo cuore, un solo ventricolo, un solo fegato, una sola vescichetta del fiele, due soli reni, un solo utero, una sola vescica urinaria. Nell' altro imperfetto mezzo corpo altre viscere non erano che un tratto d' intestino, proveniente dagli intestini del primo, il quale tramandava dall' ano aperto esso pure le fecce intestinali. Non si ha la notomia del cervello, perchè vollesi conservare alla vista de' posteri l' intero corpo sventrato. Durò in vita questo Mostro raro ammirabile per due soli giorni, non valendo a succhiare il latte.

Su la formazione de' Mostri molte e varie sono le opinioni degli Autori. Crede il volgo che nascano qualora donne si maritano con sozzi animali; e credesi pure con abominevoli spiriti infernali. Così pur credono reverendi Teologi: fra i quali Martino del Rio non ha dubitato di predicare essere errore di fede credere impossibile l' accoppiamento di dimonio con donna. Che immonde Scimmie

ed altre bestie, che rassomigliano in qualche maniera all' uomo, affettino di accoppiarsi con donna, vi sono anche al dì d' oggi Naturalisti accreditati che l' asseriscono per vero. Ma che il Dimonio tal cosa cerchi ed affetti, rifugge l' animo a doverlo credere. Sarà quindi lecito investigare almeno per poco il fondamento e le ragioni su cui poggia cotale credenza. Poggia questa su la grave autorità di S. Tommaso; che legge ed asserisce affermata tal cosa da S. Agostino: *Augustinus dicit: Multi se expertos, vel ab expertis audisse confirmant Sylvanos & Faunos, quos vulgo incubos vocant, improbos sæpe extitisse mulieribus, & earum expetisse atque peregisse concubitum. Unde hoc negare impudentiæ videtur*. (Sum. part. 1. vol. 2. quæst. 51.) Ma se attentamente all' intiero contesto dell' addotto passo di S. Agostino si badi, forse vedremo che l' accortissimo uomo, anzichè affermare costantemente che il Dimonio con donna s' impacci, mostrasi anzi di non credere tal cosa, e la rivoca in dubbio. *Et quoniam*, scriv' egli al libro 15. Cap. 23. della Città di Dio, *creberrima fama est, multique se expertos, vel ab eis qui experti essent, de quorum fide dubitandum non est, audisse confirmant, Sylvanos & Faunos, quos vulgo incubos vocant, improbos sæpe extitisse mulieribus, & earum expetisse ac peregisse concubitum: & quosdam Dæmones, quos Dusios Galli nuncupant, hanc assidue immunditiam & tentare & efficere, plures, talesque asseverant, ut hoc negare impudentiæ videatur. Non hic aliquid audeo definire utrum aliqui spiritus elemento aereo corporati (nam hoc elementum etiam cum agitatur flabello, sensu corporis tactuque sentitur) possint etiam hanc pati libidinem, ut quomodo possunt, sentientibus fæminis misceantur*. La oscurità di questo passo non ben inteso, procede dall' ignorarsi quali fossero a' tempi di S. Agostino i Demonj in allora dai Galli chiamati Dusii. Ma quelli erano per ventura certi Preti Pagani, di professione Maghi e Stregoni, chiamati dai Galli e dai Britanni *Druidi*, i quali aveano capo nella Città di Dreux, non molto lontana da Parigi; del cui tempio anche al dì d'oggi alcune vestigie si mostrano. Laonde scorre limpido il senso vero di S. Agostino: *Che bestie si possano accoppiare con donne, non è da dubitarlo, perchè asserito da irrefragabili testimonj: Che uomini indiavolati lo stesso possano fare, è*

parimenti fuor di dubbio, facendolo tutto dì gli Stregoni Galli. Ma che i puri spiriti di Averno possano farlo, non oso dirlo: quantunque possano questi assumer un' aerea figura.

Cercar dunque conviene d' altra parte l' origine dei Mostri. E parlando segnatamente di quei Mostri, che hanno doppie o esuberanti le parti, in due trovo, opposti uno all' altro, essere i pareri de' Dotti. *Nascono Mostri*, dice il Vallisneri (Oper. tom. 2. p. 20.) *da due o più capi, o con altre membra o parti moltiplicate, o insieme come ramo attaccate e incastrate, e fatto di due tronchi un solo tronco; perciocchè due o più germi, o due o più ova mature possono in uno restringersi, o ammonticellarsi, e così strettamente combaciarsi, che col tempo si attacchino, si compenetrino, s' intrighino; e un corpo solo confuso e addoppiato compongano*. Questa fu l' opinione di Democrito, secondo che si legge in Aristotile (de gen. anim. lib. 4. cap. 4.); ed è parimenti l' opinione comune del volgo, perchè prima di ogni altra si affaccia alla mente alla vista di qualcuno di questi corpi confusi e raddoppiati. Non ostante ha partigiani autorevoli e rispettabili l' opposta opinione; che pretende i germi de' Mostri essere mostruosi originalmente e difformi.

Vien spalleggiata la prima opinione dall' osservarsi che dalle uova delle galline, che hanno due o più tuorli, nascono polli con due o più capi, o con le membra moltiplicate.

Vien spalleggiata la seconda opinione dall' osservarsi nei giardini una pianta di agrume, che sempre e costantemente produce frutti manifestamente composti di due o ben anche tre specie, limone, arancio, e cedrato: la quale quindi si noma *bizzaria*.

L' una e l' altra di queste opinioni così ben fiancheggiate, benchè siano l' una all' altra opposte, sono altresì tanto l' una che l' altra da forti opposizioni combattute. Talmente che non si sa a qual delle due si debba dare il voto di preferenza; o se amendue si debbano rifiutare: e cercar dopo convenga qualche altra ragion de' Mostri; la quale sia soggetta a minori difficoltà.

Vien combattuta la prima dalla notomica osservazion de' cadaveri. Questa fa vedere non già un accoppiamento

di parti per vicinanza o compressione; ma una fortuita esuberanza e un errore nella loro conformazione prima. Come mai la testa di un Mostro a due faccie, com' era il nostro, può dirsi un accoppiamento di due teste, se non appariva niente maggiore del solito, e solo era nella faccia raddoppiata? Come nell' unione di due teste si sono disperse le ossa laterali, e si è fatta una sola cavità di due bocche, una sola cavità di due cranj? Come i due nasi che non si toccavano e non erano vicini, son venuti a perdere il loro setto interiore; di cui mancavano? Come un tratto d' intestino, restante nel corpicino annesso, si è andato ad incastrare ad angolo retto nell' intestino del corpo perfetto? Come si sono strutte nell' addomine, esistente e restante, le viscere dell' utero, de' reni, della vescica urinaria, che in quello mancavano? Com' erano senza moto le coscie e le gambe, che pur erano ben nutrite e perfette? E se ciò avveniva perchè mancassero di muscoli, dove sono questi andati e dispersi?

Vien combattuta la seconda opinione dal vedersi corpi nati con parti esuberanti, quale era il loro padre non solamente, ma talvolta ancora quale era la loro madre, e quale gli avi del padre egualmente a quelli della madre. Dove certamente o è posteriore la mostruosità: o convien ammettere per vero ciò che è impossibile, che tanto nel padre quanto nella madre stiano appiattati i primordj dei feti, o sia la massa d' onde si formano e sviluppano.

Vengo io quindi, vaglia quanto vale, ad esporre una terza opinione: la quale partecipa bensì di una e dell' altra delle addotte opinioni; ma che pur non è nè l'una nè l'altra di esse in realtà: la quale io credo che sia soggetta a minori difficoltà. Metto io i primi rudimenti dell'embrione e del feto nel padre e non nella madre; e questo per due ragioni. Prima perchè stando nella madre si correria pericolo nelle varie fortuite combinazioni di accidentali circostanze, che il feto se ne sviluppasse e crescesse e nascesse senza opera del padre: cosa non voluta dalla Natura, è contraria alle sue leggi invariabili ed eterne. Questo pericolo non s' incontra stando nel padre, perchè in esso ravvivato che fosse il feto, non avrebbe luogo opportuno di nutrirsi e crescere: *nisi granum frumenti*, dicesi in S. Giovanni,

cadens in terram mortuum fuerit, ipsum solum manet. L' altra ragione per cui metto io li primordj del feto nel padre più tosto che nella madre, è appunto il riferire de' feti la somiglianza e le viziosità di amendue i genitori. Questa essendo opera non di conformazione, perchè allora starebbe la somiglianza in un solo dei genitori, sempre nel padre o sempre nella madre, star dovendo in un solo di essi i primi germi; ma opera secondaria: a miglior ragione ripor deesi nella madre; la quale in varj atti successivi ha più tempo d' imprimere nuove forme, o alterare la prima simmetria de' feti; di quello che nel padre, il quale in un passaggiero atto solo feconda la donna, e non ha tempo nè modo d' imprimere difformità nel feto che si trovasse dentro la donna.

Della ragionevolezza di questo discorso abbiamo due irrefragabili prove in due esempi di viziate conformazioni, che cadono sotto i sensi ogni dì; di cui non si può dubitare che siano favolosi o traveduti. Questi sono i figlioli che nascono con le gambe storte e coi piedi travolti; e quegli altri che nascono con sei diti nelle mani. Cotali difetti si veggono procedere per parte del padre; ma pur si son anche veduti talvolta per parte della madre. Misteriosa del tutto e coperta di dense tenebre si è l' opera della fecondazione e della generazione degli animali e dei vegetabili. Questo solo chiaro trasparisce che tanto dal padre quanto dalla madre entra qualche cosa nella lor prole. Or io dico che questa virtù, questa forza che sta nella madre di trasmutare in parte i delineamenti e la figura primordiale, che riceve come a balia ed a nutrimento o sviluppo dentro di sè stessa, e di effigiare in esso la somiglianza propria, o quella degli avi suoi, questa stessa e non altra è la cagione de' Mostri, esuberanti, semidoppj, o raddoppiati in parte, o più parti. Se a lei si presenti un primordio di feto che sia oltre il solito spiritoso e vivace, s' immerga questo in un materno uovo di molta materia dotato, in atto che la donna ridondi di molto estro vivace, e nel tempo istesso concorrano per accidente con eguale forza nella sua fantasia due oggetti su cui modellarne la effigie e la somiglianza, senza che uno all' altro sovrasti molto o prevalga, in tal caso, dico io, emergono o molte o poche

membra di più dell' ordinario, che possono prendere più o meno la somiglianza di amendue. La qual cosa non potendosi onninamente effettuare, membra soprabbondano imperfette, mancanti di muscoli e di moto; e corpi o semicorpi voti di viscere: che per accidente possono restare vitali nell' utero, e ben anche nati che siano alla visibile vita: nutriti ed allevati della vita altrui. Rarissimi sono questi Mostri a vedersi: ma forse sariano più frequenti se questo disordine nella loro conformazione non togliesse quasi sempre dentro l' utero e nella prima loro trasformazione la simmetria necessaria a cogliere l' influsso degli umori, ed il circolo per vivere e crescere. Provengono dunque questi Mostri per esuberanza, e non per difetto di materia. Tal cosa avviene nelle piante: che in su dei ramoscelli più vegeti e rigogliosi si trovan qualche fiata raddoppiati i baccelli ed i frutti; e doppj i semi in un guscio solo. *I fiori*, dice il Padre Arena, *secondo natura sono semplici, e se son doppj, son mostri. Piante di fior doppio più facilmente si ottengono dalle sementi di fior semplice se siano nutrite e cresciute in rigogliosa pianta, di quello che dalle sementi di fiori semidoppj, o doppj se ne hanno; le quali sono vizze e scarne e infeconde. Se le piante da fior semplice*, dice lo stesso Naturalista e Filosofo, *per qual si voglia coltura non si riducono a dar fiori doppj, è però vero e provato, che le piante che danno fiori semidoppj, con attenta cura a poco a poco s' ingrassano a segno di produr doppj bellissimi.*

Quanto alle Galline che provengono con parti raddoppiate nascendo da uova di doppio giallo o tuorlo, il fatto è veramente riferito da Aristotile: *cohærent enim conceptus, quum in propinquo alter alteri est, quomodo interdum fructus arborum complures. Quod si vitella distinguuntur membrana, gemini pulli discreti sine ulla supervacua parte generantur. Sed si vitella continuantur, nec ulla interjecta membrana disterminantur, pulli ex iis monstrifici prodeunt, corpore & capite uno, cruribus quaternis, alis totidem.* De gen. anim. lib. 4. cap. 4. Ed il Vallisneri „ Ciò appar manifesto nelle uova delle galline che hanno due o più tuorli, d' onde nascono polli con due o più capi, o con le membra moltiplicate “. Ma io dubito grandemente della verità di questo fatto. La Contessa Massimiliana Gazola, donna ricca di filosofia la

lingua e il petto, raccoglieva quante uova doppie aver potea per vaghezza di avere polli mostruosi nella sua corte. Visse molti anni, e poi morì scontenta di non averne ritratto pur uno; quando molti ne ebbe da altre donne, che non ebber tal cura. Nati che sono mostruosi polli, tosto il volgo crede che tali siano nati per essere nati da ova di doppio tuorlo: e si dà così corpo all'errore, e si mantiene in credito la favola, come se fosse verità incontrastabile per tanti fatti.

Forte prova ed argomento che la esuberanza delle parti nei feti più tosto proviene dalla esuberanza di un solo, che dalla complicazione imperfetta di due, si è l'osservazione anatomica de' loro cadaveri: la quale fa vedere costantemente anche nei più perfetti in piccola parte di corpo insieme uniti, un semplice cuore che ad amendue dà vita comune. Nacque quì in Verona, vicino alla mia casa, da Maddalena Franchini il dì 15. Luglio 1769. un Mostro di due bambini perfetti, attaccati l'un l'altro dal basso sterno sino al bellico. Nell'atto di sventrarli restammo sorpresi in trovare un solo cuore doppio e sfigurato. Celio Rodigino fa menzione di un Mostro umano che avea due teste e un solo cuore. Paulo Zacchia racconta di un Mostro nato in Roma nell'anno 1631. che era bicorporeo, e pure avea un cuor solo; e parla di un altro nato parimenti in Roma nel 1633. che avea due corpi, e un solo cuore. Il Mazzuchelli descrive due corpi nati in Milano l'anno 1719. uniti nel petto e nella pancia: ne' quali stava un cuor solo, bensì doppio ne' suoi vasi sanguigni. Adamo Mulebāncher descrive due corpi uniti con un cuor solo, con doppie arterie e vene, nato in Pisa nel 1687. In Pisa parimenti leggesi nato un feto bicorporeo, con cuore unico a doppj vasi, il quale fu descritto dal Zambeccari. La nostra bambinella, benchè sembrasse un composto di due corpi per avere due faccie ed un mezzo corpo annesso al petto, pur avea un cuor solo, e questo non doppio nè di smisurata grandezza. Per questa bambina i protettori del sistema de' Mostri originariamente tali, potrebber dire che si fosse in seguito un de' cuori disperso e annullato: ma negli altri quì sopra narrati tanto non si può dire; mentre così affermando resterebbe a dire come e perchè distrutto un cuore, l'al-

l'altro che resta fosse raddoppiato. Sono dunque costretti a dire che l'un de' cuori abbia camminato da un petto all' altro, per unirsi insieme ed incorporarsi ed immergersi uno nell' altro. Ma resta ancora a dire come questi cuori si siano strascinate dietro le arterie e le vene lor proprie: le quali vanno alle membra, e tornano da esse, ed in esse sono immerse e disperse. Questa difficoltà si evita nel nostro sistema: che come per una facoltà assimigliante esuberano le membra e le viscere sino a costituire due corpi, esuberano per anche le parti del cuore. Laonde non male disse Aristotile, che qualora si trattasse di decidere se questi Mostri doppj o semidoppj siano veramente un solo soggetto, o sian due; che si dovesse prendere regola dal cuore e non dal capo. Se il cuore era unico, voleva che non si dubitasse a dire unico l'uomo. Se i cuori erano due, due persone vi si dovessero riconoscere: *unum ne an plura sit per coagmentationem, quod monstrificum prodit animal, judicandum est principii ratione: verbi gratia, si cor pars ejusmodi est, quod unum cor habeat, unum animal est, quod duo, id duo est animalia quæ sibi coaluerunt propter conceptuum conjunctionem*. De gener. anim. lib. 4. cap. 4. Perciocchè non hanno miglior ragione i Moderni che vogliono che l'argomento si prenda dalla testa, e non dal cuore. Mentre benchè appaja che ove sono due teste distinte ivi siano pensamenti diversi e diverse volontà, che due anime significano abitare anche in un corpo dalla testa in giù unico e solo, nulla ostante però questi segni possono esser dubbj e fallaci: potendo per ventura un' anima sola animare due teste, e dar sospetto di due intelletti e di due volontà. Galeno ha un trattato intitolato: *quod animi mores sequuntur corporis temperamenta*. Un poco diversamente che sia configurato o grande il cervello: un poco più tenera abbia o dura la sua polpa: un poco più o meno aperti i nervi e le vene, possono fare che un' anima sola abbia diverso modo di pensare in una o in altra delle due teste, e per conseguenza diverso volere. Quindi è che per forza di malattia, o d' altra oppilazion che lega l'uomo, gli Uomini più sapienti divengono pazzi e mentecatti. Oltre di che non si conosce con certezza dagli esterni delineamenti qual sia il pensiero di un uomo, ed esso stesso talvolta non sa se voglia e

non voglia: *piger vult & non vult*, dice il Savio. E nelle bestie che pur non hanno volontà, appajono segni di volere e di non volere. Avvenir in fatti quì puote come avviene nell' organo, che un solo fiato diversi suoni produce: come in una gonfiata utre, che diversi strumenti musici fa risuonare dentro di essa piantati. La questione di una o più anime in questi mostruosi corpi doppj o semidoppj non si risolverà mai per segni o regole esterne. Il solo Creatore che dà l' essere e la vita il può conoscere: *seriem generationis ignoro, sed auctorem generationis agnosco*, (così S. Ambrosio in Luca cap. 5.) Perciocchè dall' esame de' Mostri di tal genere, che ormai abbiamo in buon numero, si vede che di grado in grado da una minima esuberanza di parti in un corpo si passa a così piena e totale, che due corpi si danno perfettamente formati, uniti insieme in una sola minima parte: talmente che ne' primi niun dubita nè dubitar puote che la persona non sia unica e sola; ne' secondi non si può dubitare che le persone non siano due. Sin dai tempi di Aristotile erano noti Mostri che nulla avean di doppio che sei diti in luogo di cinque (De gener. anim. lib. 4. cap. 4.) Chi dirà mai che allora siano unite due persone? Nel Vallisneri si leggon da lui veduti vivi e adulti in Padova due corpi intieri, un dall' altro staccati, fuorchè in una piccola parte di cranio posteriormente dove erano uniti; tantochè si trattava di separarli col taglio. Nel Buffone si vede una figura tolta dal Linneo di due adulte persone unite nel solo osso sacro. Chi può dubitare che queste e quelle non fossero veramente due Uomini insieme incollati? Il nostro Mostro costituisce il centro della dubbietà: trovandosi in esso con raro, e forse unico esempio due argomenti di doppiezza, nella doppia faccia, e nel mezzo corpo pendente. Due argomenti altresì al contrario di unità, nel cervello unico, e nell' unico cuore. Giustamente quindi dai Regolatori dei Sacri Riti dopo tanti esempj è stabilito che in questi doppj o semidoppj corpi si usi nel Battesimo di battezzare *assolutamente* prima il corpo più perfetto, e dipoi *condizionalmente* l' altro corpo imperfetto. Significando così essere possibile che corpi che pajon due siano vivificati da un' anima sola; mentre la ragion d' Aristotile del cuore unico o doppio, a contrassegnare uno o

due soggetti, quì non ha luogo: che il Battesimo non si somministra a corpi sventrati.

Qui ha fine lo Scritto mio. Nel rileggerlo ora dopo aver letta la vostra lettera; nella quale voi, dottissimo Professore, vi siete molto adoperato a far conoscere per sospette e dubbiose le tante relazioni che si leggono di Ermafroditi veri, parmi dentro di esso di vedere il desiderato Ermafrodito vero, che forse altronde non fu. State di grazia per un momento attento a vedere come io lo cavi dalla mostruosa bambinella, che è il soggetto dello stesso mio Scritto; la quale sembra non avere relazione alcuna con la materia e con la questione degli Ermafroditi. Ermafrodito dicesi una persona che abbia con sè gli organi della generazione tanto maschili, che femminili: *hermaphroditus dicitur ille, cui utriusque sexus pudenda adsunt.* Lexic. med. Or io dico che tutto questo si verifica nel mio e ne' Mostri al mio simili e corrispondenti. Il mio Mostro, come ho dimostrato, era un soggetto solo ed uno; in alcune parti raddoppiato per esuberanza di materia: e non erano due soggetti, un de' quali fosse monco per difetto. Questo Mostro avea due sessi femminili. Non ammette difficoltà il supporre, che il soprabbondante sopra eminente corpo inferiore possa in qualche altro somigliante caso essere diverso di sesso dall' altro; ed essere così uno di maschio, e l' altro di femmina. Ecco in tal caso verificato un soggetto solo avente parti maschili e femminili; che è quanto dire il vero Ermafrodito. Mi risponderete che in tal caso di maschio e femmina uniti, non sarebbe più da dirsi unico il soggetto per esuberanza, ma doppio con difetto; e svanirebbe allora l' essere di Ermafrodito. Dovrebbe dirsi doppio soggetto, perchè ragion vuole che si debba credere che la Natura, nell' atto di disegnare ed organizzare un corpo animale, abbia anche in mira di fare un maschio o di fare una femmina, essendo questa una sua legge inalterabile e costante: *masculum & feminam creavit eos.* Genes. Cap. 1. Dunque se maschio e femmina in un tempo avea la Natura intenzione di formare, ne volea formare due e

non un solo. Per eludere la forza di questa obbiezione bisognerebbe avere in pronto qualche caso di Mostro semidoppio, in cui i due sessi, un dall' altro diversi, fossero manifesti. Ma non mi è riuscito per verità sino ad ora di trovarne verun esempio in più libri di Autori che trattan de' Mostri: essendo tutti i riferiti da essi costantemente o due maschi o due femmine. Fu errore e sbaglio del Bongiovanni l' addurne uno composto dell' uno e dell' altro dei sessi, come veduto e descritto dal Vinslovio. „ Si fa menzione dal Winslow, dic'egli, di un maschio e femmina dagli ipocondri di questa ad un femore di quello obbliquamente attaccati ". Ma ivi nel luogo citato (Espos. anat. tom. 6. pag. 223. Ediz. Bologna) il Vinslovio dice che quel Mostro, *era di femmina con un corpo annesso inferiormente, tenuto anch' esso per quello di una femmina*. Zoppica quì dunque ancora il mio Ermafrodito, sinchè con più lungo studio, o col tempo avvenire non si trovi o nasca qualche Mostro semidoppio avente con sè l' uno e l' altro de' sessi. In tanto se la mancanza di cotale osservazione fa ostacolo a dover credere vero il mio Ermafrodito, così per trastullo da me imaginato, serve però mirabilmente di altra prova, sopra le addotte convincentissima, che un solo sia il soggetto ne' Mostri semidoppj, appunto perchè non si è veduto mai che siano dotati dell' uno e dell' altro sesso; quando pure accade tutto dì nel parto de' gemelli, che questi sono talvolta chi di uno e chi dell' altro sesso; e forse tanto spesso quanto siano di un medesimo sesso. Finirò per tanto di attediarvi, ornatissimo Amico, con questa scipita disadorna leggenda, mettendo quì un passo dell' ingegnosissimo Artsoechero: *Qui rendra raison de ces merveilles et mysteres impenetrables de la Nature? On a beau la suivre à la piste, elle a mille faux fuyans, où il semble qu' elle prend plaisir à se jetter, pour éluder toutes nos recherches*. Suite des Conject. Phys. pag. 142.

DIFESA E CONFERMA DELLA COMUNE MISURA DELLA VELOCITA' DE' FLUIDI USCENTI PEI FORI DEI VASI

DI PIETRO ZULIANI

P. P. P. DI FILOSOFIA NELLA UNIVERSITA' DI PADOVA

Presentata da Antonio Cagnoli li 11. Maggio 1799.

I. TUtti, si può dire, li più illustri Fisici e Matematici, che anno trattato del moto de' fluidi, insegnano e sostengono dopo il Torricelli, che la velocità con cui l'acqua od altro fluido liquido esce da un vaso qualunque per forami fatti nel fondo, o nei lati dello stesso vaso, sia eguale a quella che acquisterebbe un corpo cadendo liberamente da tanta altezza quanta è quella in cui l'acqua nel vaso si mantiene al di sopra dell'orifizio per il quale se le dà uscita. Solo la massima parte di essi Fisici richiede per la verificazione di quest'effetto, che l'orifizio, per cui deve uscire l'acqua sia molto ristretto, e come d'una grandezza insensibile in confronto della larghezza del vaso: condizione per altro questa voluta dai loro principj teorici piuttosto che essere dall'esperienza suggerita. E tutti poi concordemente intendono escluso ogni impedimento o ritardo che l'acqua potesse ricevere nell'uscire; ed esigono quindi, che l'acqua abbia a fluire per semplici luci, cioè per fori fatti in sottili pareti del vaso, o scolpiti piuttosto in lamine di metallo di poca crassezza, in luogo che esca per forami lunghi, o trasmessa per tubi, ne' quali scorrendo l'acqua soffre ritardo e perdita di velocità prima di sortire.

Questa dottrina intorno la velocità de' fluidi liquidi, che da tanto tempo come certa e dall'esperienza dedotta e verificata si vede ammessa, e con teorie e calcoli illustrata da tutti i più rinomati Idrometri, essendo stata recentemente sottoposta a nuovo esame, venne combattuta fortemente, e come del tutto falsa rigettata da un Autore ce-

lebratissimo in Italia e fuori per opere pubblicate, e per premj e titoli onorifici riportati colle sue produzioni, e col suo merito riconosciuto: Autore sommamente benemerito delle scienze, e degno di gran lode anche per la sola magnanima impresa d'avere fondata e stabilita nella illustre Città di Verona una delle più insigni e stimabili Società Letterarie (*a*). Ma è ben credibile che un Autore, il quale imprese ad impugnar e rovesciare dai fondamenti un principio sostenuto di pien consenso dai primi Matematici e Fisici dell'Europa, e che di più conosce e mostra col suo esempio essere permesso a chi si sia d'esporre e difendere ne' modi decenti quello che sente nelle materie scientifiche e letterarie, è, dissi, credibile, che un tale Autore, se non fosse già rapito alle scienze ed alla società de' viventi, sarebbe disposto a ricevere in buona parte ciocchè alcun altro mosso dalla forza del vero producesse in difesa della surriferita comun sentenza, e in opposizione alla nuova e singolare da Lui ne' suoi ultimi anni pubblicata. Anzi io tengo per certo che come Egli preferiva la verità ad ogni altro riguardo, così aggradirebbe che gli fosse spiegato come Egli si è potuto ingannare, e goderebbe di vedere tolte quelle difficoltà e ragioni, le quali siccome hanno potuto far a lui comparire mal fondata e falsa la sentenza comune, e vera per contrario la sua, così forse potrebbero trarre altri ancora in simile inganno.

Bensì per contrario potrei temere che il presente mio assunto venisse riputato come superfluo ed inutile da tutti quelli che sanno come è ben appoggiata la dottrina del Torricelli. E confesso io stesso che sebbene non ignorassi, che più d'una volta è accaduto, che proposizioni quasi universalmente adottate sono state in progresso di tempo scoperte e dimostrate false del tutto od in parte almeno, e sia pur anche certo ch'è sempre utile per le scienze il distruggere gli errori; non ostante tutto ciò non avrei creduto prezzo dell'opera l'impiegarmi a fare nuovi sperimenti, ed a scrivere per convalidar e difendere il proposto principio

(*a*) Il Sig. Brigadiere Cavaliere Lorgna. *Teoria Fisico-matematica intorno al moto dei liquidi uscenti dai fori delle Conserve*. Tomo IV. Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana 1788.

ammesso dagli Idraulici, qualora non mi fosse accaduto di vederlo impugnato vigorosamente nel corpo d' un' opera riputatissima, e da un Matematico e Idrometra di grande estimazione ed autorità; ed a cui non potevano non essere pienamente note tutte le prove di teorie, di calcoli, e di sperienze su cui lo stesso principio si fonda, e si sostiene. Si aggiunge che lo stesso chiarissimo Autore, dopo avere con varie osservazioni raccolto lo stato di ringorgamento de' liquori nelle conserve, e quindi dedotta ingegnosamente, e da uomo versatissimo ne' calcoli geometrici, la sua nuova teoria e formola per la velocità delle vene, egli non solo attacca le altrui teorie, ma combatte il principio degli Idraulici nelle prove fondamentali, che sono le sperienze, cercando di dimostrare con varie ragioni, che ben meritano l' altrui esame e confutazione, che niuna sorta d' esperimenti favorisce e conferma il suddetto principio; ma che per contrario vi sono delle sperienze che dimostrano e confermano la nuova teoria da lui concepita. Io ho anche una ragione particolare per occuparmi sull' opera di quest' Autore, ed è, che la sua dottrina intorno la velocità del fluido che esce da' fori delle conserve, va in certo modo unita colla questione della misura della forza premente delle vene, di cui ho altra volta trattato (Saggi dell' Accad. di Padova, T. 3. par. I.) Per tutti questi motivi io ho creduto non essere cosa superflua, ma per contrario importante ed utile d' impiegarmi col presente Scritto intorno un principio universale dell' Idrodinamica, e che è come il fondamento principale degli altri teoremi di questa scienza.

II. La questione si riduce a questi termini, cioè a dire, se la celerità colla quale esce l' acqua da un vaso per un orifizio ossia luce, mentre il vaso si mantiene sempre pieno ad una stessa costante altezza, sia eguale o pressochè uguale, o per l' opposto sia molto minore di quella che acquisterebbe un corpo, che si lasciasse cadere liberamente per tant' altezza quanta è quella dell' acqua nel vaso sopra il foro per cui esce.

Il dottissimo Autore concede ed ammette, che le celerità con cui esce l' acqua dal vaso sotto diverse altezze permanenti di quella che si contiene nel vaso, sieno tra loro come le radici delle stesse altezze; ma nega che corrispon-

dano a tutte intere le medesime altezze, ch'è quanto dire, che sieno uguali a quelle che acquisterebbe un corpo percorrendo nel cadere liberamente dalla quiete altrettante uguali altezze, come si tiene comunemente dagl' Idraulici; potendo benissimo succedere, (intorno a che non vi è dubbio o questione), che quantunque le celerità delle vene si trovassero essere molto minori delle corrispondenti alle intere altezze, ciò non pertanto fossero tra loro nella ragione stessa delle radici delle altezze, e però proporzionali a quelle che acquisterebbe un corpo cadendo dalle altezze intere dell' acqua contenuta nel vaso sopra degli orifizj pei quali scaturiscono le vene. Insegna Egli che la celerità d' una vena qualunque d' acqua sia minore di quella che compete a tutta l' altezza dell' acqua nel vaso, quanto è minore a un di presso il numero 36 del numero 55; sicchè la velocità che acquisterebbe un corpo cadendo per un' altezza uguale a quella dell' acqua nel vaso sopra il centro della luce per cui fluisce la vena, stia alla velocità della stessa vena prossimamente come 55 a 36, come 8 a $5\frac{13}{55}$ (Cap. 3. paragr. 38. 39.)

Quindi secondo esso soprallodato Autore, alla velocità della vena in vece di competere tutta l' altezza dell' acqua, ne compete una tanto minore quanto a un di presso il quadrato di $5\frac{13}{55}$ è minore del quadrato di 8; e però l' altezza corrispondente alla velocità della vena non è che prossimamente $\frac{2}{5}$ di tutta quella dell' acqua nel vaso. E per servirmi dell' espressioni generali dello stesso Autore; se l' altezza intera dell' acqua nel vaso sopra la luce per cui esce dicasi A, l' altezza a cui corrisponde la velocità della vena sarà $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ cioè prossimamente $\frac{54}{125}$ A, o pure $\frac{2}{5}$ A in più piccoli numeri prossimi (Cap. 3. par. 39.)

III. Premesso lo stato della presente questione mossa dal rinomato Autore, e definita la velocità che ha una vena d' acqua secondo la nuova sentenza di esso Autore, vediamo a quale di queste due differenti misure essa meglio si

si accomodi realmente. Siccome per sentimento anche dei più celebri Idrometri il principio di cui si tratta è una verità piuttosto d'esperienza che di teorie e calcoli, per essere le formole dei calcoli in questa materia dedotte da nozioni, o in tutto, o in parte almeno, ipotetiche ed arbitrarie; così ragion vuole, che si ricorra all' esperienza in quest' affare, e si vegga ciocchè da questa risulti.

Li mezzi di conoscere e definire la velocità delle vene *a posteriori*, come dicono, ossia coll' esperienza, sono tre; due di questi li più usitati e sicuri ci vengono somministrati dai getti colle loro altezze, ed ampiezze; e il terzo mezzo ci si presenta nella misura della quantità dell' acqua che le vene dispensano, in un certo tempo, per una determinata luce, e sotto una data altezza.

Rispetto ai getti, questi o sono rivolti all' insù perpendicolarmente, o si fanno con direzion parallela od inclinata all' orizzonte. Parliamo in primo luogo dei getti verticali.

Li getti verticali provano il comun principio. Soluzione delle difficoltà prodotte in contrario.

IV. E' noto per esperienza, che qualora il getto ossia vena d'acqua, che scaturisce da un vaso, si faccia uscire rivolta in su perpendicolarmente all' orizzonte, essa si slancia ad una altezza che prossimamente si accosta a quella dell' acqua contenuta nel vaso. Quindi per le note leggi dei gravi s' inferisce che l' acqua esce dal vaso e si muove salendo con una velocità che corrisponde a tutta l' altezza di quella che si conserva nello stesso vaso.

L' Autore, la cui dissertazione abbiamo ora per mano, accorda (cap. 4. paragr. 47. e segg.) che li getti verticali risalgano ad un' altezza pressochè uguale di quella dell' acqua nel vaso; ciò non pertanto insegna Egli che l' acqua di essi getti uscendo per l' orifizio del vaso non si muova colla velocità che dalla loro altezza comunemente s' inferisce. Imperciocchè Egli è di parere che il salire dei getti verticali non sia un effetto della velocità con cui esce l' acqua, come si tiene comunemente, ma che da altra causa, della quale si dirà in seguito (n. VI), nasca e dipenda l' ascesa

ed altezza che si osserva in tali getti. Ed ecco in breve le due ragioni sulle quali Egli si appoggia (cap. 4. parag. 50.).

1.ª Dalle sperienze fatte dal Bossut e da altri, si vede che per orifizj di 2, 4, 6 ec. linee di diametro escono in pari tempo quantità di acqua sensibilmente proporzionali alle aree degli stessi orifizj, posta la stessa altezza di acqua nella conserva; donde apparisce che l' acqua è animata ad uscire con velocità sensibilmente la stessa così per le piccole come per le più grandi aperture. Ma i getti per gli orifizj di 2 linee non poggiano alla stessa altezza dei getti pegli orifizj di 4, o di 6 linee di diametro.

2.ª ,, Si osserva, ei dice, che la quantità dell' acqua ,, somministrata da un getto verticale in un dato tempo ,, per un dato orifizio di uscita e sotto una data altezza ,, permanente, è di assai minore di quella che uscirebbe ,, nello stesso tempo dallo stesso orifizio scolpito in sotti- ,, le lamina in fianco della conserva sotto la stessa altezza ,, d' acqua ringorgata (veggasene il confronto nelle Tavole ,, dell' Idrodin. del Sig. Bossut, Parte 2.ª cap. 4). Se dun- ,, que, segue Egli a dire, questi esborsi per una parte non ,, vanno regolati dalle altezze dei getti verticali, nè per esse ,, estimati, ma dalla sola velocità attuale ed effettiva, che ,, anima la vena al foro; e dall' altra troviamo queste velo- ,, cità molto minori di quelle che animano le vene uscenti ,, da' medesimi fori scolpiti in fianco delle conserve sotto ,, lo stesso carico di acqua, chiaramente ci si fa comprende- ,, re, che le altezze dovute alle velocità permanenti de' get- ,, ti verticali sono molto minori delle altezze dovute alle ,, velocità delle vene uscenti da' fori delle conserve. " Così precisamente l' Autore: e siccome Egli crede d' avere dimostrato (del che vedremo dopo al n. XVIII) che le velocità delle vene orizzontali corrispondano ad altezze molto minori delle altezze permanenti dell' acqua nelle conserve; da ciò conchiude che molto più nei getti verticali la velocità che li anima ad uscire e salire è minore di quella che acquisterebbe un grave cadendo dall' altezza in cui si mantiene l' acqua nel vaso, e che però l' ascesa dei getti verticali a poco meno che all' altezza dell' acqua nella conserva non può attribuirsi alla velocità attuale ed effettiva con cui esce e si muove l' acqua che li forma.

V. Ma queste ragioni e difficoltà contro la comun sentenza, che ripete l' ascesa dei getti verticali dalla velocità, colla quale è cacciata fuori del vaso l' acqua che li compone, e che per conseguenza dall' altezza di essi getti desume la quantità ossia misura della medesima velocità, ànno una facile e vera risposta, che le annulla.

E quanto alla prima, osservo primieramente che si trova bensì in pratica che la quantità dell' acqua che in pari tempo si dispensa per luci d' inegual diametro sotto una stessa altezza dell' acqua contenuta nel vaso, segue sensibilmente la proporzione della grandezza di esse luci, almeno finchè la loro ampiezza sussiste dentro certi limiti, ma non si trova però che segua sempre realmente e a tutto rigore la detta proporzione, come si può rilevare dalle molte sperienze fatte e riferite dal Bossut (Idrodin. p. 2. cap. 4). Donde s' inferisce che avvi una qualche differenza, comunque piccola e trascurabile in pratica, tra la velocità effettiva delle vene d' inegual grossezza. Dunque potrà succedere una simile differenza di velocità anche ne' getti verticali trasmessi per orifizj d' inegual diametro; e ne dovrà per ciò nascere che non tutti si slancino ad una altezza affatto uguale.

Nè si creda che quelle differenze che si osservano nelle altezze dei getti fatti per luci del diametro di 2, 3, 4, 5, 6 linee sieno sempre grandi in confronto di quelle che si trovano nelle misure delle quantità dell' acqua che si raccolgono in pari tempo da vene effluenti per altrettanti simili orifizj. Imperciocchè dalle Tavole dei getti presso Bossut (part. 2. cap. 5. n. 465.) apparisce, che trovandosi l' acqua nel vaso alta costantemente piedi 3. 2. 11. sopra le luci del diametro di linee 1. 2. 3. 4. 5. 6., le altezze dei getti di esse luci furono le seguenti, esposte già coll' ordine medesimo delle luci, cioè piedi 3. 1. 6., 3. 1. 8., 3. 2. 0., 3. 1. 7., 3. 1. 5., 3. 0. 4.

Dal quale confronto apparisce, che se si eccettui l' ultimo getto, la massima differenza fra le altezze degli altri cinque non arriva a sorpassare un mezzo pollice, la qual quantità è come trascurabile trattandosi di getti d' un' altezza di più di tre piedi.

Che se tuttavia si trovasse una maggior differenza tra

le altezze dei getti verticali di diverso diametro, e quindi tra le loro velocità da tali altezze dedotte, di quella si trovi nelle velocità delle vene orizzontali, misurate queste velocità coll' acqua che in egual tempo dispensano, di ciò se ne può assegnar una ragione manifesta. Imperocchè alle vene niente si oppone esteriormente, esclusone l' aria, che vaglia a ritardar e sospendere in certo modo il loro corso; ma piuttosto questo potrebbe venir agevolato dalla gravità. Per contrario nei getti verticali ricadendo di continuo l' acqua già ascesa, a ridosso e carico di quella che è in ascendere, deve necessariamente venir impedito e rallentato in parte il corso dell' acqua ascendente; quindi l' altezza del getto si fa minore di quella che richiederebbe tutta la velocità dovuta a quella forza con cui l' acqua viene spinta, e cacciata fuori del vaso. Donde nasce che la velocità nei getti verticali deve comparir come diversa e minore che quella delle vene, prescindendo ora anche da varie altre cause atte ad alterare dove più dove meno la velocità ad ascesa dei getti, come si trova già spiegato presso tutti gli Idraulici.

Per quello poi riguarda alla seconda obbiezione, in cui l' Autore assume che si dispensa maggiore copia d' acqua da una vena che fluisca per una luce scolpita nel lato del vaso, che da un getto verticale, io osservo che quest' asserzione si oppone ad un principio idrostatico da tutti riconosciuto, e che non credo che possa venire messo in dubbio da alcuno; ed è che il fluido preme ed agisce ugualmente per ogni parte, e secondo qualunque direzione; nè io so vedere alcuna sperienza che serva di prova a tale asserzion dell' illustre Autore. Cita egli le Tavole del Bossut (part. 2. cap. 4. Idrodin.). Ma il Bossut non tratta ivi dei getti verticali ascendenti; nè in tutto quel capo avvi alcun esperimento delle dispense di tali getti. E se consultiamo il capo V. che segue, ed in cui tratta il Bossut dei getti, in questi si trova tutto l' opposto di quello suppone ed assume l' Autore per fondamento della sua obbiezione. Imperciocchè se ci piaccia di confrontare le dispense ivi riportate d' un getto verticale effluente per una luce del diametro di 6 linee, e a diverse altezze dell' acqua nella conserva, con quelle ottenute da una vena orizzontale dello stesso

diametro, e che sono registrate nel cap. 4. precedente, si trova che a pari altezze dell' acqua nel vaso, le dispense del getto corrispondono a quelle della vena. E di fatto avverte il medesimo Bossut (part. 2. cap. 5. n. 449.) che qualunque sia la direzione del getto, la dispensa che fa è sempre la medesima, purchè l'apertura e l'altezza dell' acqua nel vaso sieno le medesime. E di più al n. 459. riflette, che sebbene li getti verticali più grossi si alzano più dei meno grossi in parità di altre circostanze, ciò nonostante li getti grossi nón dispensano maggior quantità d'acqua dei più sottili relativamente al diametro della luce; poichè la dispensa dipende dalla velocità che ha l'acqua nel sortire dall' orifizio, e questa velocità è sensibilmente la stessa tanto nei getti più grossi, dentro certi limiti, che nei più sottili, prescindendo dall' attrito; e la diversità delle altezze nei getti dipende da cause esterne, come dall' aria, e da quella che si è da noi superiormente spiegata rispondendo alla prima difficoltà dell' Autore. Ed io aggiungerò che anche l'ineguaglianza, qualora se ne fosse trovata, tra la dispensa d'un getto verticale, e quella d'una vena orizzontale, sarebbe stato più facile che fosse prodotta da simili cause esterne, che crederla derivata dalla mancanza d'un principio tanto comprovato e certo quanto è quello della forza premente del fluido uguale per ogni verso.

Tralascio altre riflessioni su questo punto, giacchè presso tutti gl' Idraulici che trattano dei getti d'acqua, si trovano le spiegazioni dei loro fenomeni senza che alcuno sia in contraddizione col principio Idrodinamico.

Sentenza dell' Oppositore sopra la cagione dell' ascesa dei getti verticali.

VI. Non devo però quì ommettere di riferire che il chiarissimo Autore siccome non può ripetere, giusta la sua nuova teoria, le altezze dei getti dalla velocità da cui è animata l'acqua ad uscire pegli orifizj delle conserve, per essere questa velocità secondo lui così poca, che non arriverebbe a farli salire neppure alla metà di quell' altezza a cui si veggono ascendere, così Egli pensa, come superiormente ho indicato (n. IV.) che da altra causa derivi l' in-

nalzamento dei getti verticali. Perciò propone (cap. IV. paragr. 53.) di ripetere e spiegare l' ascesa dei getti per via della pressione dell' acqua contenuta nella conserva, e delle leggi dell' equilibrio dei fluidi; in quella maniera a un di presso che nei tubi comunicanti vediamo innalzarsi l' acqua nell' uno a quell' altezza in cui si trova e si mantiene nell' altro. Immaginiamoci, a cagion d' esempio, un vaso, e che nel lato di questo presso il fondo ci sia inserito orizzontalmente con una estremità un tubo, il quale dopo un qualche tratto fuori del vaso si dirigga poscia all' insù perpendicolarmente all' altezza di tutto il vaso. Ciò supposto, se si riempia il vaso d' acqua, e mentre questa passa dal vaso nel tubo si continui a mantener pieno lo stesso vaso, è certo che l' acqua ascende per il tubo verticale sino all' altezza di quella contenuta nel vaso. Che se il tubo verticale sia un po' più corto del vaso, allora l' acqua uscirà per l' estremità superiore del tubo, e continuerà a fluire finchè si mantenga pieno il vaso ad un' altezza anche per poco maggiore della lunghezza di esso tubo. Ora che abbiamo questo tale getto, si concepisca tolto e come annichilato il tubo verticale; si avrà quindi un vero getto d' acqua ascendente per l' aria ad un' altezza poco meno di quella in cui è mantenuta l' acqua nel vaso. Tale è in ristretto il sentimento e la spiegazione sull' origine e innalzamento dei getti verticali, che propone il rinomato Autore.

Non vi ha dubbio, che si possa innalzare dell' acqua, e formare come una spezie di getto per la sola legge d' equilibrio de' fluidi, ovvero sia per una forza esterna impellente senza che essa acqua sia animata a muoversi da sè ed alzarsi per tutto quel tratto a cui viene trasportata. Ma che li getti dei quali si tratta nascano e dipendano dalla ora indicata causa, e non da un moto suo proprio delle particelle dell' acqua che li compongono, è cosa che a mio credere ripugna colle osservazioni ed esperienze le più manifeste e decisive.

E' noto che in tutti li tubi comunicanti, qualunque sia la loro ampiezza e struttura, l' acqua si alza alla medesima altezza di quella contenuta nel vaso col quale essi comunicano. Dunque se li getti si formassero per la riferita causa e nel modo che propone l' Autore, succederebbe che tutti,

posta una medesima e costante altezza dell' acqua nel vaso o conserva, si alzerebbero ad una eguale altezza, qualunque si fosse la struttura delle canne; e comunque grande e diversa fosse l'ampiezza e forma degli orifizj. Cosa che è contraria al fatto.

Osservo inoltre, che qualora l'acqua si sostiene e si alza per pressione, e non di per sè stessa in vigore d' un moto impressole, e da cui ella medesima sia determinata a passare da luogo a luogo, è necessario per poterla spinger in alto e tenerla sospesa, che venga sostenuta da ogni lato, come appunto succede mentre si alza per entro a tubi; altrimenti essa per la sua fluidità scorre giù e si spande per ogni verso in vece di portarsi in alto. Dunque le particelle dell'acqua, le quali nei getti verticali s' innalzano liberamente per l' aria senza essere trattenute dai lati, deve dirsi che ascendano per un moto loro proprio ed intrinseco, ricevuto nel punto d' uscire dall' orifizio del vaso o tubo; e non già perchè sieno portate e sostenute dal peso ovvero dalla pressione dell' acqua esistente nel vaso dal quale fluiscono, come succede nei tubi comunicanti. Ommetto varie altre ragioni tratte dall' esperienza, che potrei produrre contro la nuova teorìa dei getti proposta dall' Autore; e aggiungo soltanto un esperimento il quale anche solo è bastante a dimostrare, che i getti verticali si formano in quanto che l' acqua spremuta dal vaso per un orifizio riceve e contien in se stessa una velocità per cui essa medesima si muove indi di per sè, e si trasporta a tutta quell' altezza a cui si veggono salire li getti. L' esperimento decisivo e insieme facile è questo. Si chiuda instantaneamente l' orifizio d' un getto verticale, togliendo in un tratto tutta la comunicazione tra l' acqua del tubo da cui esce il getto, e quella già uscita e che forma attualmente nell' aria tutta la colonna perpendicolare del getto lunga quanto è l' altezza a cui arriva il getto fuori del tubo; e si vedrà che quest' acqua prima di cadere segue ancora ad alzarsi slanciandosi tutta in un batter d' occhio a quell' altezza medesima a cui sarebbe già montata senza l' interrotta comunicazione; come io mi sono accertato facendo le prove in un getto dell' altezza di circa piedi 15. Non vi può essere dunque il menomo dubbio, che le particelle dell' acqua dei getti verticali non

abbiano in sè stesse al momento che sortiscono dall' orifizio una velocità di trasportarsi a tutta quell' altezza a cui si veggono poggiare, e che da questa velocità loro intrinseca nasca e dipenda tutta l' ascesa di essi getti verticali. Donde segue che sia vera e legittimamente dedotta dall' altezza de' getti verticali la prova e conferma della loro velocità corrispondente all' intera altezza dell' acqua contenuta nel vaso.

Le vene formate dal fluido che esce pei fori dei vasi anno la figura della parabola.

VII. Esposto come dall' altezza dei getti verticali prossimamente uguale a quella che ha l' acqua nel vaso da cui escono, si ricava una prova certa della comun sentenza degli Idraulici; e sciolte le difficoltà prodotte contro di questa prova fondamentale tratta dall' esperienza, passiamo ai getti delle vene orizzontali.

E' cosa già dimostrata e certa, che un corpo qualunque slanciato con direzione parallela all' orizzonte (e lo stesso s' intenda se la direzione fosse inclinata) supposto che continui a muoversi con velocità sempre costante ed uniforme, e nel tempo stesso obbedisca alla forza acceleratrice della gravità, questo corpo deve descrivere con tali moti combinati una parabola. Che se i corpi tutti gettati per aria non segnano una parabola, ciò nasce per l' impedimento o ritardo che loro presenta l' aria per cui passano. Quindi se il corpo abbia molto peso, e poco volume, e di più si getti con pochi gradi di velocità, nè abbia a muoversi per un lungo spazio; siccome allora la resistenza o ritardo cagionato dall' aria si rende insensibile, ne verrà che la curva descritta da un tale corpo debba essere una parabola. Il che si verifica e si conferma dai Fisici coll' esperienza come è già noto. (sGravesande phys. elem. l. 1. cap. 22.)

Ora la stessa legge e dimostrazione che ha luogo per la caduta del corpo solido gettato con direzione parallela all' orizzonte, deve avere luogo anche nel corpo fluido, cioè in una vena d' acqua. Imperciocchè come il solido così una vena di fluido è atta a muoversi orizzontalmente con una data velocità, e l' uno e l' altro corpo è ugualmente soggetto alla stessa azione della gravità. E però una vena d' ac-

d' acqua che esca da un vaso per una luce fatta nel lato con direzion parallela all' orizzonte descriverà una parabola ogni qual volta si prescinda dalla resistenza dell' aria. Ma l' aria essendo assai rara e di niuna sensibile coerenza, non può produrre ritardo sensibile in una vena densa d' acqua, spezialmente se questa si slanci con poca velocità, e sia ricevuta su d' un piano a poca distanza dalla luce, sicchè non abbia a scorrere che breve tratto prima di terminare la sua caduta. Dunque almeno le vene poco celeri, e di breve tratto, se non anche tutte le altre di notabile velocità e caduta, formeranno una vera parabola.

Quindi cade l' obbiezione del rispettabile Autore, il quale sostiene che dai getti orizzontali non si possa conoscere la velocità con cui essi getti fluiscono dal vaso, perchè secondo lui tali getti non sono parabolici, come si suppone che lo sieno allorchè col mezzo della loro ampiezza si prende e si definisce la misura della velocità da cui sono animati nell' uscire. Pretende Egli (cap. 4. paragr. 45.) che sia non già un fatto, un principio certo, ma un principio supposto, una mera ipotesi la curva parabolica che si risguarda e si assume nelle vene che fluiscono orizzontalmente; e che per conseguenza ipotetica e non certa, matematica e non fisica sia la misura della velocità che si ricava da tale principio. *Se i gravi*, ei dice, *lanciati in aria son ben lontani dal descrivere la parabola Apolloniana, molto più debbono esserlo i liquori, atteso il loro composto particolare, e il particolar modo con cui cadono per aria a differenza dei solidi.*

Ma io credo per contrario che sia una supposizione, e supposizione falsa quella di porre che le vene d' acqua che escono per luci verticali non formino una parabola. Nè punto vale la prova addotta, essendo inconcludente per due ragioni. Prima, perchè suppone generalmente vero che li gravi gettati per aria non descrivano una parabola. Non la descrivono se abbiano a percorrere lungo spazio e ad incontrare sensibile resistenza; ma la descrivono se si muovono per breve tratto; e senza che l' aria giunga a produrvi nel loro moto un sensibile ritardo, come ho notato di sopra. Seconda, perchè suppone che se i gravi lanciati non si muovono in parabola, molto meno possan farlo i flui-

di, cioè le vene d'acqua. A me pare tutto il contrario. Voglio dire che quand'anche un corpo solido lanciato in aria non descriva una parabola a cagione della resistenza e ritardo che gli fa l'aria, la possa tuttavia e la debba formare la vena d'acqua. Imperciocchè il corpo, il quale movendosi nell'aria viene ritardato, non può mai ridursi ad una uniforme e costante velocità; ma per l'opposto la vena d'acqua formando un corpo continuo e permanente nell'aria dal principio al fine per tutto il tratto che in esso vi occupa, deve, dopo fatta quella tal perdita di velocità, che la resistenza dell'aria le potesse cagionare, persistere costantemente in una determinata e sempre costante ed uniforme velocità; come lo dimostra anche l'ampiezza del suo getto, il quale si mantiene sempre ugualmente grande, ossia della medesima ampiezza per tutto il tempo che la vena si lascia fluire sotto una stessa permanente altezza dell'acqua nel vaso.

Se dunque la velocità nella vena dopo essersi dirò così equilibrata colla resistenza dell'aria, riducesi a velocità costante ed uniforme, e tale sempre si mantiene senza nè crescere nè calare; ne segue che la vena, ammessa anche come sensibile la resistenza ed il ritardo che le fa l'aria, debba ancora descrivere una parabola. Con questa sola differenza, che la descritta parabola, se è sensibile l'effetto della resistenza dell'aria, nè la vena ricuperi prontamente la velocità perduta nel primo tempo che si fece strada per l'aria, riuscirà meno ampia di quella che formerebbesi dalla stessa vena, esclusa ogni resistenza dell'aria. Se io dunque non m'inganno su questo punto, è dimostrato che anche nella supposizione che l'aria opponga una sensibile resistenza alla vena d'acqua, ciò nulla ostante debba essere ancora parabolica la curva che si forma dalla medesima vena, la quale uscendo dal vaso per una luce verticale viene ricevuta sopra d'un piano orizzontale. Ma già non può essere per niente sensibile la resistenza dell'aria dove si tratti spezialmente di vene poco veloci, e che si lasciano scorrere per un assai breve tratto. E però deve stimarsi fuori d'ogni dubbio, che almeno li getti di queste sieno altrettante parabole. Ciò che viene confermato anche col mezzo dell'esperienza.

Li getti orizzontali sono una nuova prova della verità del comun principio, e della falsità di quello dell' Oppositore.

VIII. Era necessario mettere in chiaro, e come fuori di controversia questo punto, che viene contrastato dall' illustre Autore, intorno la figura parabolica dei getti orizzontali d' acqua, perchè da tale loro figura dipende la misura e la prova della velocità, che per mezzo di essi getti si prende e si assegna per il moto con cui esce l' acqua dai vasi. Imperciocchè consta presso i Fisici, che qualora la vena d' acqua che esce da un vaso per un orifizio, con direzion orizzontale, formi una parabola, l' altezza a cui compete la sua velocità è uguale al quadrato dell' ampiezza di essa vena diviso per il quadruplo della distanza che passa tra il centro dell' orifizio da cui esce la vena, ed il piano orizzontale sul quale cade la stessa vena, e se ne prende l' ampiezza.

Così parimente consta che l' ampiezza di tal vena parabolica è sempre uguale alla radice del prodotto che risulta moltiplicando l' altezza a cui corrisponde la velocità di essa vena per il quadruplo della distanza tra l' orifizio ed il sottoposto piano orizzontale in cui si prende l' ampiezza.

Ond'è che misurata l'ampiezza ossia l'ordinata della vena in un piano posto ad una qualche determinata distanza sotto l' orifizio, si conosce l' altezza a cui corrisponde la velocità di essa vena, e per conseguenza si ha facilmente anche la vera misura della stessa velocità. E viceversa nota che sia questa velocità, ovvero l' altezza a cui essa corrisponde, si determina anche l' ampiezza che deve avere la vena sotto una qualunque data distanza dall' orifizio.

Premesse queste notizie, e provato prima che il getto della vena orizzontale è parabolico, consultiamo ora gli esperimenti per vedere, se dall' ampiezza dei getti orizzontali si raccolga in essi quella velocità che devono avere secondo la comun sentenza degli Idraulici, od altra che si uniformi al nuovo principio dell' Autore.

Potrei servirmi alla prima delle altrui sperienze, ma per togliere certe difficoltà che fa il chiarissimo Autore,

specialmente intorno la contrazione delle vene, e meglio poter ragionare sopra questo argomento, ho voluto fare io stesso gli sperimenti de' getti orizzontali, che ora esporrò coi risultati de' medesimi.

IX. Presi un vaso quadrato di legno del lato internamente di piedi 1. 2. 6., misura di Parigi, della quale mi sono sempre servito. Ad un pollice circa sopra il fondo aveva tre fori, ognuno del diametro di linee 14. circa, disposti in modo tutti e tre in un medesimo lato ossia facciata del vaso, che il centro di ciascuno trovavasi in una stessa linea orizzontale. Esteriormente al lato del vaso applicai sopra ciascun foro una lamina d'ottone sottilissima, poichè la sua crassezza era minore d' un quarto di linea. Aveva ognuna una luce circolare il cui centro corrispondeva all' asse del foro coperto dalla lamina. Il diametro della luce era di linee 2. in una lamina, in un' altra di linee 4., e nella terza di linee 6.

Tralascio di descrivere il modo da me praticato per tenere assicurate e ferme le suddette sottilissime lamine, come anche per chiudere ed aprire le loro luci senza che si sconcertassero per la grande sottigliezza.

L' acqua nel vaso era mantenuta costantemente all' altezza di due piedi sopra il centro delle tre luci. Misurate le ampiezze delle tre vene su d' un piano orizzontale, collocato un piede sotto il centro delle tre luci, furono all' incirca come segue: cioè l' ampiezza nella vena della prima luce del diametro di 2. linee fu piedi . . . 2. 9. 3.
quella della seconda fu piedi . . . . 2. 9. 7.
E quella della terza luce del diam. di 6. lin. fu p. . 2. 9. 8.

Situato lo stesso piano orizzontale alla metà della prima distanza, cioè mezzo piede soltanto più basso del centro delle luci, le ampiezze dei getti delle stesse tre vene furono sensibilmente le seguenti, cioè
quella della prima e più sottile piedi 1. 11. 6.
quella della seconda . . . piedi 1. 11. 10.
e quella della terza e più grossa di tutte p. 2. prossimamente.

Vediamo ora quelle ampiezze ossiano ordinate di tali getti parabolici, le quali si avrebbero dovuto avere secondo la comun sentenza degli Idraulici, che ascrive alle vene

una velocità corrispondente a tutta l'altezza dell' acqua contenuta nel vaso sopra le luci.

L'ordinata ossia l'ampiezza delle vene effluenti con una velocità corrispondente all' altezza di due piedi, qual è quella dell' acqua nel vaso da noi impiegato, si trova col facile metodo di calcolo sopra descritto (n. 8.) che è di piedi 2. 9. 11., posta l' ascissa d' un piede, come nelle tre prime sperienze. E coll' ascissa di mezzo piede, come nelle altre tre posteriori sperienze, risulta l' ordinata delle stesse vene di piedi 2.

Facendo pertanto un confronto tra queste ampiezze, e quelle trovate coll' esperienza, si vede che sono sensibilmente le stesse, specialmente nelle due vene più grosse, e dove l' ascissa è soltanto di mezzo piede, arrivando nella vena la più grossa di tutte ad essere l' ampiezza effettiva uguale si può dire affatto a quella della velocità di tutta intera l' altezza dell' acqua.

Ma per l' opposto se si voglia fare un confronto tra le ampiezze trovate, e quelle che si avrebbero dovuto osservare secondo la nuova teoria dell' Autore, si vedrà una differenza tale che dimostra evidentemente che quella nuova teoria è contraria al vero. Insegna il chiarissimo Autore, come abbiamo avvertito da principio (n. II.) che, se tutta l' altezza dell' acqua nel vaso sopra dell' orifizio per cui esce la vena, sia A, l' altezza a cui compete la velocità di essa vena non è tutta A, ma è invece soltanto $\frac{2}{5}$ A incirca, oppur $\frac{54}{125}$ A, e accuratamente $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$. Prendendo quest' ultima, che è la maggiore delle altre due e l' accurata; e sostituendo in luogo di A l' altezza dell' acqua nel nostro vaso che era di piedi 2, ossia di linee 288, ed estraendo la radice per via di decimali, si trova $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ uguale a linee 136, che formano piedi 0. 11. 4. E però la velocità nelle vene delle nostre sperienze non sarebbe stata che tanta quanta è quella che corrisponde ad un' altezza di pollici 11. e lin. 4. Ma l' ampiezza ossia l' ordinata d' un getto parabolico formato da una vena d' acqua che fluisca e scorra orizzontalmente con tutta questa velocità, è soltanto pie-

di 1. 11. 4. posta l' ascissa d' un piede; e piedi 1. 4. 6. coll' ascissa di mezzo piede.

Dunque poichè queste ampiezze sono come si vede molto minori di quelle trovate coll' esperienza, e che hò di sopra riferite, resta dimostrato che l' acqua la qual esce da un vaso per una semplice tenue luce non ha una velocità qual le competerebbe secondo la nuova teoria dell' Autore, ma ne ha effettivamente una molto maggiore, e tale che corrisponde prossimamente a tutta l' altezza dell' acqua contenuta nel vaso sopra della luce.

X. Io non pretenderò che non vi possa essere corso errore di qualche parte di linea, o forse anche della quantità d'una linea e più, nelle misure prese e da me assegnate delle ampiezze delle vene, sebbene abbia ripetuto più volte le stesse prove usando tutta la possibile diligenza. Ma si sa che in simili misure è quasi impossibile d' evitare ogni qualunque minimo eccesso, e difetto. Imperciocchè per tacere di altre cause atte ad alterare la misura esatta della vera ampiezza del getto, basta riflettere al solo punto che si assegna per estremità ossia limite del getto, ch' è il punto di mezzo, e come il centro della sezione colla quale la vena tocca il piano orizzontale sul quale essa cade. Questo punto si prende e si segna nel piano come per il sito corrispondente all' asse della vena per quanto coll' occhio si può giudicare. Ma essendo di qualche notabile estensione la sezion della vena sul piano, è manifesto che tale punto può comparire all' occhio egualmente in mezzo, sia che si prenda e si segni qualche linea più avanti, o più indietro. Quindi allorchè dalle misure prese si stabiliscono e si assegnano le ampiezze dei getti delle vene d' acqua, non si vuol pretendere che tali ampiezze sieno sempre le affatto vere e giuste a tutto rigore: ma bensì che poco se non anche niente sensibilmente differiscano dalle vere ed esatte; e che però si possano in pratica prendere e considerare sempre come le vere od equivalenti alle vere senza alcun notabile errore.

Ma perchè nelle sperienze da me fatte in piccolo, quand' anche si voglia supporre un qualche eccesso o difetto nelle misurate ampiezze, questo non può mai essere che della quantità di poche linee; e perchè ammessa anche

questa tale differenza, si trova ancora che l'ampiezza delle due vene più grosse non decade neppure della quantità d'un pollice dall' ampiezza dovuta alla velocità di tutta l'altezza dell' acqua: da tutto ciò ne segue che dalle ampiezze trovate giustamente s' inferisca che la velocità delle vene possa e debba aversi come corrispondente a tutta l'altezza dell' acqua mantenuta nel vaso sopra il centro delle luci verticali.

Ciò con più di ragione ancora si potrà conchiudere, se si trovi che le ampiezze dei getti possono essere minori di quelle corrispondenti alla velocità di tutta l' altezza dell' acqua, sebbene con tale velocità le vene sieno realmente spinte e mosse fuori del vaso. Questo si rende manifesto nelle mie sperienze. Imperciocchè volendo anche trascurare, perchè assai piccola, la differenza tra le ampiezze delle due vene più grosse, ho osservato costantemente che l' ampiezza della vena del diametro di 2 linee era sempre minore sensibilmente di quella delle altre due vene, sicchè la vena più sottile lanciavasi sempre a minore distanza delle altre due. Ora non si vorrà mai supporre che questo difetto, che costantemente si è osservato nell' ampiezza della vena più sottile rispetto all' ampiezza delle altre due vene, nasca da difetto di forza e velocità con cui essa vena è cacciata dall' acqua del vaso, ma bensì che abbia origine da cause estranee, atte a scemare la vera e naturale velocità delle vene: E queste tali cause devono essere l' attrito che le particelle componenti le vene soffrono negli orli interni delle luci, la coerenza delle parti del fluido circondanti la vena presso l' orifizio e trattenute nel vaso, e la resistenza dell' aria. E siccome dette cause anno più vigore nelle vene sottili, che nelle grosse sino a certo grado, supposta la stessa natural velocità in tutte, così le più sottili sono anche le più ritardate, e però d' una minore ampiezza. Ma queste osservazioni, mentre giustificano la sentenza comune, se li risultati delle sperienze non vi corrispondono esattamente, vagliono a farci riprovare maggiormente l' altra. Imperciocchè essendo certo che le vene ponno venire ritardate, od anche lo vengono realmente per le addotte cause; e osservandosi ciò non ostante, che le loro ampiezze sono ancora molto maggiori di quelle che potreb-

bero mai avere se si movessero effettivamente con tutta affatto la velocità che loro assegna l' illustre Autore, e senza patire alcun ritardo; ne segue da ciò che debba essere falso che le vene fluiscano con quella velocità soltanto che ad esse competerebbe secondo la nuova dottrina dello stesso Autore.

Obbiezioni e risposte intorno le sperienze dei getti orizzontali.

XI. Da quanto abbiamo ora esposto apparisce inoltre, che a torto oppone il chiarissimo Autore (cap. 4. par. 46.) che anche supposti li getti parabolici, tuttavia non si trovano coll' esperienza delle misure prese nelle ampiezze de' getti orizzontali le velocità corrispondenti alle altezze intere. Imperciocchè abbiamo veduto che dove gli ostacoli esterni non alterino sensibilmente la naturale velocità nelli getti, le loro ampiezze corrispondono assai bene, quanto si può avere in pratica, alle velocità delle intere altezze; e dove non vi corrispondono, se ne scorge la cagione d' una tale differenza; quando per contrario non si trova mai che l' ampiezza dei getti s' accosti a quella che richiederebbesi nella sentenza del lodato Autore, ma che riesce molto più grande a fronte anche degli obici e ritardi che soffre il corso delle vene.

E' poi mirabile cosa, che esso Autore per combattere le prove, che dalle ampiezze de' getti si traggono per la comun sentenza, ricorra a quelle misure delle velocità che con un tale metodo furono trovate dal Krafft coll' approvazione del grande Eulero che fu presente agli sperimenti. Dopo aver egli tentato di provare che le vene, le quali fluiscono con direzion parallelá od inclinata all' orizzonte, non formano un getto parabolico, alla qual obbiezione abbiamo già risposto, passa a dire, che ammesso anche che le vene formino la parabola, ancora non si trova che escano dal vaso e fluiscano con una velocità corrispondente a tutta l'altezza dell' acqua, ma bensì con altra assai minore. Ed ecco come egli a un di presso ragiona e conchiude.

Risulta al Sig. Bossut da moltissimi sperimenti essere l' altezza dell' acqua permanente nelle conserve all' altezza dovuta alla velocità con cui escono le vene da' fori armati di

tu-

tubo, come 1708 a 1111, cioè come 3738 a 2431. Ma se consideriamo le sperienze solenni instituite dal Sig. Krafft a Pietroburgo, destinate a misurare la quantità dell' impulsione delle vene fluide, si vede che le altezze, che ricavò il Krafft dalle ampiezze dei getti considerati di figura parabolica, furono come segue; cioè a dire, mantenuta costantemente l' acqua nel vaso sopra il tubo all' altezza di 3738 parti di quelle, delle quali 2000 formano il piede di Londra, l' altezza che trovò il Krafft competere alla velocità della vena fu nel primo sperimento 2557, nel secondo 2579, nel terzo 2753, e nel quarto 2539 di tali parti. Dal che apparisce che le velocità delle vene trovate per mezzo delle ampiezze de' loro getti sono molto minori di quella dovuta a tutta l' altezza dell' acqua nel vaso.

Io osservo che in questo ragionamento ci sono dei sbagli o almeno degli equivoci, e che, ben intesa la cosa, a nulla si riduce la sua forza per conchiudere contro il principio che sosteniamo. E primieramente si rifletta, che noi trattiamo della velocità delle vene effluenti per semplici luci, cioè per orifizj fatti in tenui lamine, od in sottilissime pareti del vaso; e gli sperimenti riportati dall' Autore sono fatti in vene d' acqua trasmesse per tubi, per li quali fluendo perdono parte della loro naturale velocità.

In secondo luogo è da avvertirsi che la misura della velocità, che il Bossut ha trovato competere alle vene uscenti dai fori armati di tubi, ch' è quanto dire alle vene trasmesse per tubi, non è una misura generale che vaglia per qualunque tubo cilindrico si adoperi, ma è una misura, che ha luogo soltanto nei tubi cilindrici d' una certa lunghezza, cioè per quei tubi che hanno quella lunghezza soltanto, o poco maggiore di quella, che basti a fare che la vena s' ingrossi a segno di sortire per l' orifizio esteriore senza contrazione, cioè a dire con un' ampiezza uguale a tutta quella della luce del tubo. Ma il tubo del quale si servì nelle sue sperienze il Krafft avanzava per entro l' interna capacità del vaso, ed era più lungo di quello di cui parla il Bossut; e si sa inoltre che il Krafft cangiò la lunghezza dello stesso suo tubo in tutti li primi tre riferiti sperimenti (tomo 8. dei Commentarj dell' Accad. all' anno 1736.). Da tutto ciò veniamo a conoscere come

senza alcun pregiudizio della dottrina degli Idraulici intorno la velocità delle vene, abbia potuto ed anzi dovuto succedere, che la velocità assegnata dal Bossut alle vene effluenti per tubi sia minore di quella dovuta a tutta l'altezza dell'acqua; e come la velocità trovata nelle vene misurate dal Krafft sia ancora un po' minore di quella definita dal Bossut; e di più dalle premesse riflessioni si ricava come sia accaduto, che nè anche in tutte le vene degli sperimenti del Krafft sia risultata sempre una stessa misura affatto della loro velocità. Imperciocchè si ponno giustamente ripetere quelle minute differenze dalla variata lunghezza del tubo, e da quelle tali alterazioni, che sono come inevitabili ne' risultati di simili sperimenti.

Anche cogli esperimenti fatti in grande dal dotto e celebre Sig. Francesco Domenico Michelotti si trova dimostrato ciocchè fin quì si è da noi accennato ed esposto riguardo alla perdita di velocità che soffrono le vene allorchè sono trasmesse per tubi, come anche riguardo alla misura presa coll'ampiezza dei getti orizzontali della velocità, da cui diciamo, che sono animate le vene mentre fluiscono per semplici luci. Tralascio di riferire cotali sperimenti che si ponno riscontrare nella di lui opera (Sperim. Idraul. Vol. 2. disc. 2.), nè abbisognano d' illustrazione.

Delle sperienze fatte coll' acqua che si dispensa dai forami dei vasi, per misurarne la velocità. Anche queste sono contrarie al nuovo principio idraulico.

XII. Passiamo omai al terzo metodo di conoscere e misurare la velocità del fluido che esce dai vasi per semplici luci, il qual metodo consiste nel raccogliere e misurare la quantità che in un dato tempo ne sortisce dal vaso sotto una data costante altezza, e per una determinata luce. Il chiarissimo Autore trattando dei due metodi finora spiegati per conoscere col fondamento delle sperienze la velocità delle vene e getti del fluido, si è studiato soltanto d' impugnarli senza trarre da essi una prova positiva per la sua propria sentenza. Ma parlando di questo terzo metodo non solo cerca di mostrare che per questa via non si rileva che

sia vero il principio degli Idraulici intorno la velocità delle vene; ma di più pretende che da questo tal genere di sperimenti si verifichi e si confermi il nuovo principio da lui trovato ed ammesso.

Prima di sentire come egli ragioni su questo punto, spieghiamo l' accennato mezzo di conoscere la velocità delle vene, e vediamo come per esso, tutto all' opposto di ciò che insegna e difende l' illustre Autore, si confermi la sentenza comune, e si dimostri l' insussistenza di quella che Egli ha creduto di sostituire come la vera.

Si raccoglie, come è già noto, e si misura l' acqua che in un dato tempo esce dal vaso; indi con un facile calcolo si converte dirò così quell' acqua in un cilindro (supposto che l' orifizio per cui esce sia circolare) che abbia una base uguale alla base ossia latitudine della vena, e se ne definisce la lunghezza di tale cilindro: e appunto la lunghezza di questo cilindro uguale a tutto il volume dell' acqua uscita, e la cui base sia la latitudine ovvero sezione della vena perpendicolare al suo asse, forma la misura della celerità della stessa vena, presentando quella lunghezza lo spazio che l' acqua avrebbe percorso continuando a muoversi colla medesima velocità con cui uscì fuori del vaso per tutto quel tempo che durò la dispensa.

Trovata la velocità della vena colla misura dello spazio che avrebbe percorso in un dato tempo, si conosce a quanta altezza corrisponda essa velocità; cioè si definisce l' altezza da cui un corpo cadendo liberamente giugnerebbe ad acquistare quella tale velocità; giacchè altronde si sa che un grave cade in un minuto secondo di tempo per l' altezza di circa piedi 15. 1, e riceve una velocità di scorrere un doppio spazio in pari tempo; ed è pur dimostrato che le velocità che si acquistano dai gravi cadendo stanno fra loro come le radici delle altezze. Esposte queste poche nozioni già note ad ogni Fisico e Idraulico, veniamo agli sperimenti.

XIII. E' celebre l' esperimento instituito dal March. Poleni, ch' è il sesto di quelli che egli descrive in una sua lettera del dì 21. Giugno 1724 diretta al Varignoni, e che da alcuni autori viene riferito con qualche variazione corsa

per isbaglio (*b*). Lasciò il Poleni uscire per un minuto l'acqua da un vaso per un tubo cilindrico lungo linee 7, e del diametro di linee 3, misura di Parigi, di cui si è sempre servito il Poleni; e trovò che uscirono pollici cubici 905., venendo mantenuta l'acqua nel vaso costantemente all' al-

(*b*) Il Poleni seguendo il metodo tenuto dal P. Ab. Grandi (Del movimento dell' Acque lib. 2. cap. 2. prop. 10. cor. 3) confrontò la velocità dell' acqua nel suo sperimento primieramente con quella che acquisterebbe un corpo cadendo dall' altezza di 13 piedi nella supposizione, che un grave cadendo non percorra che soli piedi 12 di Parigi in un minuto secondo, come pretesero il Mersenno, ed il Mariotte attesa la resistenza dell' aria; e trovò che la velocità dell' acqua era maggiore di quella di un tale corpo (contro ciò che aveva trovato il Grandi facendo il suo computo sopra la quantità dell' acqua che il Mariotte aveva raccolta in un minuto mentre usciva bensì sotto un' altezza di 13 piedi, ma per mezzo d' una semplice luce del diametro di 3 linee, e non per mezzo d' alcun tubo); poichè quel corpo non avrebbe acquistata che tanta velocità da scorrere in un minuto piedi 1493, dice Poleni, ed anche il Grandi, ma si deve leggere piedi 1495 incirca; e la velocità dell' acqua si trovò nell' esperimento del Poleni corrispondere a piedi 1536.

Poscia confrontò il Poleni questa stessa velocità dell' acqua con quella che acquisterebbe un grave cadendo similmente come prima dall' altezza di 13 piedi, ma nella supposizione, che un corpo in un minuto secondo scorra cadendo piedi 15. 1; come fu stabilito dall' Ugenio: e in questo caso la velocità dell' acqua risultò un po' minore di quella del grave come si è veduto.

Il Musschenbroekio (Phys. cap. 24. paragr. 1294) riferisce in modo tale l' esperimento del Poleni, che mostra d' avere creduto, che il Poleni abbia confrontata la velocità dell'acqua uscente dall'altezza di 13 piedi colla velocità d' un corpo che cada dall' altezza di piedi 12, indi con quella di altro corpo che cada dall' altezza di piedi 13, e che l' abbia trovata maggiore dell' una, e minore dell' altra.

Un simile sbaglio ha preso anche il P. della Torre (Scienza della natura cap. 27. n. 834.). E per conciliare questi dottissimi Fisici i risultati dei loro computi coi numeri del Poleni, anno dovuto sostituire piedi di Bologna a piedi di Parigi, quando il Poleni praticò sempre la misura del piede di Parigi; ed anno supposto che un grave cadendo dall' altezza di 12 piedi acquisti quella velocità, che realmente non gli compete ammesso il principio già da tutti ricevuto, che un grave percorra nel primo minuto secondo di tempo che si muove cadendo piedi 15. 1. circa. Io congetturo, che questi chiarissimi Autori sieno stati tratti in tale inganno per non avere forse veduta l' opera del Grandi, senza della quale può riuscire come ambiguo ed incerto il senso dell' opposizione che in pochi cenni ne fa il Poleni nella citata sua lettera latina al Varignoni.

tezza di piedi 13 sopra il foro per cui usciva la vena. Ora questa copia d' acqua forma un cilindro della base uguale a quella del tubo, lungo circa piedi 1536. Quindi si conchiude che la velocità di quella vena era tanta di percorrere in un minuto circa 1536 piedi.

Ma la velocità che acquista un corpo cadendo dall' altezza di piedi 13 è tanta di fargli passare con moto equabile in un minuto piedi 1680 circa, posto che in un minuto secondo scorra cadendo piedi 15. 1. Dunque la velocità della vena nell'esperimento Poleni, trovata coll' indicato metodo, risulta non poco minore di quella che compete a tutta l' altezza dell' acqua nel vaso; e per dire lo stesso in altri termini, la vena nell' esperimento Poleni somministrò una quantità d' acqua minore di quella, che richiederebbe la velocità dell' altezza di 13 piedi. Di fatto se l' acqua uscita e raccolta in un minuto fosse stata pollici cubici circa 990 invece di 905, allora avrebbe formato un cilindro della lunghezza di piedi 1680 circa colla base uguale al lume del tubo.

Diremo noi dunque che l' esperimento Poleni in luogo di servire di prova alla comun sentenza degli Idraulici, sia una prova della nuova sentenza del rinomato Autore? Anzi per l' opposto dobbiamo dire che è una dimostraziona contro questa seconda, posto che si voglia da quell' esperimento e metodo di misurare la velocità della vena inferire e adottare ciocchè ne risulta. Imperciocchè dovendo essere, secondo la dottrina del lodato Autore, la velocità effettiva della vena, a quella dovuta a tutta l' altezza dell' acqua nel vaso, prossimamente come 36 a 55, ossia come $5\frac{13}{55}$ a 8; si trova che la velocità della vena nell' esperimento Poleni sarebbe, rimossi anche tutti gli ostacoli, tanta solamente di percorrere in un minuto piedi 1098 incirca.

Ma dall' esperimento Poleni si ricava una velocità nella vena di scorrere piedi 1536. Dunque la velocità con cui uscì l' acqua secondo che risulta dall' esperimento Poleni, è molto maggiore di quella voluta dall' Autore: anzi si vede che si discosta assai più per eccesso dalla velocità, che dovrebbe avere secondo l' Autore, di quello si discosti per difetto dalla velocità richieduta dal principio degli Idrauli-

ci. E perchè non avvi ragione alcuna che possa accrescere a tal segno nella vena la sua velocità naturale con cui viene cacciata fuori del vaso; e per contrario molte cause ci sono da cui poter ripetere il decremento di essa velocità; ne segue evidentemente che da tale sperimento, comunque non esatto nè ben sicuro per l'oggetto che si cerca, resti confutata la nuova teoria del suddetto rispettabile Autore.

Ho detto che quell' esperimento non è esatto e sicuro riguardo all' oggetto che si cerca, cioè per rilevare se l'acqua sia cacciata fuori del vaso per una semplice luce con velocità corrispondente a tutta l'altezza; ed eccone la ragione.

Il tubo cilindrico nell' esperimento Poleni o toglieva in tutto, od in parte almeno la contrazione della vena, oppure (per considerare tutti i casi) suppongasi che non la togliesse in niente. Se l'impediva del tutto, allora è certo che la velocità di quella vena veniva notabilmente scemata per mezzo del tubo, nè poteva più riuscir eguale a quella che avrebbe avuto se fosse uscita per una semplice luce: e se l'impediva in parte soltanto, di nuovo ne doveva succedere una qualche diminuzione nella sua velocità, e di più avrebbe avuto la vena un diametro più piccolo di quello della luce del tubo. Se finalmente la vena d'acqua per mezzo di questo tubo non avesse perduto niente della sua naturale contrazione acquistando una maggiore grossezza di quella che suol avere allorchè esce liberamente per una luce scolpita in sottil lamina; in questo caso (che già consta dall' esperienza che non successe) dando, come si è fatto, al cilindro dell' acqua uscita una base uguale alla luce del tubo, si veniva a dargli una base maggiore dell' ampiezza della vena a discapito della lunghezza del medesimo cilindro. Quindi qualunque delle ora fatte supposizioni si voglia che abbia avuto luogo, doveva necessariamente la velocità trovata coll' esposto metodo riuscir minore della velocità naturale e vera della stessa vena, vale a dire della velocità corrispondente alla forza con cui veniva la vena cacciata fuori dall' acqua contenuta nel vaso, e che avrebbe avuto uscendo per una semplice luce. Ma queste ragioni le quali, prescindendo anche da ogni altra causa esterna ritardatrice della vena, rendono manifesto perchè la velocità

trovata dal March. Poleni sia stata minore di quella che richiede il principio degl' Idraulici, e però servono come di giustificazione e difesa dello stesso principio nel confronto di tale sperimento, vagliono le medesime ragioni a confutar per contrario e mostrare maggiormente falsa la misura della velocità assegnata dal lodato Autore; come si è dedotto similmente da altre in fine del n. X., giacchè a fronte di tutte le accennate cause tendenti a far che si trovasse una velocità minore della vera, si è ciò non ostante trovata una grandezza tale di velocità, che riesce, come abbiamo veduto, di gran lunga maggiore di tutta quella che l'acqua avesse mai potuto avere secondo la nuova teoria dello stesso Autore.

XIV. Sebbene l'esperimento Poleni, comunque soggetto ai difetti che abbiamo notati, potesse bastare se non di prova certa per la sentenza comune, come da molti si prende, almeno di una confutazione sicura per la particolar e nuova dell' Autore; nè manchino sperienze in tal genere di altri insigni Idraulici, le quali essendo esenti dall' imperfezione prodotta dall' uso del tubo in quella del celebre Sig. March. Poleni, potrebbero maggiormente convalidar ed illustrare il soggetto che trattiamo, per quanto è permesso di raccogliere la velocità delle vene dalle loro dispense, ciò non ostante io all' occasione di fare gli sperimenti dei getti orizzontali, che ho riferito (n. IX.), mi sono invogliato di vedere anche quella misura della loro velocità, che a un di presso avessi potuto rilevare per via dell' acqua uscita.

Raccolsi dunque l' acqua dispensata nel tempo d' un minuto tanto per la luce del diametro di 4 linee, che per quella del diametro di 6 linee. Siccome ebbi risultati affatto simili da tutte due le vene, così riferirò soltanto l'esperienza fatta colla vena effluente per la luce del diametro di 6 linee.

L' acqua che dispensò questa vena in un minuto, che io misurai colla sfera d' un orologio a secondi, fu prossimamente oncie grosse di Padova 484, che formano grani 379 146 del peso di zecchino, importando un' oncia grani $793 \frac{9}{25}$ di tale spezie di peso. Siccome io allorchè feci gli

sperimenti per misurare la forza premente delle vene, aveva trovato e definito il peso espresso in simili grani, d' un cilindro d' acqua del diametro di $\frac{1}{2}$ pollice, e lungo poll. 12., come anche di altri cilindri; così mi fu facile il convertire l' acqua raccolta in un cilindro del diametro di $\frac{1}{2}$ pollice, qual era appunto il diametro della luce per cui uscì la vena; instituendo questa proporzione, cioè come 900 grani, peso già altra volta misurato, del cilindro d' acqua del diametro di $\frac{1}{2}$ poll. e lungo poll. 12, alla lunghezza di questo stesso cilindro, così il peso dell' acqua uscita al quarto termine esprimente la lunghezza del cilindro formato da tutta l' acqua sotto una stessa base del diametro di $\frac{1}{2}$ pollice. E ne risultò una lunghezza di poll. 5055 circa, che sarebbe la misura della velocità della vena, supposto che questa fosse uscita con un' ampiezza uguale a quella della luce.

Ma la vena esce dal vaso per la semplice luce con un' ampiezza minore dell' area della stessa luce, e dovendosi convertir l' acqua uscita in un cilindro della base uguale a quella della vena, d'uopo è assegnargli una base meno estesa della luce; e quindi la sua lunghezza, misura della velocità dell' acqua effluente, deve riuscire maggiore di quella che si è trovata di sopra, a proporzione che l' ampiezza della vena è per contrario minore dell' ampiezza della luce. E quì appunto è dove sta la maggiore difficoltà per definire con esattezza la velocità della vena per mezzo dell' acqua in un dato tempo raccolta; cioè nel conoscere e determinare accuratamente la vera ampiezza della vena da sostituire per base del cilindro.

XV. Tutti comunemente gli Idraulici dopo la scoperta fattane dal Newton convengono che la vena esca contratta, e che la sua vera ampiezza, ossia sezion perpendicolare da prendersi come base del cilindro, sia quella che si trova avere nel sito dove essa vena è più ristretta, il quale sito è distante dall' orlo interno della luce un raggio circa della medesima luce secondo le osservazioni del Bossut; e meno an-

ancora secondo quelle del Michelotti. Ma come conoscere con tutta esattezza la quantità di questa sezion della vena ristretta? Se col compasso si prenda e si misuri il diametro della vena contratta, è quasi impossibile di non errare di qualche linea (*c*).

Se poi si voglia raccogliere e definire la sezione ristretta della vena facendo un confronto tra l'acqua uscita in un determinato tempo, e quella che avrebbe dovuto uscire qualora la vena avesse fluito senza restringersi, allora bisogna che altronde sia nota la velocità propria dell' acqua che esce dai vasi, e supporre che la vena, di cui si cerca la restrizione, fluisca senza alcun impedimento o ritardo; il che in pratica difficilmente si ottiene. Da tutto ciò intendiamo come la ragione, tra l'area della luce e quella della vena ristretta, non sia affatto la stessa presso tutti gl' Idraulici. Trovo che la massima di tutte è quella assegnata dal Sig. Michelotti, e che sta come 432 a 265, come 324 a 199. A questa si avvicina quella proposta dal Bernulli, e dal Poleni, e che è come 2704 a 1681. Minore di molto è quel-

(*c*) Per poco che sia l' eccesso o difetto che si commette nella misura d' un diametro di poche linee, diviene una quantità sensibile rapporto alla grandezza di esso diametro; come per esempio in un diametro di 6 linee il porre una mezza linea soltanto di più o di meno, altera d' una duodecima parte il vero valore. L' errore introdotto nella misura del diametro ne porta un altro circa tre volte più grande nella periferia, e indi una differenza nell' area del circolo molto notabile. Il che apparisce anche dal solo riflesso che le aree dei circoli seguono la ragione dei quadrati dei loro diametri. La differenza poi sensibile tra le basi di poca ampiezza di cilindri uguali rende molto differente la loro lunghezza, quando spezialmente devono contenere molto volume.

La stessa proporzione di cui si fa uso per conoscere la circonferenza d' un cerchio, e indi la misura della sua area per mezzo della grandezza trovata del diametro può portare a molto differenti risultati. Se nell' esperimento del Poleni, da noi riferito (*n.* XIII.), si assegni per base al cilindro d'acqua l' area dell' orifizio del tubo dedotta dal diametro di 3 linee colla proporzione assegnata da Archimede tra il diametro e la periferia, che è come 7 a 22, risulta la lunghezza del cilindro, non più di piedi 1536, ma di piedi 1574; e però piedi 38 maggiore di quella che si è trovata e posta usando nel calcolo della proporzione più accurata assegnata da Mezio tra il diametro e la circonferenza del cerchio, che è come 113 a 355.

la adoperata dal Bossut di 150 a 100; e la minima di tutte è quella del Newton, che è come 625 a 441, cioè prossimamente come 141 a 100.

Lascio da parte le alterazioni a cui può andare soggetta la misura dell'acqua che si dispensa dalla vena, per la difficoltà d'avere tutto l'esatto e nel tempo e nei pesi ed in altre cose; come anche nella misura stessa delle aree delle luci, che tutte si raccolgono per via della rilevata grandezza del diametro, e della proporzione vera soltanto per approssimazione tra il diametro e la circonferenza del cerchio. Quindi è che io credo che questo mezzo di conoscere la velocità della vena sia ordinariamente il meno esatto e sicuro.

Giova tuttavia vedere quale velocità ci dia questo tal metodo nella vena presa in esame. E' noto che le lunghezze dei cilindri uguali sono in ragione reciproca delle loro basi. Dunque per conoscere la lunghezza del cilindro che può formare l'acqua uscita nel surriferito sperimento, basta instituire questa proporzione: come la sezion ossia area circolare della vena ristretta all'area della luce, così la lunghezza che di sopra (n. XIV.) abbiamo trovata nel cilindro dell'acqua uscita e raccolta, al quarto termine; e questo darà la lunghezza che compete alla velocità dell'acqua.

XVI. Nella varietà di misure ossia di rapporti assegnati tra l'area (*d*) della vena contratta e quella della luce, io

(*d*) Da più cause può dipendere che non si sia trovata e posta da tutti gli Idraulici la stessa ragione tra la sezion ossia area della vena ristretta e quella dell' orifizio, quand' anche fosse vero che una tal ragione sia costante e la stessa in tutte le vene, come sostiene il Sig. Michelotti, e non piuttosto sia di sua natura variabile, e facciasi maggiore crescendo l'altezza dell' acqua nel vaso, come crede il Sig. Bossut.

Queste cause oltre quanto abbiamo avvertito nella nota (*c*) ponno essere le seguenti. 1.ª Alcuni, come il Michelotti, raccolgono e stabiliscono l' ampiezza della vena contratta, per mezzo dell' acqua che si dispensa in un dato tempo, supponendo già che la vena esca e continui sempre a muoversi con una velocità uguale a quella dovuta a tutta l' altezza dell' acqua contenuta nel vaso. Altri, come il Bossut, difiniscono l' area della vena contratta, dalla misura del diametro che prendono con un compasso sferico. Ma apparisce dalle sperienze dello stesso Michelotti, che avendo egli preso in alcune vene col compasso la misura della

mi determino a prendere una ragion media tra quella del Michelotti di 324 a 199, che è una delle massime, e quella del Newton di 141 a 100; e viene ad essere la ragion dell' area della luce a quella della vena come 465 a 299.

---

loro sezione contratta, la trovò un po' maggiore di quella che col calcolo aveva dedotta per mezzo dell' acqua uscita e raccolta. Per esempio in una vena che usciva per una luce del diametro di 6 pollici, il diametro della vena contratta trovato col calcolo era di linee $56\frac{1}{2}$, e quello misurato col compasso fu di linee 58.

2.ª Dal misurare col compasso piuttosto in un sito che in un altro il diametro della vena può prodursi una sensibile differenza. Il sito della massima contrazione nella vena è distante circa un raggio della luce ed anche un po' meno dal margine interno della medesima. E il Newton prese la misura alla distanza di circa un diametro. Ma non è così facile il cogliere il vero punto; nè lo stesso Newton si credette d' averlo colto con sicurezza, esprimendosi nel rapporto da lui difinito tra la sezion della vena e l'area dell'orifizio con queste parole; *Si modo diametros recte dimensus sum* (lib. 2. prop. 36. probl. 8.)

3.ª L' esperienza stessa dimostra che misurandosi col compasso i diametri delle vene non si trovano sempre affatto gli stessi rapporto a quelli delle luci. Dalle misure prese dal Bossut in più vene risulta che l' ampiezza della luce stava a quella della vena ristretta, in due vene come $151\frac{1}{2}$ a 100, in un' altra come $150\frac{3}{5}$ a 100, ed in altre tre come 150 : 100.

Queste tali differenze ponno essere nate dall' essere più o meno lisci gli orli interni degli orifizj, e più forse ancora dalla somma difficoltà di prendere con esattezza la vera e giusta misura dell' ampiezza della vena pel tremore della medesima. Di fatto sebbene il Bossut faccia uso comunemente della ragione di 150 a 100 tra l' area della luce e quella della vena contratta, pure avverte egli medesimo che questa ragione è minore della vera.

4.ª Per ultimo è da riflettersi che sebbene per una facilità di calcolo sovente si soglia sostituire la ragione espressa con due numeri ad altra espressa con altri due numeri, in quanto poca differenza passa tra l' una e l' altra; tuttavia questa tal sostituzione porta delle differenze molto sensibili, qualora si tratta di rilevare in vene di piccolo diametro la loro velocità per mezzo dell' acqua che dispensano. Per esempio alla ragione trovata dal Michelotti tra l' area della luce e quella della vena, ed espressa in questi due numeri 432, 265, si sostituisce da lui medesimo quella di 324 a 199, oppure di 18 : 11. E la ragione trovata dal Newton ed espressa in questi termini, cioè come 625 a 441 viene da altri esposta in questi altri termini cioè di $\sqrt{2}$ a 1, di 141 a 100, ed an-

E instituendo la proporzione di sopra indicata, risulta la lunghezza ricercata del cilindro avente la base uguale alla sezion della vena ristretta, di pollici 7861 incirca; che formano piedi 655. 1. misura della velocità della vena, ch' è quanto dire dello spazio che si sarebbe percorso in un minuto colla velocità con cui fluì la vena.

Ma supposto che un corpo cada in un secondo di tempo per l' altezza di piedi 15. 1., si trova che cadendo dall' altezza di 2. piedi acquista la velocità di scorrere in un minuto pollici 7909, che formano piedi 659. Dunque la velocità della vena trovata col proposto metodo s' accosta prossimamente a quella che compete a tutta l' altezza dell' acqua contenuta nel vaso sopra il centro della luce.

Per contrario riesce moltissimo maggiore di quella che avrebbe potuto avere ammessa la nuova teoria del dottissimo Autore; poichè volendo Egli che supposta l' altezza dell' acqua nel vaso A, corrisponda la velocità della vena a $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$, la qual altezza nel nostro sperimento risulta di linee 136, si trova che la velocità della vena avrebbe dovuto essere tanta solamente di passare in un minuto uno spazio non maggiore di piedi 453.

Osservo per ultimo che quand' anche si volesse far uso nel calcolo della ragione comunemente usata dal Bossut tra l' area della luce e quella della vena ristretta, che è come 150 a 100, ragione conosciuta dallo stesso Bossut troppo piccola, si troverebbe ancora una lunghezza del cilindro molto maggiore di quella che si dovrebbe trovare se fosse vera la nuova sentenza; poichè questa lunghezza sarebbe di circa piedi 631; e secondo la nuova sentenza non potrebbe essere maggiore di piedi 453.

---

che di 17 a 12. Ciò è permesso di fare alcune volte, ma non sempre senza finire in risultati molto diversi; quando il rapporto tra due termini non sia interamente il medesimo che quello di altri due che si sostituisce, come sarebbe il rapporto di 3 al 2 in luogo di quello di 150 a 100 definito da Bossut tra la luce e la sezion ristretta della vena.

A torto si cerca di sostenere il nuovo principio idraulico colla misura dell' acqua che esce dai vasi, pretendendosi che la vena del fluido non esca più ristretta dell' ampiezza dell' orifizio.

XVII. Dimostrato anche con il terzo proposto metodo per quanto può essere esatto e valevole, che la velocità delle vene che escono dai vasi per semplici luci è uguale o pressochè uguale a quella dovuta a tutta l' altezza dell' acqua, vediamo le obbiezioni dell' Autore, ed anzi come Egli dall' acqua che si dispensa in un dato tempo creda di raccogliere e provare che alle vene compete la velocità da lui assegnata.

Si è veduto poco fa che per via dell' acqua che si dispensa pegli orifizj dei vasi si trova, che la vena uscendo per una luce ha una velocità uguale o pressochè uguale a quella dovuta a tutta l' altezza, in quanto che si pone che la vena esca contratta, e si converte l' acqua uscita in un cilindro, al quale si assegna per base la sezion della vena ristretta in vece d' assegnarne una uguale a tutta l' area della luce. Che se per l' opposto si disponga l' acqua dispensata in un cilindro della base uguale all' ampiezza della luce, allora si osserva, che la lunghezza di questo cilindro presa per misura della velocità, presenta nell' acqua uscita una velocità tale che si accosta assai più a quella voluta dall' Autore, che a quella che viene ammessa dal consenso degl' Idraulici. Quindi è che l' Ab. Grandi, per non essere nota a quel tempo la contrazion della vena d' acqua, trovò una difficoltà per lui insolubile a conciliare la misura della velocità che risultava dall' acqua uscita nelle sperienze del Mariotte, e del Guglielmini, con la velocità dovuta a tutta l' altezza dell' acqua nel vaso, ch' esso riconosceva e ammetteva per vera (Del movimento delle acque l. 2. cap. 2. prop. 10.). E lo stesso Newton prima che si fosse accorto della contrazione nella vena dedusse, come è probabile, dall' acqua che si dispensava, e stabilì nella prima Edizione de' Principj matematici della Filosofia naturale, che la velocità della vena invece di corrispondere a tutta l' altezza dell' acqua nel vaso, corrispondeva alla metà incirca di ta-

le altezza. Ma riflettendo egli in seguito ai getti dell' acqua fatti dai fori aperti nelle sponde de' vasi, i quali colle loro altezze ed ampiezze mostrano in fatto, come abbiamo veduto, e lo stesso Newton insegna (lib. 2. prop. 36. prob. 8.), che l' acqua esce pei fori de' vasi con velocità corrispondente a tutta l' altezza, dopo nuovi esami s' avvide che la vena usciva dal vaso più ristretta della luce; e conobbe che da questa contrazione della vena dipendeva la causa per cui dalla quantità dell' acqua uscita non risultava che una velocità competente alla sola metà incirca dell' altezza di quella contenuta nel vaso. Quindi sostituendo nei computi l' area della vena contratta a quella della luce corresse il primo inganno; e nella seconda Edizione della sua immortal Opera dimostrò che l' acqua esce dal vaso per un orifizio scolpito in sottil lamina con velocità dovuta a tutta l' altezza.

XVIII. Ma il nostro Autore (cap. 4. paragr. 41) dice, che la sostituzione dell' area della vena contratta a quella della luce per inferire dalla misura dell' acqua uscita l' indicata velocità, fu un partito degno di quel grand' uomo; ma che per altro è stato in errore, e che seco lui lo sono tutti gli altri ancora, i quali stimano che la vena esca di sua natura contratta, e che ad essa si debba una sezion ossia base minore di quella di tutta la luce per cui esce.

La vena secondo lui è propriamente formata e spinta a muoversi ed uscire dal vaso con un diametro uguale a quello della luce, e sotto tutta questa ampiezza ella esce realmente in vigor della forza coattiva, come esso Autore la chiama, dalla quale è spinta fuori: e però la vena medesima riguardo alla sua velocità costante ed uniforme, che riceve dalla forza che la mette in moto e la spinge fuori, e colla quale celerità tende a fluire e muoversi senza più nè accelerarsi, nè ritardarsi, essa si manterrebbe sempre d' un diametro uguale a quello della luce anche a qualunque distanza dal foro; giacchè senza nuovo aumento o decremento di velocità non vi è ragione che le sezioni della vena si facciano in alcun sito più strette o più ampie. Ma siccome al primo uscire dal foro che fa la vena, e nella stessa sua origine incomincia, per sentimento dell' Autore, ad agire su di essa la forza acceleratrice della gravità, per quest' effettiva accelerazione, che viene introdotta nella ve-

na dall' azion della gravità, essa vena è obbligata ad assottigliarsi, e la sua contrazione in vece di rendersi massima e indi cessare di più oltre crescere ad una piccola distanza dal foro, essa andrebbe sempre più e più aumentandosi successivamente in tutto il corso della vena per l' azion accelerante della gravità, qualora il flusso della stessa vena si facesse in un mezzo non resistente. Quindi se ascoltiamo il rinomato Autore, non vi è ragione di assegnare alla vena il diametro, che in essa si osserva a poca distanza dalla luce, come si fa dagli Idraulici, piuttosto che quello che ha in altri siti, anzi non si deve assegnar alla vena per suo diametro, che quello della luce per cui esce, come quello, di cui è composta nel suo principio, e che alla medesima compete in quanto è spinta fuori dall' azion dell' acqua contenuta nel vaso.

Posto pertanto, che nel computo della velocità dell' acqua che si dispensa da una vena effluente per una semplice luce, non si debba avere riguardo alla contrazion della vena, nè convenga, e nemmeno sia permesso di sostituire il diametro di essa vena ristretta a quello della luce, ma d' uopo sia d' avere riguardo al diametro del foro unicamente; posto ciò si trova, come ho già premesso (n. XVII.) colla quantità dell' acqua uscita e raccolta in un qualunque determinato tempo, che alla vena non compete una velocità corrispondente a tutta l' altezza dell' acqua contenuta nel vaso sopra la luce, ma che invece vi compete una velocità che s' accosta alla misura assegnata dall' Autore. Imperciocchè, come Egli osserva (cap. 3. paragr. 39.), dagli sperimenti del Guglielmini, del P. Grandi, del Mariotte, ma singolarmente dalle recenti ed accuratissime sperienze del Bossut (Idrodin. p. 2. cap. 4.) risulta che la dispensa assoluta ossia massima (cioè quella che si avrebbe in un dato tempo da una vena effluente con una ampiezza uguale a quella della luce e con una velocità corrispondente a tutta l' altezza dell' acqua), sta alla dispensa effettiva, qual è quella che si trova realmente farsi in pari tempo per una egual luce, come 8 a 5 prossimamente. Ora le dispense fatte in pari tempo da vene d' ugual diametro seguono la ragione della velocità delle stesse vene, e si è detto che tutte le vene anno un' ampiezza (a giudizio dell' Autore)

uguale a quella della luce per cui escono. Se dunque la dispensa effettiva sta alla massima, per una stessa od ugual luce e in egual tempo, come 5 all' 8 prossimamente, ne segue che anche la velocità attuale di qualunque vena effluente per una semplice luce stia alla velocità di tutta l' altezza dell' acqua, come 5 a 8 prossimamente; la qual ragione è a un di presso quella stessa stabilita dall' Autore.

XIX. Ecco in sostanza a che si riduce tutto il fondamento in riguardo all' esperienza, nel quale si appoggia la nuova dottrina del chiarissimo Autore, e la rejezione che Egli fa di quella degli altri Idraulici. Nè le altezze dei getti verticali, nè l' ampiezze degli orizzontali ponno servire di prova, secondo lui, per le velocità corrispondenti a tutta l' altezza dell' acqua: gli esperimenti poi intorno le dispense d' acqua fatte dalle vene provano, come ora si è veduto ragionando a modo dello stesso Autore, che l' acqua esce per la semplice luce quasi colla velocità da lui voluta, la quale sta a quella stabilita dagli Idraulici prossimamente come $5 \frac{13}{55}$ a 8, ch' è quasi come 5 a 8.

Quindi Egli non dubita d' asserire che l' esperienza si oppone al comun principio degli Idraulici, e che per contrario dimostra e conferma quello da lui novellamente escogitato ed ammesso.

Ma siccome noi abbiamo veduto riguardo ai getti, che a poco o nulla montano le difficoltà prodotte dall' Autore, e che gli stessi getti sono una prova di fatto e convincente della comun sentenza, e insieme una prova distruttiva della nuova teoria dell' Autore; così credo similmente, che anche gli sperimenti intorno l' acqua che dispensano le vene, nulla vagliano in conferma di tale nuova teoria; ma che per contrario servano essi pure a combatterla, ritenendo ancora quel valore, e quella forza tutta, che antecedentemente si è provato che anno a favore della sentenza comune, e contro quella dell' illustre Autore. Per dimostrar questo non occorre altro, che di far vedere, che l' Autor è in errore sulla causa della contrazion della vena, e quindi nel pretendere che nel calcolo che si fa per conoscere la velocità col mezzo dell' acqua uscita, non si debba ave-

re

ne riguardo al diametro della vena ristretta, ma solamente a quello della luce per cui esce il fluido.

Le vene trasmesse per semplici luci escono naturalmente contratte.

XX. E' cosa certa per esperienza, che la vena si trova avere un' ampiezza minore dell' area della luce per cui esce, non solo dopo che è uscita, ma prima ancora d' uscire, e dentro il cerchio stesso ossia ambito dell' orifizio per cui passa; talchè si può dire, che la vena nasce realmente ed esce fuori più ristretta della luce per cui fluisce, comunque sia che la stessa vena continui ancora a restringersi alcun poco per breve intervallo dopo uscita, allorchè l' orifizio ovvero luce sia scolpita in lamina sottile. Nelle mie sperienze (n. IX.) nelle quali le vene fluivano per luci circolari di lamine la cui sottigliezza rassomigliava quella d' un foglio di carta, appariva agli occhi di chiunque un anelletto oscuro dentro immediatamente l' ambito della luce, cioè tra la concava circonferenza della luce e la vena uscente che ne era cinta e compresa, il qual anelletto si dava facilmente a vedere per essere la lamina gialla fiammeggiante, e il corpo della vena biancastro cristallino. Questo tal anelletto o cerchiello oscuro era un indizio od effetto manifesto d' una spezie come di voto, ovvero di spazio non occupato dall' acqua che usciva, il quale restava tra l' orlo esterno della luce e la vena attualmente effluente. Ora essendo minimo e come nullo l' intervallo tra l' orlo esterno della luce e l' orlo interno della medesima, dove ha il suo principio la vena, ne viene di necessaria conseguenza, che la vena comparendo più ristretta della luce immediatamente nell' atto d' uscire per la medesima, e dentro lo stesso margine ossia orlo esterno di essa luce; lo fosse parimente più stretta nel suo primo principio e per entro la picciolissima lunghezza della luce corrispondente alla tenuissima crassezza della lamina. Se dunque la vena fino dalla sua origine e per entro la luce per cui è trasmessa si trova contratta, e d' un diametro minore di quello della luce, a tutta ragione gli Idraulici riconoscono col Newton e prendono

per diametro della vena effluente per una semplice luce un diametro minore di quello della stessa luce.

Dico di più che il diametro, il quale veramente compete alla vena come vero e suo, è quello che si trova avere nel sito dove è più contratta, il qual sito si osserva, come altra volta ho avvertito, distante dall' orlo interno dell' orifizio per l' intervallo di circa un raggio o poco meno dello stesso orifizio. Imperciocchè non potendosi ripetere quella tal contrazione da un aumento di velocità prodotto nella vena dall' azione della gravità, come tosto mi farò a dimostrare; la vena in quel tale sito ha (prescindendo dalle perdite che avesse potuto fare per cause estrinseche) la sua velocità naturale e l' ampiezza che propriamente le conviene; potendosi giustamente riconoscere quel po' di più di grossezza che ha prima, dal non essersi ancora ben sistemate tutte le particelle a scorrere con una stessa direzione parallela all' asse della vena; oppure perchè la vena stacca e trae seco d' intorno delle goccie dell' acqua soffermata nel vaso, e da cui è circondata nella sua origine, le quali gocciole distendendosi per l' attrazione della vena lungo la stessa vena effluente, e intorno ad essa, accrescono la sua naturale grossezza finchè non sieno del tutto staccate dall' acqua contenuta nel vaso, ed abbiano partecipato di tutta quella velocità con cui fluisce e tende costantemente a muoversi la vena.

XXI. Che poi la contrazione, che si osserva costantemente in tutte le vene uscenti per semplici luci, non nasca e dipenda nè troppo nè poco dalla forza acceleratrice della gravità, come presume l' Autore, ma che la vena di sua natura sia più stretta dell' area della luce per cui esce, credo che si possa dimostrare coll' ultima evidenza.

Come mai è possibile che una vena che esce, non dirò per una luce orizzontale ascendendo a somiglianza d' un getto verticale, dove la cosa è chiara affatto di per sè, ma per una luce nel lato d' un vaso con moto e direzione parallela all' orizzonte; come è dissi possibile, che questa vena orizzontale venga sensibilmente accelerata dalla gravità e quindi obbligata a farsi più sottile? Si aggiunga che le vene, come di sopra abbiamo osservato (n. XX.), non in-

cominciano a restringersi ed acquistar un diametro minore di quello della luce al momento che incominciano ad essere fuori dall' orifizio, ma lo sono ancora prima di uscire, e però avanti d' essere soggette all' effetto della forza acceleratrice della gravità. Di più immaginiamoci nel lato del vaso una luce armata esteriormente d' un tubo cilindrico dello stesso diametro della luce: se la lunghezza di questo tubo non sia che poco o nulla maggiore del suo diametro, si vedrà ad uscire per esso la vena bensì ancora contratta, cioè più ristretta dell' orifizio esterno di esso tubo, ma non si vedrà più ad aumentarsi la sua contrazione al momento d' uscire dall' orifizio del tubo, nè dopo. Dunque una tal vena ebbe tutta affatto la sua massima contrazione prima d' uscire dal tubo. Eppure finchè essa vena si mosse orizzontalmente sostenuta per entro al tubo non ha potuto essere accelerata dall' azion della gravità. Dunque nè l' origine, nè l' incremento massimo della contrazione della vena dipende dalla gravità, almeno nelle vene orizzontali. Per ultimo consta dall' esperienza che se una vena d' acqua qualunque venga trasmessa dal vaso per un tubo cilindrico d' una lunghezza tre volte o più maggiore del suo diametro, la vena e nel suo primo uscire dal tubo, ed anche dopo uscita si trova d' una ampiezza non minore di quella dell' intera luce del tubo per cui fluisce. Eppure la vena soggiace ugualmente all' azion della gravità mentre esce per la luce del tubo, che quando esce dal vaso immediatamente per una luce senza tubo. Ed è di più osservabile, che se anche il tubo fosse applicato al fondo del vaso diretto in giù verticalmente, ancora la vena esce senza restrizione, benchè sia evidente che in questo caso concorre la gravità ad accelerare il moto della vena. E' dunque dimostrato per esperienza che la contrazione che si osserva nelle vene, che escono dai vasi per semplici luci, non è un effetto della forza acceleratrice della gravità; ma che è naturale ed intrinseca alle stesse vene; che esse di loro natura sono meno ampie delle aree delle luci per cui escono; come appunto vengono prese e considerate da tutti gli Idraulici dopo il Newton.

XXII. Ma anche senza altre prove, la dispensa che si fa delle vene trasmesse per tubi basterebbe essa sola a di-

mostrar e convincere chiunque, che l' illustre Autore è in inganno nel pretendere che le vene che escono per semplici luci si debbano prendere e computare sotto un' ampiezza uguale a tutta quella della luce, e nell' inferire che quindi Egli fa, come abbiamo notato, che dall' acqua che dispensano esse vene risulti che la loro velocità in vece di trovarsi uguale o pressochè uguale a quella dovuta a tutta l' altezza dell' acqua nel vaso, si trovi che sta alla medesima nella ragione prossimamente di 5. all' 8. ch' è quanto dire di 10. al 16.

Dalle sperienze del Bossut (Idrodin. par. 2. cap. 4.) risulta che col mezzo d' un tubo cilindrico si ottiene una dispensa sotto una data costante altezza dell' acqua nel vaso, che riportata alla dispensa massima trovasi prossimamente nella ragione di 13. a 16. Un simile rapporto trovò anche il Michelotti tra l' acqua uscita per un tubo cilindrico del diametro di due pollici, e lungo pollici 5, e l' acqua della dispensa massima; avendo egli trovato che sta quella a questa come $271 \frac{1}{3}$ a 324, cioè prossimamente come 13 a 16. (Sperim. idraul. p. 2. vol. 2. cap. 1.) Ma abbiamo veduto che la dispensa effettiva d' una vena che esce per una semplice luce sta alla massima a un di presso come 10 al 16, secondo le sperienze del Bossut. Dunque la dispensa che si fa dalla vena trasmessa per un tubo cilindrico è notabilmente maggiore di quella che si fa dalla stessa vena uscente per una luce non armata di tubo. Da che ripeteremo che in pari tempo e sotto una stessa altezza dell' acqua nel vaso esca notabilmente maggiore quantità d' acqua per una luce armata esteriormente d' un tubo cilindrico che per la stessa luce semplice? No certamente dalla velocità; poichè questa è minore nella vena che esce per mezzo del tubo, che nella stessa effluente per la semplice luce. Dunque la minore copia d' acqua che dispensa la vena uscente per la luce semplice nasce e dipende dalla contrazione della stessa vena, la qual contrazione viene tolta, se non in tutto, in parte almeno dal tubo cilindrico; come si manifesta dal vedere, che la vena scorrendo pel tubo giugne ad ingrossarsi a segno d' uscire dal medesimo con un' ampiezza uguale affatto all' orifizio esterno dello stesso tubo.

E' dunque giusto ed anzi necessario il metodo insegnato dal Newton, e praticato dagli Idraulici nel calcolare per mezzo dell' acqua che dispensano le vene che per semplici luci scaturiscono dai vasi, di prendere per diametro delle stesse vene quello che dicesi diametro della vena contratta, e che si trova realmente in esse vene, e non quello della luce, che effettivamente non anno.

Lascio di dire delle dispense che si ottengono per via d' imbuti, le quali crescono moltissimo in confronto di quelle che danno le vene effluenti per semplici luci, benchè armando le luci d' imbuti non succeda aumento di velocità nelle vene. E rifletterò per ultimo, che se le vene trasmesse per tubi cilindrici fluissero di continuo senza alcun ostacolo e ritardo con tutta intera la velocità, che, secondo l' Autore, può mai ricevere una vena dalla forza coattiva che la spinge e l' anima ad uscire e muoversi costantemente, la loro dispensa dovrebbe essere alla massima ed assoluta (e) come $5\frac{13}{25}$ a 8, cioè prossimamente come $10\frac{1}{2}$ a 16.

(e) Nel Volume V. della Società Italiana pubblicato nel 1790 osserva il Sig. Cav. Lorgna che presa per unità l' altezza permanente dell' acqua nel vaso, l' altezza dovuta alla velocità effettiva è uguale a questa funzione dell' unità $2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$ precisamente, come già l' aveva definita nel Vol. IV.

Ma riflette che svolgendo questa espressione coll' usar un maggior numero di decimali di quello aveva adoperato nel Vol. IV. pag. 317; e con ciò approssimandosi più al vero, risulta che presa l' unità per altezza permanente, l' altezza ridotta, cioè quella a cui è dovuta la velocità, non è che $\frac{11}{25}$ dell' unità; e però sta l' altezza permanente dell' acqua nel vaso a quella dovuta alla velocità della vena come 25 a 11. E la velocità che sarebbe dovuta all' altezza attuale permanente, sta alla velocità dovuta all' altezza ridotta, come $8 : 5\frac{5}{12}$, o come 96 a 65.

Quindi se l' altezza intera dell' acqua nel vaso dicasi A, quella a cui è dovuta la velocità sarà $\frac{11}{25}$ A; e non $\frac{54}{25}$ A, e meno $\frac{2}{5}$ A, come l' aveva posta nel Vol. IV.

Ma ammettendo anche questi valori che più si avvicinano alla formola $2A\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$, supposta A l' altezza permanente intera dell' acqua, sussiste ancora tutto quello che abbiamo detto contro la sua Memoria, tanto più che noi nelle nostre sperienze abbiamo ado-

Ma le stesse vene benchè perdano della loro naturale velocità passando pei tubi cilindrici, danno una dispensa molto maggiore, come si è veduto. Dunque forza è conchiudere di nuovo, che la velocità da cui sono animate le vene ad uscire dal vaso e fluire è più grande di quella che viene assegnata dall' Autore; e tanto più grande che giugne ad essere uguale o pressochè uguale a quella corrispondente a tutta l' altezza dell' acqua, come superiormente abbiamo dimostrato.

Dopo avere sciolte le obbiezioni contro il comun principio degli Idraulici, e provato che l' esperienza dimostra realmente e conferma lo stesso principio, e che per contrario si oppone evidentemente alla nuova dottrina del chiarissimo Autore, io credo superfluo di maggiormente prolungare questo Scritto coll' occuparmi nell' esame dei principj teorici, dai quali ricava esso Autore la sua formola per la misura della velocità di cui si tratta. Imperciocchè è manifesto, che non ponno essere vere e giuste quelle teorie fisiche, nè quelle formole, le quali danno risultati lontanissimi da quelli che si raccolgono e si manifestano dall' esperienza. Oltre di che lo scopo di questa mia Memoria non è propriamente di fare una censura o critica al dotto e celebre Autore, ma soltanto di difendere come una verità d' esperienza il ricevuto principio fondamentale dell' Idrodinamica contro le difficoltà e le prove che lo stesso Autore ha prodotte per abbatterlo; al qual oggetto io mi lusingo di avere fin quì bastantemente soddisfatto.

---

perata per altezza dovuta alla velocità secondo la teoria del Signor Cav. Lorgna, quella che risultò coll' estrazione del radicale fatta per via di decimali.

E rispetto alla velocità poco decide, se la velocità dovuta a tutta l' altezza stia a quella stabilita dal Sig. Lorgna come 8 a $5\frac{13}{55}$ qual Egli nel Vol. IV. l' ammise, e noi l' abbiamo usata come da lui stabilita; oppur come 8 a $5\frac{5}{12}$, qual risulta estraendo la radice con più decimali, e che per conseguenza è più prossima alla vera, cioè a quella dovuta all' altezza a cui egli vuole che effettivamente corrisponda la velocità della vena.

DELLA INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONI A DIFFERENZE PARZIALI FINITE ED INFINITESIME.

DI PIETRO PAOLI.

Ricevuta li 26. Gennajo 1799.

I Geometri di questo secolo hanno con tutto l' impegno coltivata l' importante Teoria dell' equazioni lineari a differenze parziali tanto infinitesime, che finite. L' integrazione delle prime ha ad essi somministrato il mezzo di risolvere gli astrusi problemi della Meccanica de' corpi flessibili e fluidi; con quella delle seconde hanno promossa la Teoria delle Serie Ricorrenti, e perfezionata la dottrina delle probabilità. In questa Memoria io prendo a considerare un' altra classe d' equazioni, le quali contengono insieme le differenze parziali e finite ed infinitesime, cioè, se z è una funzione delle variabili x, y, t, &c., l' equazioni lineari tra z, e le sue differenze finite prese relativamente ad alcune delle variabili x, y, t, &c., ed i differenziali della medesima funzione presi per rapporto al rimanente delle variabili x, y, t, &c. Parmi che il gran Geometra *Laplace* sia il solo, che abbia dato l' integrale di alcuna di quest' equazioni, applicandovi il suo ingegnosissimo metodo delle *funzioni generatrici* nel Volume dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1779. L' integrazione di quest' equazioni non è un oggetto di vana speculazione, ma è dotata di varj usi importanti, e da essa dipende la soluzione diretta di molti problemi relativi alle serie. Perciò ho tentato di promovere in questo Opuscolo la Teoria delle medesime equazioni, e di adattare ad esse quelli artifizj, che l' Analisi ha inventati per trattare le altre equazioni, e specialmente quei metodi, che per la integrazione dell' equazioni a differenze parziali solamente finite sono stati immaginati dal sommo Geometra *Lagrange*.

ARTICOLO I.

Dell' equazioni tra tre variabili.

1. Sia u una funzione qualunque di y, la quale ordinata per le potenze di y, ci dia la serie $u = \varphi . 0 + y \varphi . 1 + \frac{y^2}{2} \varphi . 2 + \frac{y^3}{2 . 3} \varphi . 3 + \frac{y^4}{2 . 3 . 4} \varphi . 4 +$ &c. in modo che il termine generale di questa serie sia $\frac{y^x}{1 . 2 \ldots x} \varphi . x$. Se differenziamo x volte questa equazione per rapporto ad y, avremo $\frac{d^x u}{dy^x} = \varphi . x + y \varphi (x+1) + \frac{y^2}{2} \varphi (x+2) + \frac{y^3}{2 . 3} \varphi (x+3)$ + &c. Facciamo adesso $z_x = \varphi . x + y \varphi (x+1) + \frac{y^2}{2} \varphi (x+2) + \frac{y^3}{2 . 3} \varphi (x+3) +$ &c., ove z_x è funzione di x ed y, ed avremo $z_{x+1} = \varphi (x+1) + y \varphi (x+2) + \frac{y^2}{2} \varphi (x+3) +$ &c. $= \frac{dz_x}{dy}$. Quindi per trovare la somma della serie $\varphi . x + y \varphi (x+1) + \frac{y^2}{2} \varphi (x+2) + \frac{y^3}{2 . 3} \varphi (x+3) +$ &c. dobbiamo integrare l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy}$. Ma la somma di quella serie è $\frac{d^x \Psi . y}{dy^x}$; dunque sarà $z_x = \frac{d^x \Psi . y}{dy^x}$ l' integrale completo della precedente equazione, perchè comprende la funzione arbitraria $\Psi . y$.

All' istesso integrale potevamo ancora giungere mediante la sola differenziazione della equazione proposta. Infatti ponendo $x - 1$ in luogo di x, avremo $z_x = \frac{dz_{x-1}}{dy}$, e quindi $\frac{dz_{x-1}}{dy} = \frac{d^2 z_{x-2}}{dy^2}$, cioè $z_x = \frac{d^2 z_{x-2}}{dy^2}$. Differenziando di nuovo due volte dopo di aver posto $x - 2$ in luogo di x otterremo $z_x = \frac{d^2 z_{x-2}}{dy^2} = \frac{d^3 z_{x-3}}{dy^3}$, e così pure $z_x =$

$\frac{d^4 z_{x-4}}{dy^4}$, e finalmente $z_x = \frac{d^x z_0}{dy^x}$, cioè $z_x = \frac{d^x \varphi . y}{dy^x}$.

2. Prendiamo adesso ad integrare l'equazione più generale $a_x z_{x+1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy}$; ove a_x, b_y sono due funzioni date, quella di x, questa di y. Ponghiamo $z_x = Z_x \frac{d^x \varphi . y}{dy^x}$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x+1} . \frac{d^{x+1} \varphi . y}{dy^{x+1}} + b_y Z_x . \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} = Z_x \frac{d^{x+1} \varphi . y}{dy^{x+1}} + \frac{dZ_x}{dy} . \frac{d^x \varphi . y}{dy^x}$; e a motivo della funzione arbitraria $\varphi . y$ le due equazioni $a_x Z_{x+1} = Z_x$; $b_y Z_x = \frac{dZ_x}{dy}$. La prima mi dà $Z_x = e^{-\Sigma \log . a_x} . \Psi . y$, ove e è quel numero, che ha per logaritmo iperbolico l'unità; e sostituito questo valore la seconda diventa $b_y \Psi . y = \frac{d\Psi . y}{dy}$, cioè $\Psi . y = e^{\int b_y dy}$. Pertanto l'integrale completo della proposta sarà $z_x = e^{\int b_y dy - \Sigma \log . a_x} . \frac{d^x \varphi . y}{dy^x}$.

Per dare un'esempio supponghiamo, che si voglia la somma della serie infinita $\varphi . x + (x+1) y \varphi (x+1) + \frac{(x+1)(x+2)}{2} y^2 \varphi (x+2) + \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{2.3} y^3 \varphi (x+3)$ Facendo questa somma $= z_x$ avremo $z_{x+1} = \varphi (x+1) + (x+2) y \varphi (x+2) + \frac{(x+2)(x+3)}{2} y^2 \varphi (x+3) +$ ec.; $\frac{dz_x}{dy} = (x+1) \varphi (x+1) + (x+1)(x+2) y \varphi (x+2) + \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{2} y^2 \varphi (x+3)$ ec.; e quindi $(x+1) z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy}$. Sarà dunque $a_x = x+1$; $b_y = 0$; e $z_x = e^{-\Sigma \log . (x+1)} . \frac{d^x \Psi . y}{dy^x} = \frac{1}{1.2.3 \ldots . x} . \frac{d^x \Psi . y}{dy}$. Per determinare la funzione arbitraria $\Psi . y$ si osservi, che

$z_{m+1} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{dz_m}{dy^m} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (m+1)} \cdot \frac{d^{m+1}\Psi.y}{dy^{m+1}}$, e perciò $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} \cdot \frac{d^m \Psi.y}{dy^m} = z_m$, cioè eguale alla somma della serie, quando $x = m$. Sostituendo il valore di $\Psi.y$ avremo $z_x = \frac{1 \cdot 2 \ldots m}{1 \cdot 2 \ldots x} \cdot \frac{d^{x-m} z_m}{y^{x-m}}$, ove il differenziale si deve cangiare in integrale, quando $x - m$ è una quantità negativa. Se adunque si sa sommare la serie, quando x ha un dato valore, si potrà sommare in qualunque altro caso.

3. Sia data l' equazione $a_x z_{x+1} + b z_x = \frac{dz_x}{dy} + X$, ove a_x ed X sono funzioni date di x, e b costante. Siccome, quando X è zero, abbiamo $z_x = e^{by - \Sigma \log. a_x} \cdot \frac{d^x \phi.y}{dy^x}$; allorchè X è funzione di x, aggiungiamo al valore di z_x il termine $+ Z_x$, ed avremo per determinare Z_x l'equazione $a_x Z_{x+1} + b Z_x = X$, la quale integrata ci darà $Z_x = (-b)^x \cdot e^{-\Sigma \log. a_x} \Sigma . \frac{X e^{\Sigma \log. a_x}}{(-b)^{x+1}}$. Così pure, se fosse proposta l' equazione $a z_{x+1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy} + Y$, essendo b_y ed Y funzioni di y ed a costante, ponghiamo la $z^x = \frac{e^{\int b_y dy}}{a^x} \cdot \frac{d^x \phi.y}{dy^x} + Z$, ove Z è funzione di y, ed avremo il valore di Z dalla equazione $(a + b_y) Z = \frac{dZ}{by} + Y$; cioè $Z = - e^{ay + \int b_y dy} . \int e^{-ay - \int b_y dy} . Y dy$.

4. Si debba adesso integrare l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy} + P_x$, essendo P_x una funzione data di x ed y. Ponghiamo $z_x = \frac{d^x Z_x}{dy^x}$, e sostituendo avremo $\frac{d^{x+1} Z_{x+1}}{dy^{x+1}} = \frac{d^{x+1} Z_x}{dy^{x+1}} + P_x$; cioè $\frac{d^{x+1} . \Delta Z_x}{dy^{x+1}} = P_x$, e quindi $\Delta Z_x = \int^{x+1} dy^{x+1} P_x$; $Z_x = \phi.y + \Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} P_x$, ove ho aggiunto la funzione arbitraria $\phi.y$, perchè l' integrale Σ si prende nella ipotesi di y costante. Sarà pertanto l' inte-

grale della equazione proposta $z_x = \frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + \frac{d^x\Sigma\int^{x+1}dy^{x+1}P_x}{dy^x}$.
Questo integrale si può esprimere anche sotto un' altra forma: infatti $\Sigma\int^{x+1}dy^{x+1}P_x = \int dy P_0 + \int^2 dy^2 P_1 + \int^3 dy^3 P_2 \ldots + \int^x dy^x P_{x-1}$; e perciò $\frac{d^x\Sigma\int^{x+1}dy^{x+1}P_x}{dy^x} = \frac{d^{x-1}P_0}{dy^{x-1}} + \frac{d^{x-2}P_1}{dy^{x-2}} \ldots + P_{x-1}$; la qual quantità è rappresentata dalla formola $\Sigma\frac{d^r P_{x-r-1}}{dy^{x-r-1}}$, se si prende questo integrale relativamente ad r da $r=0$ fino ad $r = x-1$.

5. Data adesso l' equazione più generale $a_x z_{x+1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy} + P_x$: facciamo $z_x = Z_x.Z'_x$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x+1}.Z'_{x+1} + b_y Z_x.Z'_x = Z'_x\frac{dZ_x}{dy} + Z_x\frac{dZ'_x}{dy} + P_x$. Ponghiamo $a_x Z_{x+1} = Z_x$; $b_y Z_x = \frac{dZ_x}{dy}$, ed avremo ancora $Z'_{x+1} = \frac{dZ'_x}{dy} + \frac{P_x}{Z'_x}$. La prima di quest' equazioni integrata ci dà $Z_x = e^{-\Sigma\log.a_x}.\Psi.y$; sostituito il qual valore nella seconda abbiamo $\Psi.y = e^{\int b_y dy}$, e quindi $Z_x = e^{\int b_y dy - \Sigma\log.a_x}$. Posto questo valore nella terza otterremo (4) $Z'_x = \frac{d^x[\varphi.y - \Sigma(e^{\Sigma\log.a_x}.\int^{x+1}dy^{x+1}P_x e^{-\int b_y d})]}{dy^x}$;
e perciò l' integrale della proposta sarà $z^x = e^{\int b_y dy - \Sigma\log.a_x}.\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + e^{\int b_y dy - \Sigma\log.a_x}.\frac{d^x\Sigma(e^{\Sigma\log.a_x}\int^{x+1}dy^{x+1}P_x e^{-\int b_y dy})}{dy^x}$.

6. Passiamo a cercar l' integrale della equazione dell' ordine n; $\frac{d^n.z_x}{dy^n} + A\frac{d^{n-1}.z_{x+1}}{dy^{n-1}} + B\frac{d^{n-2}.z_{x-2}}{dy^{n-2}} \ldots + M\frac{dz_{x+n-1}}{dy} + Nz_{x+n} = P_x$, ove A, B, . . N sono quantità costanti, e P_x funzione di x ed y. Ponghiamo $\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1\frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1\frac{d^{n-3}.z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots +$

$M1 z_{x+n-1} = X_x$; e se in questa equazione accresciamo x della unità, o pure la differenziamo per rapporto ad y, avremo le due equazioni

$$(1)\ \frac{d^{n-1}.z_{x+1}}{dy^{n-1}} + A1\frac{d^{n-2}.z_{x+2}}{dy^{n-2}} \ldots + M1 z_{x+n} = X_{x+1}.$$

$$(2)\ \frac{d^{n}.z_{x}}{dy^{n}} + A1\frac{d^{n-1}.z_{x+1}}{dy^{n-1}} \ldots + M1\frac{dz_{x+n-1}}{dy} = \frac{dX_x}{dy}.$$

Paragoniamo con la proposta l'equazione $(2) - (1)\alpha$, ove α è costante, ed otterremo

$\frac{dX_x}{dy} - \alpha X_{x+1} = P_x$; $A1 - \alpha = A$; $B1 - \alpha A1 = B$; $C1 - \alpha L1 = C$; ...... $- \alpha M1 = N$. Quindi avremo $A1 = \alpha + A$; $B1 = \alpha^2 + A\alpha + B$; $C1 = \alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C$; ... $M1 = \alpha^{n-1} + A\alpha^{n-2} + B\alpha^{n-3} \ldots + M$; ed a motivo di $-\alpha M1 = N$ sarà (P) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + C\alpha^{n-3} + \ldots + N = 0$. Sarà dunque α una radice di questa equazione: ed integrando l'equazione $\frac{dX_x}{dy} - \alpha X_{x+1} = P_x$, otterremo (5) $X_x = -\frac{1}{\alpha^x}\cdot\frac{d^x.\Sigma(\alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} P_x)}{dy^x}$, ove tralascio la funzione arbitraria, perchè si può considerare compresa nel segno Σ. Trovati così i valori di $A1$, $B1$, ... $M1$ ed X_x, si conoscerà l' integrale primo della proposta $\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1\frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} \ldots + M1 z_{x+n-1} = X_x$. Trattando questa equazione nella medesima maniera, che la proposta, ponghiamo $\frac{d^{n-2}.z_x}{dy^{n-2}} + A2\frac{d^{n-3}.z_{x+1}}{dy^{n-3}} \ldots + L2 z_{x+n-2} = X1_x$; e troveremo similmente $\frac{dX1_x}{dy} - \alpha 1 X1_{x+1} = X_x$, essendo $\alpha 1$ una radice della equazione

(Q) $\alpha 1^{n-1} + A1\alpha 1^{n-2} + B1\alpha 1^{n-3} \ldots + M1 = 0$. Ora se questa equazione (Q) la moltiplichiamo per $\alpha 1 - \alpha$ avremo

$$\left.\begin{array}{l}\alpha 1^n + A1\alpha 1^{n-1} + B1\alpha 1^{n-2} + C1\alpha 1^{n-3} \ldots + M1\alpha 1 \\ -\alpha\alpha 1^{n-1} - \alpha A1\alpha 1^{n-2} - \alpha B1\alpha 1^{n-3} \ldots - \alpha L1\alpha 1 - \alpha M1\end{array}\right\} = 0$$

cioè, sostituiti i valori di $A1$, $B1$, ec.: $\alpha 1^n + A\alpha 1^{n-1} + B\alpha 1^{n-2} + C\alpha 1^{n-3} \ldots + N = 0$. Questa equazione essendo affatto simile alla equazione (P), è chiaro che l'equazione

(Q) ha le medesime radici, che ha l' equazione (P), eccettuata quella, che è già stata contemplata. Posto ciò avremo $X1_x = -\frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \Sigma(\alpha 1^x \int^{x+1} dy^{x+1} X_x)}{dy^x}$, essendo $\alpha 1$ una radice della equazione (P) diversa da α. Ma $\int^{x+1} dy^{x+1} X_x$ $= -\frac{1}{\alpha^x} \int dy \Sigma(\alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} P_x) = -\frac{1}{\alpha^x} \Sigma(\alpha^x \int^{x+2} dy^{x+2} P_x)$; dunque sostituendo questo valore avremo

$$X1 = \frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{\alpha 1}{\alpha}\right)^x \Sigma \alpha^x \int^{x+2} dy^{x+2} P_x}{dy^x}.$$

Così pure, se chiameremo $X2_x$ il secondo membro dell' integrale terzo, ed $\alpha 2$ sarà un' altra radice della equazione (P), otterremo

$$X2_x = \frac{1}{\alpha 2^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{\alpha 2}{\alpha 1}\right)^x \Sigma \alpha 1^x \int^{x+2} dy^{x+2} X_x}{dy^x};$$

e sostituendo il valore di X_x,

$$X2_x = -\frac{1}{\alpha 2^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{\alpha 2}{\alpha 1}\right)^x \Sigma \left(\frac{\alpha 1}{\alpha 2}\right)^x \Sigma \alpha^x \int^{x+3} dy^{x+3} P_x}{dy^x}.$$

Quindi facilmente apparisce, che l' integrale finito della proposta sarà $z_x =$

$$\frac{\frac{(-1)}{\alpha^x} \cdot d^x \Sigma \left(\frac{\alpha}{\alpha 1}\right)^x \Sigma \left(\frac{\alpha 1}{\alpha 2}\right)^x \ldots \Sigma \left(\frac{\alpha(n-2)}{\alpha(n-1)}\right)^x \Sigma (\alpha^{n-1})^x \int^{x+n} dy^{x+n} P_x}{dy^x}.$$

Se tutte le radici α, $\alpha 1$, ec. fossero eguali, si renderebbe molto più semplice la forma di questo integrale, e sarebbe

$$z_x = \frac{(-1)^n}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \Sigma^n \alpha^x \int^{x+n} dy^{x+n} P_x}{dy^x}.$$

7. Ma quando le radici sono disuguali, è assai più comoda un' altra forma d' integrale composta di varie parti, ciascuna delle quali non contiene, che un solo segno sommatorio. Ad oggetto di ritrovar questa nuova forma, ripigliamo l' equazione

$$\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1 \frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1 \frac{d^{n-3}.z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + M1 z_{x+n-1} = X_x,$$

ed osserviamo, che prendendo in luogo di α le altre radici $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. della equazione (P) avremo gli altri integrali primi

$$\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1' \frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1' \frac{d^{n-3}.z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + M1' z_{x+n-1} = X'_x ;$$
$$\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1'' \frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1'' \frac{d^{n-3}.z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + M1'' z_{x+n-1} = X''_x ;$$

ove le quantità $A1'$, $A1''$, ec.; $B1'$, $B1''$, ec.; ed X'_x, X''_x, ec. sono i valori di $A1$, $B1$, ec. ed X, quando α si cangia in $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. Ora, essendo n questi integrali, potremo col loro mezzo eliminare i differenziali $\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}}$, ... $\frac{dz_{x+n-2}}{dy}$, ed avremo il valore di z_{x+n-1} così espresso $z_{x+n-1} = \frac{X_x}{k} + \frac{X'_x}{k1} + \frac{X''_x}{k2} +$ ec., essendo k, $k1$, $k2$, ec. quantità costanti.

Per determinarle sostituiamo il valore di z_{x+n-1} nella prima dell' equazioni integrali; ed osservando che $\frac{dX_{x-1}}{dy} = \alpha X_x + P_{x-1}$; $\frac{d^2X_{x-2}}{dy^2} = \alpha \frac{dX_{x-1}}{dy} + \frac{dP_{x-2}}{dy} = \alpha^2 X_x + \alpha P_{x-1} + \frac{dP_{x-2}}{dy}$, e così in seguito, otterremo

$$X_x = X_x . \frac{\alpha^{n-1} + A1\alpha^{n-2} + B1\alpha^{n-3} \ldots + M1}{k} + (A) \frac{P_{x-1}}{k}$$
$$+ (B) \frac{dP_{x-2}}{kdy} + \text{ec.} + X'_x . \frac{\alpha 1^{n-1} + A1\alpha 1^{n-2} \ldots + M1}{k1}$$
$$+ (A1) \frac{P_{x-1}}{k1} + \text{ec.} + X''_x . \frac{\alpha 2^{n-1} + A1\alpha 2^{n-2} \ldots + M1}{k2}$$
$$+ (A2) \frac{P_{x-1}}{k2} + \text{ec.} + \text{ec.}$$

Ora, questa equazione dovendo essere identica, avremo $\frac{\alpha^{n-1} + A1\alpha^{n-2} + B1\alpha^{n-3} \ldots + M1}{k} = 1$, cioè $k = M1 + L1\alpha \ldots + A1\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}$, e gli altri termini svaniranno.

Se in questo valore di k sostituiamo i valori di $A1$,

$B1$, ec., troveremo $k = n\alpha^{n-1} + (n-1) A\alpha^{n-2} + (n-2) B\alpha^{n-3} \ldots + M$; onde apparisce, che k è eguale al differenziale della quantità $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + M\alpha + N$, preso per rapporto ad α, e diviso per $d\alpha$. Il valore di k si cangerà in quelli di $k1$, $k2$, ec., se muteremo α in $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec., com' è facile a vedersi, se in luogo di sostituire il valore di z_{x+n-1} nella prima dell' equazioni integrali, si sostituisce in una delle altre. Se dunque facciamo $P = t^n + At^{n-1} + Bt^{n-2} \ldots + Mt + N$, avremo $k = \frac{dP}{dt}$ facendovi $t = \alpha$, $k1 = \frac{dP}{dt}$ facendovi $t = \alpha 1$, ec., ove α, $\alpha 1$, ec. sono le radici della equazione $P = 0$.

Determinate le quantità k, $k1$, ec.; sarà il valore di z^{x+n-1} così espresso;

$$z_{x+n-1} = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \phi . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} P_x}{k dy^x} +$$
$$\frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \phi' . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha 1^x \int^{x+1} dy^{x+1} P_x}{k1 dy^x} +$$
$$\frac{1}{\alpha 2^x} \cdot \frac{d^x \phi'' . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha 2^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha 2^x \int^{x+1} dy^{x+1} P_x}{k2 dy^x} + \text{ec.}$$

il quale, posto $x - n + 1$ in luogo di x, diventa

$$z_x = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \phi . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha^{x-n+1}} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha^{x-n+1} \int^{x+1} dy^{x+1} P_{x-n+1}}{k dy^x}$$
$$+ \frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \phi' . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha 1^{x-n+1}} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha 1^{x-n+1} \int^{x+1} dy^{x+1} P_{x-n-1}}{k1 dy^x} + \text{ec.}$$

ove ho scritto $\frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \phi y}{dy^x}$ in luogo di $\frac{1}{\alpha^{x-n+1}} \cdot \frac{d^{x-n-1} \phi . y}{dy^{x-n+1}}$, poichè, essendo $\phi . y$ una funzione arbitraria, si può mettere $\phi . y$ in luogo di $\frac{1}{\alpha^{-n+1}} \cdot \frac{d^{1-n} \phi . y}{dy^{1-n}}$.

Si può render più semplice la forma di questo integrale, se si osserva che $\frac{1}{\alpha^{x-n+1}} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha^{x-n+1} \int^{x+1} dy^{x+1} P_{x-n+1}}{dy^x} = \Sigma \cdot \frac{d^r P_{x-n-r}}{\alpha^{r+1} dy^r}$, purchè si prenda questo integrale da

$r = 0$ fino ad $r = x - n$. Pertanto l' integrale della proposta potrà esprimersi così.

$$z_x = \frac{1}{\alpha^x}\cdot\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 1^x}\cdot\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 2^x}\cdot\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x} + \text{ec.}$$
$$-\Sigma\left(\frac{\alpha^{-r-1}}{k} + \frac{\alpha 1^{-r-1}}{k1} + \frac{\alpha 2^{-r-1}}{k2} + \text{ec.}\right)\frac{d^r.P_{x-n-r}}{dy^r},$$

ove si deve prendere questo integrale relativamente ad r da $r = 0$ fino ad $r = x - n$.

Questo valore di z_x ammette una forma più semplice, quando P_x è funzione della sola x, o della sola y. Nel primo caso è chiaro che sarà $z_x = \frac{1}{\alpha^x}\cdot\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 1^x}\cdot\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x} + \text{ec.}$ $-\left(\frac{\alpha^{-1}}{k} + \frac{\alpha 1^{-1}}{k1} + \text{ec.}\right) P_{x-n}$; ove si noti, che $\frac{\alpha^{-1}}{k} + \frac{\alpha 1^{-1}}{k1} + \text{ec.} = -\frac{1}{N}$, come può vedersi nel II. Tomo del *Calcolo Integrale* dell' *Euler* a pag. 434.

Nel secondo caso la quantità $\Sigma\alpha^{-r-1}.\frac{d^rP}{dy^r}$ è eguale a $\alpha^{-1}P + \alpha^{-2}\frac{dP}{dy} + \alpha^{-3}\frac{d^2P}{dy^2}\ldots + \alpha^{-x+n-1}\frac{d^{x-n}P}{dy^{x-n}}$. Ponghiamo questa quantità $= Q$, e facilmente vedremo essere $\frac{dQ}{dy} = \alpha Q - P + \alpha^{-x+n-1}\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n+1}}$; l' integrazione della qual' equazione ci darà $Q = e^{\alpha y}\alpha^{-x+n-1}\int e^{-\alpha y}.\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n}}$ $- e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}Pdy$. Ma integrando per parti abbiamo $e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}.\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n}} = \frac{d^{x-n}P}{dy^{x-n}} + \alpha e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}.\frac{d^{x-n}P}{dy^{x-n-1}} =$ $\frac{1}{dy}d.e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}.\frac{d^{x-n}P}{dy^{x-n-1}}$; quindi sarà $e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}.\frac{d^{x-n+1}P}{dy^{x-n}} =$ $\frac{d^{x-n+1}e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}Pdy}{dy^{x-n+1}}$, e $Q = \frac{\alpha^{-x+n-1}d^{x-n+1}e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}Pdy}{dy^{x-n+1}} -$ $e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}Pdy$. Pertanto in luogo di $\frac{1}{\alpha^x}\cdot\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} - \Sigma\frac{\alpha^{-r-1}d^rP}{kdy^r}$

si

si può scrivere $\frac{1}{\alpha^x}\cdot\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}-\frac{1}{\alpha^{x-n+1}}\cdot\frac{d^{x-n+1}e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}\mathrm{P}dy}{kdy^{x-n+1}}+$ $\frac{e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}\mathrm{P}dy}{k}$. Ma salva la generalità si può porre $\varphi.y$ invece di $\varphi.y-\frac{\alpha^{n-1}}{k}\cdot\frac{d^{1-n}e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}\mathrm{P}dy}{dy^{1-n}}$; quindi l' integrale sarà in questo caso $z^x=\frac{1}{\alpha^x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+\frac{1}{\alpha 1^x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}+\frac{1}{\alpha 2^x}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}+$ ec. $+\frac{e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}\mathrm{P}dy}{k}+\frac{e^{\alpha 1 y}\int e^{-\alpha 1 y}\mathrm{P}dy}{k1}+$ ec.

E se P_x avrà la forma $\mathrm{Q}_x+\mathrm{R}$, essendo Q_x funzione della sola x, ed R della sola y, è chiaro che l' integrale sarà $z_x=\frac{1}{\alpha^x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+\frac{1}{\alpha 1^x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}+$ ec. $+\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{Q}_{x-n}$ $+\frac{e^{\alpha y}\int e^{-\alpha y}\mathrm{R}dy}{k}+\frac{e^{\alpha 1 y}\int e^{-\alpha 1 y}\mathrm{R}dy}{k1}+$ ec.

8. Ripigliamo il valor generale di z_x, e supponghiamo che le due radici α ed $\alpha 1$ siano eguali. Secondo il metodo di *Dalembert* faremo $\alpha 1=\alpha+\omega$, essendo ω infinitamente piccola, ed avremo $\alpha 1^{-r-1}=\alpha^{-r-1}-(r+1)\omega\alpha^{-r-2}$; e chiamando P1 la quantità $\frac{\mathrm{P}}{(t-\alpha)^2}$, avremo ancora $\frac{1}{k}=-\frac{1}{\omega\mathrm{P}1}$, facendo $t=\alpha$; $\frac{1}{k1}=\frac{1}{\omega\mathrm{P}1}$, facendovi $t=\alpha 1$ $=\alpha+\omega$; cioè $\frac{1}{k1}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\mathrm{P}1}+\omega\frac{d.\frac{1}{\mathrm{P}1}}{dt}\right)$, facendovi $t=\alpha$. Sostituiti questi valori, i due termini $\frac{\alpha^{-r-1}}{k}+\frac{\alpha 1^{-r-1}}{k1}$ diventeranno $\alpha^{-r-1}\frac{d.\frac{1}{\mathrm{P}1}}{dt}-\frac{r+1}{\mathrm{P}1}\alpha^{-r-2}$. I termini $\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+\alpha 1^{-x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$ si cangeranno in $\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+$ $\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}-\omega x\alpha^{-x-1}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$, cioè in $\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+$

$x\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$, posto $\varphi.y$ in luogo di $\varphi.y+\varphi'.y$, e $\varphi'.y$ in luogo di $-\omega\frac{\varphi'.y}{\alpha}$. Quindi nel caso di due radici α ed $\alpha 1$ eguali l'integrale avrà la forma

$$z_x=\frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}\right)+\frac{1}{\alpha 2^x}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}+\text{ec.}-$$

$$\Sigma\left[\alpha^{-r-1}\left(\frac{d.\frac{1}{P1}}{dt}-\frac{r+1}{P1\alpha}\right)+\frac{\alpha 2^{-r-1}}{k2}+\text{ec.}\right]\frac{d^rP_{x-n-r}}{dy^r}.$$

Se tre radici α, $\alpha 1$, $\alpha 2$ saranno eguali, faremo $\alpha 1=\alpha+\omega$, $\alpha 2=\alpha+m\omega$, e sarà $\alpha 1^{-r-1}=\alpha^{-r-1}-(r+1)\omega\alpha^{-r-2}+\frac{(r+1)(r+2)}{2}\omega^2\alpha^{-r-3}$; $\alpha 2^{-r-1}=\alpha^{-r-1}-(r+1)m\omega\alpha^{-r-2}+\frac{(r+1)(r+2)}{2}m^2\omega^2\alpha^{-r-3}$; e posto $P2=\frac{P}{(t-\alpha)^3}$, sarà $\frac{1}{k}=\frac{1}{m\omega^2}\cdot\frac{1}{P2}$, facendovi $t=\alpha$; $\frac{1}{k1}=-\frac{1}{(m-1)\omega^2}\cdot\frac{1}{P2}$, facendovi $t=\alpha 1=\alpha+\omega$; cioè $\frac{1}{k1}=-\frac{1}{(m-1)\omega^2}\left(\frac{1}{P2}+\omega\frac{d.\frac{1}{P2}}{dt}+\omega^2\frac{d^2.\frac{1}{P2}}{2dt^2}\right)$, facendovi $t=\alpha$; e similmente $\frac{1}{k2}=\frac{1}{m(m-1)\omega^2}\left(\frac{1}{P2}+m\omega\frac{d.\frac{1}{P2}}{dt}+m^2\omega^2\frac{d^2.\frac{1}{P2}}{2dt^2}\right)$, facendovi $t=\alpha$. Sostituiti questi valori, i tre termini $\frac{\alpha^{-r-1}}{k}+\frac{\alpha 1^{-r-1}}{k1}+\frac{\alpha 2^{-r-1}}{k2}$ diventeranno $\frac{d^2.\frac{1}{P2}}{2dt^2}\alpha^{-r-1}-(r+1)\frac{d.\frac{1}{P2}}{dt}\alpha^{-r-2}+\frac{(r+1)(r+2)}{2}\cdot\frac{1}{P2}\alpha^{-r-3}$. Così pure i termini

$\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+\alpha_1^{-x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}+\alpha_2^{-x}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}$ si cangeranno in
$\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+(\alpha^{-x}-x\omega\alpha^{-x-1}+\frac{x(x+1)}{2}\omega^2\alpha^{-x-2})\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$
$+(\alpha^{-x}-xm\omega\alpha^{-x-1}+\frac{x(x+1)}{2}m^2\omega^2\alpha^{-x-2})\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}$;
in luogo de' quali termini potremo porre $\frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}\right.$
$\left.+x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}+\frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}\right)$; scrivendo cioè $\varphi.y$
in luogo di $\varphi y+\varphi'.y+\varphi''.y$, $\varphi'y-\varphi''y$ invece di
$-\frac{\omega}{\alpha}\varphi'.y-\frac{m\omega}{\alpha}\varphi''.y$, e $\varphi''.y$ in luogo di $\frac{\omega^2}{\alpha^2}\varphi'.y+$
$\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2}\varphi''.y$. Pertanto nel caso di tre radici eguali avremo
$z_x=\frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}+\frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}\right)+\frac{1}{\alpha_3^x}\times$
$\frac{d^x\varphi'''.y}{dy^x}+$ ec. $-\Sigma\left[\alpha^{-r-1}\left(\frac{d^2.\frac{1}{P_2}}{2dt^2}-\frac{(r+1)\,d.\frac{1}{P_2}}{\alpha dt}+\right.\right.$
$\left.\left.\frac{(r+1)(r+2)}{2\alpha^2P_2}\right)+\frac{\alpha_3}{k_3}^{-r-1}+\&c.\right]\frac{d^r.P_{x-n-r}}{dy^{x-n-r}}$.

Si vede chiaramente, qual sarà la forma dell' integrale per un maggior numero di radici eguali, come pure è evidente che nel caso, in cui tutte le radici fossero eguali, sarà $z_x=\frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}+x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}+\frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}\ldots\right.$
$\left.+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{2.3\ldots(x-1)}\frac{d^x\varphi^{(n-1)}.y}{dy^x}\right)-\frac{1}{(-\alpha)^{n-1}}\Sigma.\alpha^{-r-1}\times$
$\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}\cdot\frac{d^rP_{x-n-r}}{dy^{x-n-r}}$.

9. Con un metodo simile si potrà trovare l' integrale della equazione $\frac{d^n\mathbf{z}}{dy^n}+A\frac{d^{n-1}\Delta\mathbf{z}}{dy^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}\Delta^2\mathbf{z}}{dy^{n-2}}\ldots+$
$N\Delta^n\mathbf{z}=P$, essendo $\mathbf{z}$ e P funzioni di x ed y, e la carat-

teristica Δ appartenente alla variabile x. Nel caso di $P = o$ essa è già stata integrata da *Laplace* in una sua Memoria sulle Serie inserita tra quelle dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1779. Ponghiamo $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} + A1 \frac{d^{n-2}\Delta z}{dy^{n-2}} + B1 \frac{d^{n-3}\Delta^2 z}{dy^{n-3}} \ldots + M1\Delta^{n-1}z = X$, e paragonando con la proposta una equazione formata dalla somma del differenziale di questa, e della differenza finita della medesima moltiplicata per una costante $-\alpha$, troveremo (1) $\frac{dX}{dy} - \alpha\Delta X = P$, α essendo data dalla equazione (2) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + N = o$. Ora l'equazione (1) integrata ci dà (5) $X = \frac{\alpha^{-x}e^{-\alpha y}d\,[\varphi.y - \Sigma(\alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} P e^{\alpha y})]}{dy^x}$.

Quindi se chiamiamo α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. le radici della equazione (2), operando come sopra (8) otterremo $\Delta^{n-1}z = \frac{\alpha^{-x}e^{-\alpha y}d.^x[\varphi.y - \Sigma(\alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} dy^{x+1} P e^{\alpha y})]}{k1dy^x} + \frac{\alpha 1^{-x}e^{-\alpha 1 y}d^x.[\varphi'.y - \Sigma(\alpha 1^x \int^{x+1} dy^{x+1} P e^{\alpha 1 y})]}{k1dy^x} +$ ec. Adesso se osserviamo, che a motivo della funzione arbitraria $\varphi.y$ la quantità $\Sigma\alpha^{-x}e^{-\alpha y}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}$ è sempre della forma $\alpha^{-x}e^{-\alpha y}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}$, avremo $z = \alpha^{-x}e^{-\alpha y}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} - e^{-\alpha y}\Sigma^{n-1}\alpha^{-x}\frac{d^x\Sigma\alpha^x\int^{x+1}dy^{x+1}Pe^{\alpha y}}{kdy^x}$ $+ \alpha 1^{-x}e^{-\alpha 1 y}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x} - e^{-\alpha 1 y}\Sigma^{n-1}.\alpha 1^{-x}\frac{d^x\Sigma\alpha 1^x\int^{x+1}dy^{x+1}Pe^{\alpha 1 y}}{k1dy^x}$ + ec.

L' altro metodo delle integrazioni successive ci condurrebbe ad espressioni troppo complicate, eccettuato il solo caso, in cui tutte le radici α, $\alpha 1$, ec. sono eguali, per il quale si troverà $z = \frac{(-1)^n}{\alpha^x e^{\alpha y}} \cdot \frac{d^x\Sigma^n.\alpha^x\int^{x+n}dy^{x+n}Pe^{\alpha y}}{dy^x}$.

10. Se fosse data l' equazione più generale $\frac{d^n z_x}{dy^n} +$

$A \frac{d^{n-1}(az_{x+1}+lz_x)}{dy^{n-1}} + B \frac{d^{n-2}(a^2z_{x+2}+2alz_{x+1}+b^2z_x)}{dy^{n-2}} +$
$N (a^n z_{x+n} + na^{n-1}lz_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 z_{x+n-2} \ldots +$
$b^n z_x = P$, facciamo $z_x = \varphi.x.Z_x$ ed $az_{x+1}+lz_x = -$
$b\varphi.x.\Delta Z_x$, cioè $a\varphi(x+1).Z_{x+1}+b\varphi.x.Z_x = -b\varphi.x.Z_{x+1} +$
$b\varphi.x.Z_x$, e quindi $a\varphi(x+1) = -b\varphi.x$, e $\varphi.x = \left(-\frac{b}{a}\right)^x$.
Ciò posto, l' equazione $az_{x+1}+lz_x = -b\varphi.x\Delta Z_x$ ci darà
$a^2z_{x+2}+2alz_{x+1}+b^2z_x = -ab\varphi(x+1)\Delta Z_{x+1} - b^2\varphi.x\Delta Z_x$
$= b^2\varphi.x\Delta^2 Z^x$; e similmente $a^3z_{x+3}+3a^2bz_{x+2}+3ab^2z_{x+1}$
$+ b^3z^x = ab^2\varphi(x+1)\Delta^2 Z_{x+1}+b^3\varphi x\Delta^2 Z_x = -b^3\varphi.x\Delta^3 Z_x$, e
così in seguito. Pertanto l' equazione proposta diventerà
$\frac{d^nZ}{dy^n} - Ab\frac{d^{n-1}\Delta Z}{dy^{n-1}} + Bb^2\frac{d^{n-2}\Delta^2 Z}{dy^{n-2}} \ldots \pm Nb^n\Delta^n Z = \left(-\frac{a}{b}\right)^x P$,
cioè sarà ridotta alla forma della equazione precedente.

11. Se in luogo della equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy}$, che abbiamo di principio considerata, fosse data la seguente
$z_{x-1} = \frac{dz_x}{dy}$; differenziando continuamente per rapporto
ad y, avremo $\frac{d^xz_x}{dy_x} = z_0 = \varphi.y$, e quindi $z_x = \int^x dy^x \varphi.y$, che
sarà l' integrale della proposta. Ma siccome le integrazioni
si fanno nella supposizione di x costante, quando saranno
completate, verrà ad introdurvisi una nuova funzione arbitraria di x. Infatti, com' è noto, all' integrale $\int^n dy^n \varphi.y$ conviene aggiungere la quantità $C_n + C_{n-1}.y + C_{n-2}.\frac{y^2}{2} +$
$C_{n-3}.\frac{y^3}{2.3} \ldots + C_1.\frac{y^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}$, per renderlo completo.
Onde, se n è variabile ed eguale ad x, C_n diverrà una funzione arbitraria di x, e l' integrale completo della proposta sarà $z_x = \int^x dy^x \varphi.y + \Psi.x + y\Psi(x-1) + \frac{y^2}{2}\Psi(x-2) \ldots$
$+ \frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi.1$. Nè deve far maraviglia, che questo

integrale contenga due funzioni arbitrarie, perchè l' equazione proposta è del second' ordine, come chiaramente apparisce, se si pone sotto la forma $z_x = \frac{dz_{x+1}}{dy}$, ove il termine $\frac{dz_{x+1}}{dy}$ contiene la doppia variazione per rapporto ad x, e per rapporto ad y.

12. Prendiamo adesso l'equazione più generale $a_x z_{x-1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy} + P_x$. Ponghiamo $z_x = Z_x \int^x dy^x Z'_x$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x-1} \int^{x-1} dy^{x-1} Z'_{x-1} + b_y Z_x \int^x dy^x Z'_x = Z_x \int^{x-1} dy^{x-1} Z'_x + \frac{dZ_x}{dy} \int^x dy^x Z'_x + P_x$. Facciamo $a_x Z_{x-1} = Z_x$; $b_y Z_x = \frac{dZ_x}{dy}$; ed avremo ancora $\int^{x-1} dy^{x-1} \Delta Z'_{x-1} = - \frac{P^x}{Z_x}$. Le prime due equazioni ci danno $Z_x = e^{\Sigma \log . a_{x+1} + \int b_y dy}$, e la terza $\Delta Z'_x = - e^{-\Sigma \log . a_{x+2}} . \frac{d^x . e^{-\int b_y dy} . P_{x+1}}{dy^x}$; e quindi $Z'_x = \varphi . y - \Sigma e^{-\Sigma \log . a_{x+2}} . \frac{d^x . e^{-\int b_y dy} P_{x+1}}{dy^x}$; cioè l'integrale completo della proposta sarà $z_x =$

$$e^{\Sigma \log . a_{x+1} + \int b_y dy} \int^x dy^x \left(\varphi . y - \Sigma e^{-\Sigma \log . a_{x+2}} . \frac{d^x . e^{-\int b_y dy} P_{x+1}}{dy^x} \right)$$

$$+ e^{\Sigma \log . a_{x+1} + \int b_y dy} \Big(\psi . x + y \psi (x-1) \dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{y^{x-1}}{2 . 3 \dots (x-1)} \psi . 1 \Big).$$ E da ciò chiaramente apparisce, qual cangiamento convenga fare all' integrale dell' equazioni precedenti, quando in esse la x in luogo di crescere diminuirà dell' unità.

ARTICOLO II.

Applicazione de' medesimi principj all' equazioni a differenze parziali solamente finite, o solamente infinitesime.

13. I medesimi metodi si possono applicare all' equazioni a differenze parziali finite. Sia data l' equazione $a_x z_{x+1,y} + b_{x+y} z_{x,y} = \Delta' z_{x,y} + P_{x,y}$, ove la caratteristica Δ' appartiene alla variabile y, cioè è $\Delta' z_{x,y} = z_{x,y+1} - z_{x,y}$. Ponghiamo $z_{x,y} = Z_{x,y} . Z'_{x,y}$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x+1,y} . Z'_{x+1,y} + b_{x+y} Z_{x,y} . Z'_{x,y} = Z'_{x,y} \Delta' Z_{x,y} + Z_{x,y} \Delta' Z'_{x,y} + \Delta' Z'_{x,y} . \Delta' Z'_{x,y} + P_{x,y}$. Si faccia (1) $a_x Z_{x+1,y} = Z_{x,y} + \Delta' Z_{x,y} = Z_{x,y+1}$; (2) $b_{x+y} Z_{x,y} = \Delta' Z_{x,y}$; e sarà (3) $Z'_{x+1,y} = \Delta' Z'_{x,y} + \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$. L' equazioni (1) e (2) integrate ci daranno $Z_{x,y} = e^{\Sigma \log. \frac{1 + b_{x,y}}{a^x}}$; e l' equazione (3), posto $Z'_{x,y} = \Delta'^x Z''_{x,y}$ diventerà $\Delta'^{x+1} \Delta Z''_{x,y} = \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$; e quindi $\Delta Z''_{x,y} = \Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$; e $Z''_{x,y} = \varphi . y + \Sigma \Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$; $Z'_{x,y} = \Delta'^x \left(\varphi . y + \Sigma \Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}} \right)$; e finalmente l' integrale della proposta riuscirà $z_{x,y} = e^{\Sigma \log. \frac{1 + b_{x+y}}{a^x}} \Delta'^x \left(\varphi . y + \Sigma \Sigma'^{x+1} . e^{\Sigma \log. \frac{a^x}{1 + b_{x+y+1}}} . P_{x,y} \right)$.

Nel caso di a e b costanti, questo integrale prenderà la forma $z_{x,y} = \frac{(1+b)^{x+y}}{a^x} \Delta'^x \left(\varphi . y + \Sigma a^x \Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{(1+b)^{x+y+1}} \right)$, il quale si può scrivere in altro modo così; $z_{x,y} = \frac{(1+b)^{x+y}}{a^x} \Delta'^x \varphi . y + (1+b)^{x+y} \Sigma a^{-r-1} \Delta'^r . \frac{P_{x-r-1,y}}{(1+b)^{x+y-r}}$, ove l' integrale Σ si deve prendere relativamente ad r da $r = 0$ fino ad $r = x - 1$.

Ma la forma precedente d' integrale cessa di esser utile, quando $b_{x+y} = -1$; in tal caso ripigliamo la proposta, o sia l' equazione più generale $a_{x,y} z_{x+1,y} = z_{x,y+1} + P_{x,y}$. Facciamo $x + y = u$, e introduciamo la variabile u in luogo di y, in modo che $z_{x,y}$ divenga $Z_{x,u}$; sarà $z_{x+1,y} = Z_{x+1,u+1}$, e $z_{x,y+1} = Z_{x,u+1}$; così pure $a_{x,y}$ e $P_{x,y}$ diventino respettivamente $a'_{x,u}$ e $P'_{x,u}$. Ciò posto avremo l' equazione $a'_{x,u} Z_{x+1,u+1} = Z_{x,u+1} + P'_{x,u}$; la quale, siccome si può riguardare u come costante, ci darà $Z_{x,u+1} = e^{-\Sigma \log. a'_{x,u}} \left(\phi.u + \Sigma e^{\Sigma \log. a'_{x,u}} . P'_{x,u} \right)$; e quindi $Z_{x,u} = z_{x,y} = e^{-\Sigma \log. a'_{x,u-1}} \left(\phi.u + \Sigma e^{\Sigma \log. a'_{x,u-1}} . P'_{x,u-1} \right)$; cioè $z_{x,y} = e^{-\Sigma \log. a_{x,y-1}} \left(\phi(x+y) + \Sigma e^{\Sigma \log. a_{x,y-1}} . P_{x,y-1} \right)$, purchè si prendano gl' integrali Σ nella ipotesi di $x + y$ costante.

14. Sia adesso proposta l' equazione $\Delta'^n z_x + A \Delta^{n-1} z_{x+1} + B \Delta'^{n-2} z_{x+x} \ldots + N z_{x+n} = P_x$, e ponghiamo che il suo integrale primo sia $\Delta'^{n-1} z^x + A 1 \Delta^{n-2} z_{x+1} + B 1 \Delta'^{n-3} z_{x+2} \ldots + M 1 z_{x+n-1} = X_x$. Se facciamo (1) $\Delta X_x - \alpha X_{x+1} = P_x$, troveremo, come sopra (6), che α sarà una radice della equazione $\alpha^n + A \alpha^{n-1} + B \alpha^{n-2} \ldots + N = 0$. Ora l' integrale di questa equazione (1) essendo $X_x = \frac{1}{\alpha^x} \Delta^x (\phi.y - \Sigma \alpha^x \Sigma'^{x+1} P^x)$, il quale si cangia nel valore di X^x trovato di sopra (6), purchè le caratteristiche Δ' e Σ' si cangino in d ed, $\int$, è chiaro che l' integrale della equazione del n.° 6. si muterà in quello della proposta, purchè le caratteristiche d ed $\int$ si mutino respettivamente in Δ' e Σ'.

15. Passiamo alla equazione $\Delta'^n z + A \Delta'^{n-1} \Delta z + B \Delta'^{n-2} \Delta^2 z \ldots + N \Delta^n z = P$, e ponghiamo il di lei integrale primo essere $\Delta'^{n-1} z + A 1 \Delta'^{n-2} \Delta z + B 1 \Delta'^{n-3} \Delta^2 z \ldots + M 1 \Delta^{n-1} z = X$. Se facciamo ($a$) $\Delta' X - \alpha \Delta X = P$ avremo per α una radice della equazione (b) $\alpha^n + A \alpha^{n-1} + B \alpha^{n-2} \ldots + N = 0$. Ora l' equazione ($a$) integrata ci darà (13) $X = -\frac{(1-\alpha)^{x+y}}{\alpha^x} \Delta'^x \Sigma \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^x \Sigma'^{x+1} \frac{P}{(1+a)^{y+1}}$, ove tralascio la funzione arbitraria, che può riputarsi compresa nell' integrale Σ.

Se

Se chiamiamo α_1, α_2, &c. le altre radici della equazione (b), ed X_1, X_2, &c. i valori corrispondenti di X, avremo operando come sopra (8), $\Delta^{n-1}z = \frac{X}{k} + \frac{X_1}{k_1} + \frac{X_2}{k_2} +$ ec.; e quindi $z = \Sigma^{n-1}\left(\frac{X}{k} + \frac{X_1}{k_1} + \frac{X_2}{k_2}\ \&c.\right)$. Ma se qualche radice della equazione (b) fosse eguale all' unità, in tal caso il valore corrispondente di X sarebbe $X = -\Sigma P_{x,y-1}$, purchè si prenda questo integrale nella ipotesi di $x+y$ costante.

Se fosse data una equazione di una forma simile a quella trattata di sopra (10), se non che in luogo dei differenziali per rapporto ad y vi fossero le differenze finite relativamente alla medesima variabile, col medesimo artifizio si ridurrà all' equazione trattata in questo numero.

16. Facciamo un' altra applicazione del medesimo metodo all' equazioni a differenze finite tra due sole variabili z ed x, supponendo che la differenza finita di x sia una funzione qualunque di x. Sia proposta adunque l' equazione $z^{(n)} + Az^{(n-1)} + Bz^{(n-2)} \ldots + Mz' + Nz = P$, essendo $A, B \ldots N$ costanti, e P funzione data di x, $z' = z + \Delta z$, $z'' = z' + \Delta z'$, e in generale $z^{(r)} = z^{(r-1)} + \Delta z^{(r-1)}$. Ponghiamo (a) $z^{(n-1)} + A_1 z^{(n-2)} + B_1 z^{(n-3)} \ldots + M_1 z = X$, essendo $A_1, B_1, \ldots M_1$ ed X funzioni di x. Facendo variare l' equazione (a), avremo (b) $z^{(n)} + A_1' z^{(n-1)} + B_1' z^{(n-2)} \ldots + M_1' z' = X'$; e sottraendo dalla equazione (b) l' equazione (a) moltiplicata per una funzione α di x,

$$\left.\begin{array}{l} z^{(n)} + A_1' z^{(n-1)} + B_1' z^{(n-2)} \ldots + M' z' \\ -\ \alpha z^{(n-1)} - \alpha A_1 z^{(n-2)} \ldots\ldots - \alpha M_1 z \end{array}\right\} = X' - \alpha X.$$

Siccome questa equazione è affatto simile alla proposta, paragoniamola con essa, ed avremo; $X' - \alpha X = P$; $A_1' = \alpha + A$; $B_1' = \alpha A_1 + B = \alpha\alpha_1 + A\alpha + B$; $C_1' = \alpha\alpha_1\alpha_{11} + A\alpha\alpha_1 + B\alpha + C$; $\ldots M_1' = \alpha\alpha_1\alpha_{11} \ldots \alpha_{(n-1)} + A\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{(n-2)} + B\alpha \ldots \alpha_{(n-2)} + M$; $-\alpha M_1 = N$; cioè $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{(n)} + A\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{(n-1)} + B\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{(n-2)} + M\alpha + N = 0$, dalla quale convien determinare il valore di α. Ma poichè $A, B \ldots N$ sono quantità costanti, potremo soddisfare ad essa prendendo α costante, e allora sarà α una radice della equazione (c) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + M\alpha + N = 0$, ed i coeffi-

cienti A_1, B_1 ... M_1 saranno anch' essi costanti. Posto ciò per integrare l' equazione $X' - \alpha X = P$ facciamo $X = X_1 . X_2$, e sostituendo avremo $X_1' . X_2' - \alpha X_1 . X_2 = P$; e poichè delle funzioni X_1 ed X_2 ne possiamo prendere una ad arbitrio, ponghiamo (d) $X_2' - \alpha X_2 = 0$, ed avremo ancora (e) $\Delta X_1 = \frac{P}{X_2}$. Dalla equazione ($d$) prendendo i logaritmi, abbiamo $\log . X_2' = \log . X_2 + \log . \alpha$; cioè $\Delta \log . X_2 = \log . \alpha$, ed $X_2 = e^{\Sigma \log . \alpha} = \alpha^{\Sigma 1}$; e quindi $X_1 = \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P$, ed $X = \alpha^{\Sigma 1}(c + \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P)$, ove gl' integrali si devono prendere nel sistema di differenza variabile, che regna nella proposta. Sostituito questo valore di X l' equazione diventa (a) $z^{(n-1)} + A_1 z^{(n-2)} + B_1 z^{(n-3)} \ldots + M_1 z = \alpha^{\Sigma 1}(c + \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P)$, la quale, siccome è di un' ordine inferiore alla proposta, e contiene la costante arbitraria c, ne sarà uno integrale primo completo. E se chiamiamo α_1, α_2, &c. le altre radici della equazione (c), avremo altri $n - 1$ integrali primi della proposta, per mezzo de' quali eliminando $z', z'' \ldots . z^{(n-1)}$ otterremo l' integrale finito completo così espresso; $z =$

$$\frac{\alpha^{\Sigma 1}(c + \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P)}{k} + \frac{\alpha_1^{\Sigma 1}(c_1 + \Sigma \alpha_1^{-\Sigma 1 - 1} . P)}{k_1} + \text{ec.}$$

essendo c, c_1, ec. n costanti arbitrarie.

Se la differenza di x fosse costante ed eguale all' unità, avremmo $\Sigma 1 = x$, ed il valore di z sarebbe in questo caso $z = \frac{\alpha^x (c + \Sigma \alpha^{-x-1} . P)}{k} + \frac{\alpha_1^x (c_1 + \Sigma \alpha_1^{-x-1} . P)}{k_1} + \text{ec.}$; il qual valore si cangia in quello trovato precedentemente, se in luogo di x vi si pone $\Sigma 1$. Generalmente avendo integrata una equazione, in cui la differenza finita di x sia eguale all' unità, ne potremo dedurre l' integrale della medesima equazione, allorchè la differenza di x è in qualunque modo variabile; e per ciò ottenere basta solo, che in luogo di x vi si ponga $\Sigma 1$, e questo integrale si prenda nel sistema di differenza variabile, che regna nella proposta. Potremo portanto ottener facilmente l' integrale di tutte le precedenti equazioni, quando in esse la x, in

luogo di variare dell' unità, varierà di una funzione qualunque di x. Così per esempio avendo trovato dell' equazione $z' = \frac{dz}{dy} + P$, allorchè $\Delta x = 1$, l' integrale essere $z = \frac{d^x(\varphi.y + \Sigma f^{x+1} dy^{x+1} P)}{dy^x}$; quando la differenza di x è qualunque, avremo l' integrale della medesima equazione così espresso, $z = \frac{d^{\Sigma 1}(\varphi.y + \Sigma f^{\Sigma 1 + 1} dy^{\Sigma 1 + 1} P)}{dy^{\Sigma 1}}$; e lo stesso si dica delle altre.

17. Nella medesima maniera si possono integrare l' equazioni di una simile forma a differenze parziali e infinitamente piccole. Quantunque esse siano state trattate da altri, contuttociò vi applicherò il medesimo metodo, perchè avrò in seguito bisogno del loro integrale espresso in una forma generale e concisa. Sia data pertanto l' equazione $\frac{d^n z}{dx^n} + A \frac{d^n z}{dx^{n-1} dy} + B \frac{d^n z}{dx^{n-2} dy^2} \ldots + N \frac{d^n z}{dy^n} = P$, ove siano A, B .... N costanti, e P una funzione data di x e di y. Poniamo che sia (a) $\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + A1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-2} dy} + B1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-3} dy^2} \ldots + M1 \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} = X$; e da questa differenziata per rapporto ad x ed y dedurremo

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^n z}{dx^n} + A1 \frac{d^n z}{dx^{n-1} dy} + B1 \frac{d^n z}{dx^{n-2} dy^2} \ldots + M1 \frac{d^n z}{dx\, dy^{n-1}} \\ \quad - \alpha \frac{d^n z}{dx^{n-1} dy} - \alpha A1 \frac{d^n z}{dx^{n-2} dy^2} \ldots - \alpha M1 \frac{d^n z}{dy^n} \end{array}\right\} = \frac{dX}{dx} - \alpha \frac{dX}{dy}.$$

Essendo questa equazione di una forma simile alla proposta, paragoniamola con essa, ed avremo in primo luogo (b) $\frac{dX}{dx} - \alpha \frac{dX}{dy} = P$; poi dal confronto degli altri termini ricaveremo come sopra (6) i valori dei coefficienti A1, B1, ec.; e vedremo che α è una

radice della equazione (c) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + N = 0$. L' integrale della equazione (b) è noto essere $X = \int P dx$, purchè si prenda questo integrale nella ipotesi di $y+\alpha x$ costante, e sarà perciò $\varphi(y+\alpha x)$ la funzione arbitraria, che deve aggiungersi ad esso per renderlo completo. Sostituiti i valori di $A1$, $B1$, &c. ed X, sarà l' equazione (a) l' integrale primo della proposta.

Se adesso operando egualmente sulla equazione (a), ponghiamo $\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + A2 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-3}dy} \ldots + L2 \frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}} = X1$, avremo similmente (d) $\frac{dX1}{dx} - \alpha 1 \frac{dX1}{dy} = X$, ove (6) sarà $\alpha 1$ un' altra radice della equazione (c) diversa da α. Ora l' equazione (d) integrata ci dà $X1 = \int X dx$, purchè si prenda questo integrale nella ipotesi di $y + \alpha 1 x$ costante. Dunque sostituendo il valore di X avremo $X1 = \int^2 P dx^2$, purchè facciamo una integrazione supponendo $y + \alpha x$ costante, e l' altra supponendo costante $y + \alpha 1 x$.

Senza che progrediamo più oltre, facilmente apparisce, che l' integrale finito della proposta sarà $z = \int^n P dx^n$, purchè facciamo le integrazioni supponendo costanti una volta $y + \alpha x$, un' altra $y + \alpha 1 x$, un' altra $y + \alpha 2 x$, &c.; ove α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, &c. sono le radici della equazione (c). A questo integrale, perchè sia completo, conviene aggiungere le n funzioni arbitrarie $\varphi(y+\alpha x) + \varphi'(y+\alpha 1 x) + \varphi''(y+\alpha 2 x) \ldots + \varphi^{(n-1)}[y+\alpha(n-1)x]$.

18. Se fosse proposta l' equazione più generale $\frac{d^n z}{dx^n}$

$$+ A \frac{d^{n-1}\left(az + b\frac{dz}{dy}\right)}{dx^{n-1}} + B \frac{d^{n-2}\left(a^2 z + 2ab\frac{dz}{dy} + b^2\frac{d^2 z}{dy^2}\right)}{dx^{n-2}}$$

$$+ C \frac{d^{n-3}\left(a^3 z + 3a^2 b\frac{dz}{dy} + 3ab^2\frac{d^2 z}{dy^2} + b^3\frac{d^3 z}{dy^3}\right)}{dx^{n-3}} \ldots\ldots$$

$$+ M \frac{d\left(a^{n-1}z + (n-1)a^{n-2}b\frac{dz}{dy} \ldots\ldots + b^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)}{dx}$$

$+ N\left(a^n z + na^{n-1}b\frac{dz}{dy} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2\frac{d^2z}{dy^2}\ldots + b^n\frac{d^nz}{dy^n}\right)$ $= P$, si potrebbe trattare col medesimo metodo, ma più facilmente si ridurrà alla forma precedente. Facciamo $z = TZ$, ed avremo $az + b\frac{dz}{dy} = aTZ + b\frac{dT}{dy}Z + bT\frac{dZ}{dy} = bT\frac{dZ}{dy}$, se ponghiamo $aT + b\frac{dT}{dy} = 0$, cioè $T = e^{-\frac{a}{b}y}$. Quindi sarà $a^2z + 2ab\frac{dz}{dy} + b^2\frac{d^2z}{dy^2} = abT\frac{dZ}{dy} + b^2T\frac{d^2Z}{dy^2} + b^2\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dZ}{dy} = b^2T\frac{d^2Z}{dy^2}$; $a^3z + 3a^2b\frac{dz}{dy} + 3ab^2\frac{d^2z}{dy^2} + b^3\frac{d^3z}{dy^3} = ab^2T\frac{d^2Z}{dy^2} + b^3\frac{dT}{dy}\cdot\frac{d^2Z}{dy^2} + b^3T\frac{d^3Z}{dy^3} = b^3T\frac{d^3Z}{dy^3}$, e così in seguito. Sostituiti questi valori, la proposta diventerà $\frac{d^nZ}{dx^n} + Ab\frac{d^nZ}{dx^{n-1}dy} + Bb^2\frac{d^nZ}{dx^{n-2}dy^2}\ldots$ $\ldots + Nb^n\frac{d^nZ}{dy^n} = e^{\frac{a}{b}y}.P$; cioè sarà ridotta alla forma precedente. Quindi l' integrale dell' equazione proposta sarà $z = e^{-\frac{a}{b}y}\int^n e^{\frac{a}{b}y}P\,dx^n$; purchè si facciano una dopo l' altra costanti le quantità $y + \alpha x$, $y + \alpha 1 x$, $y + \alpha 2 x$, &c.; essendo α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, &c. le radici della equazione $\alpha^n + Ab\alpha^{n-1} + Bb^2\alpha^{n-2} \ldots + Nb^n = 0$.

19. Ma per ottenere un resultato un poco più generale, consideriamo l' equazione del second' ordine $\frac{d^2z}{dx^2} + A\frac{d^2z}{dxdy} + B\frac{d^2z}{dy^2} + C\frac{dz}{dx} + D\frac{dz}{dy} + Ez = P$, in cui i coefficienti A, B, &c. sian tali, che la quantità $\alpha^2 + A\alpha\beta + B\beta^2 + C\alpha + D\beta + E$ sia risolubile in due fattori razionali della forma $\alpha + p\beta + q$, $\alpha + p'\beta + q'$. E' chia-

ro, che l' equazione proposta potrà mettersi in tal caso sotto la forma $\frac{d^2z}{dx^2} + p\frac{d^2z}{dxdy} + q\frac{dz}{dx} + p'\left(\frac{d^2z}{dxdy} + p\frac{d^2z}{dy^2} + q\frac{dz}{dy}\right) + q'\left(\frac{dz}{dx} + p\frac{dz}{dy} + qz\right) = P$; la quale, se facciamo (*a*) $\frac{dz}{dx} + p\frac{dz}{dy} + qz = X$, diventerà (*b*) $\frac{dX}{dx} + p'\frac{dX}{dy} + q'X = P$. L' integrale della equazione (*b*) è $X = e^{-q'x}\int e^{q'x}Pdx$, se si prende l' integrale $\int$ nella ipotesi di $y - p'x$ costante. E così pure l' integrale della equazione (*a*) sarà $z = e^{-qx}\int e^{qx}Pdx$, purchè si prenda l' integrale $\int$ nella supposizione di $y - px$ costante. Quindi sostituendo il valore di X, avremo con queste condizioni l' integrale della proposta $z = e^{-qx}\int e^{(q-q')x}dx\int e^{q'x}Pdx$.

Il medesimo metodo condurrà alla integrazione dell' equazioni lineari di qualunque ordine; purchè il loro primo membro sia tale, che il polinomio, il quale ne risulta dal porre $\alpha^r\beta^s$ in luogo di $\frac{d^{r+s}z}{dx^r dy^s}$ sia risolubile in fattori della forma $\alpha + p\beta + q$. E se n è l' ordine della equazione proposta, ed i fattori del polinomio sono $\alpha + p\beta + q$; $\alpha + p'\beta + q'$; $\alpha + p''\beta + q''$; . . . . . $a + p^{(n-2)}\beta + q^{(n-2)}$; $\alpha + p^{(n-1)}\beta + q^{(n-1)}$; è facile il vedere, che l' integrale della proposta sarà $z = e^{-qx}\int e^{(q-q')x}dx\int e^{(q'-q'')x}dx$ . . . . $\int e^{(q^{(n-2)}-q^{(n-1)})x}dx\int e^{q^{(n-1)}x}Pdx$; ove si deve supporre costante nel primo segno $\int$ la quantità $y - px$, nel secondo $y - p'x$, nel terzo $y - p''x$, e così in seguito.

Se q sarà il medesimo in tutti i fattori, questo valore di z diventerà più semplicemente espresso, e sarà $z = e^{-qx}\int^n e^{qx}Pdx^n$; ove si dovranno fare le integrazioni supponendo una dopo l' altra costanti le quantità $y - px$, $y - p'x$, $y - p''x$ ec., in quell' ordine che più piacerà.

ARTICOLO III.

Dell' equazioni a differenze parziali finite e infinitesime tra quattro variabili.

20. Fin quì abbiamo parlato dell' equazioni tra tre sole variabili; passiamo a dir qualche cosa di quelle, che ne contengono un maggior numero. Sia dunque z_x una funzione delle tre variabili x, y, e t; e si proponga l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$, ove a è una quantità costante. Ponendo $x=0$, e $z_0 = \varphi(y, t)$, avremo $z_1 = \frac{d\varphi}{dy} + a\frac{d\varphi}{dt}$; similmente fatto $x=1$, sarà $z_2 = \frac{dz_1}{dy} + a\frac{dz_1}{dt}$; e sostituendovi il valore di z_1 verrà $z_2 = \frac{d^2\varphi}{dy^2} + 2a\frac{d^2\varphi}{dydt} + a^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Continuando ad operare nella medesima maniera, otterremo finalmente $z_x = \frac{d^x\varphi}{dy^x} + A1\frac{d^x\varphi}{dy^{x-1}dt} + A2\frac{d^x\varphi}{dy^{x-2}dt^2} \dots\dots + A(x)\frac{d^x\varphi}{dt^x}$; ove A1, A2, ec. sono funzioni di x. Per determinarle sostituiamo questo valore nella proposta, ed avremo l' equazione $\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}} + A1'\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^x dt} + A2'\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x-1}dy^2} \dots$ $\dots\dots\dots\dots + A(x+1)'\frac{d^{x+1}\varphi}{dt^{x+1}} = \frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}} + A1\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^x dt} +$ $A2\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x-1}dt^2} \dots + A(x)\frac{d^{x+1}\varphi}{dydt^x} + a\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^x dt} + aA1\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x-1}dt^2} \dots$ $\dots\dots\dots + aA(x)\frac{d^{x+1}\varphi}{dt^{x+1}}$. Quindi avrassi $\Delta A1 = a$, $\Delta A2 = aA1$, $\Delta A3 = aA2$, ec.: ed integrando $A1 = ax + C$; $A2$ $a^2\frac{x(x-1)}{2} + Cx + C1$; $A3 = a^3\frac{x(x-1)(x-2)}{2\cdot 3} + C\frac{x(x-1)}{2}$ $+ C1x + C2$, &c. Ma quando $x=1$, dev' essere $A1 = a$, $A2 = 0$, $A3 = 0$, &c.; dunque avremo $C=0$, $C1$

$= 0$, $C2 = 0$, ec.; e quindi $z_x = \frac{d^x\varphi}{dy^x} + ax\frac{d^x\varphi}{dy^{x-1}dt} + a^2\frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi}{dy^{x-2}dt^2} \ldots\ldots + a^x\frac{d^x\varphi}{dt^x}$: la qual formola si può rappresentare così; $z_x = \left(\frac{d\varphi}{dy} + a\frac{d\varphi}{dt}\right)^x$, purchè nello sviluppo del secondo membro si applichino alla caratteristica d gli esponenti di $d\varphi$.

21. Se l' equazione fosse stata $z_{x-1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$; ponendo, come sopra (11), $-x$ in luogo di x, e mutando le differenziali di esponente negativo in integrali, avremmo $z_x = \left(\frac{d\varphi}{dy} + a\frac{d\varphi}{dt}\right)^{-x} = \int^x dy^x\varphi - ax\int^{x+1}dy^{x+1}\frac{d\varphi}{dt} + a^2\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2}dy^{x+2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ec. Per dimostrar questa formola, integriamo la proposta relativamente ad y: avremo $z_x = \int z_{x-1}dy - a\int\frac{dz_x}{dt}dy$; e ponendo $x = 1$ sarà $z_1 = \int\varphi dy - a\int\frac{dz_1}{dt}dy$; $\int\frac{dz_1}{dt}dy = \int^2\frac{d\varphi}{dt}dy^2 - a\int^2\frac{d^2z_1}{dt^2}dy^2$; $\int\frac{d^2z_1}{dt^2}dy = \int^3\frac{d^2\varphi}{dt^2}dy^3 - a\int^3\frac{d^3z_1}{dt^3}dy^3$ ec.; onde sostituendo nella prima equazione i valori presi dalle altre otterremo $z_1 = \int dy\varphi - a\int^2dy^2\frac{d\varphi}{dt} + a^2\int^3dy^3\frac{d^2\varphi}{dt^3} - a^3\int^4dy^4\frac{d^3\varphi}{dt^3} +$ ec. Così pure, posto $x = 2$, sarà $z_2 = \int dy z_1 - a\int dy\frac{dz_2}{dt}$; cioè $z_2 = \int dy z_1 - a\int^2dy^2\frac{dz_1}{dt} + a^2\int^3dy^3\frac{d^2z_1}{dt^2} -$ ec.; e sostituito il valore di z_1 sarà $z_2 = \int^2dy^2\varphi - 2a\int^3dy^3\frac{d\varphi}{dt} + 3a^2\int^4dy^4\frac{d^2\varphi}{dt^2} -$ ec. Onde apparisce, che sarà in generale $z_x = \int^x dy^x\varphi - A_x\int^{x+1}dy^{x+1}\frac{d\varphi}{dt}$

+

$+ A1_x \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} -$ ec. Per determinare le quantità A_x, $A1_x$, ec. si sostituisca questo valore nella proposta, ed avrassi $\int^{x-1} dy^{x-1}\varphi - A_{x-1}\int^x dy^x \frac{d\varphi}{dt} + A1_{x-1}\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ $-$ ec. $= \int^{x-1} dy^{x-1}\varphi - A_x \int^x dy^x \frac{d\varphi}{dt} + A1_x \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d^2\varphi}{dt^2} -$ ec. $+ a\int^x dy^x \frac{d\varphi}{dt} - aA_x \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d^2\varphi}{dt^2} +$ ec.; e quindi $\Delta A_x = a$, $\Delta A1_x = aA_{x+1}$, $\Delta A2_x = aA1_{x+1}$, ec. Onde integrando, $A_x = a_x + C$, $A1_x = a^2 \frac{x(x+1)}{2} + Cx + C1$, $A2_x = a^3 \frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3} + C\frac{x(x+1)}{2} + C1x + C2$, ec.; e siccome $A_1 = a$, $A1_1 = a^2$, $A2_1 = a^3$, ec., sarà $C = C1 = C2 =$ ec. $= 0$, e $z_x = \int^x dy^x \varphi - ax\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{dt} + a^2 \frac{x(x+1)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} -$ ec.

Questo integrale ha poco pregio, perchè è espresso da una serie infinita; onde convien vedere, se fosse possibile di ridurlo ad un numero finito di termini. Sia dunque

$$S = \int^x dy^x \varphi - ax\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{dt} + a^2 \frac{x(x+1)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \text{ec.}$$

e sia proposto di trovare il valore di S, o sia la somma di questa serie infinita. S' integri per parti la quantità $\int^x dy^x \Psi$, e si avrà, per i metodi altronde già noti, $\int^x dy^x \Psi =$

$$\frac{1}{1.2..(x-1)} \left\{ \begin{array}{l} y^{x-1}\int dy\Psi - (x-1)y^{x-2}\int y dy\Psi + \frac{(x-1)(x-2)}{2} y^{x-3}\int y^2 dy\Psi \\ \ldots\ldots\ldots \pm (x-1)y\int y^{x-2} dy\Psi \mp \int y^{x-1} dy\Psi. \end{array} \right\}$$

E ponendo $x+1$ in luogo di x si avrà $\int^{x+1} dy^{x+1}\Psi$

$$= \frac{1}{1.2\ldots x} \left\{ \begin{array}{l} y^x \int dy\Psi - xy^{x-1}\int y dy\Psi + \frac{x(x-1)}{2} \int y^2 dy\Psi \\ \ldots\ldots\ldots \mp xy\int y^{x-1} dy\Psi \pm \int y^x dy\Psi \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots x} [y^x \int dy\Psi - (x-1)y^{x-1}\int y dy\Psi \ldots\ldots \mp \int y^{x-1} dy\Psi]$$

$$- \frac{1}{1 . 2 \ldots x} [y^{x-1} \int y dy \Psi - (x-1) y^{x-2} \int y^2 dy \Psi \ldots = \int y^x dy \Psi]$$

$= \frac{y}{x} \int^x dy^x \Psi - \frac{1}{x} \int^x y dy^x \Psi$. Quindi poi si ricaverà

$$x \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{dt} = y \int^x dy^x \frac{d\varphi}{dt} - \int^x dy^x . y \frac{d\varphi}{dt} ; \quad \frac{x(x+1)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$= \frac{x}{2} y \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{x}{2} \int^{x+1} dy^{x+1} . y \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$= \frac{y^2}{2} \int^x dy^x \frac{d^2\varphi}{dt^2} - y \int^x dy^x . y \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{2} \int^x dy^x . y^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, e così in seguito. Avremo pertanto, sostituendo i ritrovati valori,

$$S = \int^x dy^x (\varphi + ay \frac{d\varphi}{dt} + \frac{a^2y^2}{2} . \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{a^3y^3}{2 . 3} . \frac{d^3\varphi}{dt^3} + \text{ec.})$$

$$- ay \int^x dy^x (\frac{d\varphi}{dt} + ay \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{a^2y^2}{dt^2} . \frac{d^3\varphi}{dt^3} + \text{ec.})$$

$+ \frac{a^2y^2}{2} \int^x dy^x (\frac{d^2\varphi}{dt^2} + ay \frac{d^3\varphi}{dt^3} + \text{ec.}) + \text{ec.}$; cioè $S =$
$\int^x dy^x (y,t+ay) - ay \int^x dy^x \frac{d\varphi(y,t+ay)}{dt} + \frac{a^2y^2}{2} \int^x dy^x \frac{d^2\varphi(y,t+ay)}{dt^2}$
— ec.; o sia sarà S il valore di $\int^x dy^x \varphi(y,t + ay)$, allorchè dopo le integrazioni vi si pone $t - ay$ in luogo di t, o finalmente sarà S il valore di $\int^x dy^x \varphi(y,t)$, quando si fanno le integrazioni nella ipotesi di $t - ay$ costante.

L' integrale adunque della equazione $z_{x-1} = \frac{dz_x}{dy} + a \frac{dz_x}{dt}$ sarà così semplicemente espresso; $z_x = \int^x dy^x \varphi(t,y)$; ove l'integrali si devono prendere nella supposizione di $t - ay$ costante, e quindi in ciascuna integrazione conviene aggiungere una funzione arbitraria di $t - ay$; onde dopo x integrazioni verrà ad essere aggiunta la formola seguente

$$\Psi(x,t-ay) + y\Psi(x-1,t-ay) + \frac{y^2}{2} \Psi(x-2,t-ay) \ldots\ldots$$

$\ldots + \frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)} \Psi(1,t - ay)$. Quindi l' integrale della proposta conterrà due funzioni arbitrarie $\varphi(t,y)$, e $\Psi(x,t-ay)$, com' esser doveva, perchè la proposta è del second' ordine.

Si potrà trovare l' integrale della equazione $z_{x-1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$ anche con un altro metodo. Si ponga $x-1$ in luogo di x, ed avrassi $z_{x-2} = \frac{dz_{x-1}}{dy} + a\frac{dz_{x-1}}{dt}$; e sostituendo il valore di z_{x-1} sarà $z_{x-2} = \frac{d^2z_x}{dy^2} + 2a\frac{d^2z_x}{dydt} + a^2\frac{d^2z_x}{dt^2}$. Così pure troverassi $z_{x-3} = \frac{d^3z_x}{dy^3} + 3a\frac{d^2z_x}{dy^2dt} + 3a^2\frac{d^2z_x}{dydt^2} + a^3\frac{d^3z_x}{dt^3}$; e finalmente, posto $z_0 = \varphi(y,t)$, si giungerà alla equazione (a) $\varphi(y,t) = \frac{d^xz_x}{dy^x} + ax\frac{d^xz_x}{dy^{x-1}dy} + a^2\frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{d^xz_x}{dy^{x-2}dt^2}\ldots + a^x\frac{d^xz_x}{dt^x}$, ove si può riguardare x come costante. Ora l' integrale di questa equazione è (17) $z_x = \int^x dy^x \varphi(y,t)$, purchè si facciano le integrazioni supposte costanti una dopo l' altra le quantità $t+\alpha y$, $t+\alpha 1y$, $t+\alpha 2y$, ec.; ove α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. sono le radici della equazione $\alpha^x + ax\alpha^{x-1} + a^2\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}\ldots + a^x = (\alpha+a)^x = 0$. Ma queste radici sono tutte $= -a$; dunque l' integrale della proposta sarà $z_x = \int^x dy^x \varphi(y,t)$, purchè si facciano tutte le integrazioni nella supposizione di $t-ay$ costante.

L' integrale della equazione (a) porterà x funzioni arbitrarie di x e di $t-ay$ rappresentate della formola $\frac{y^{x-1}}{2\cdot3\ldots(x-1)}\Psi_{1,x,t-ay} + \frac{y^{x-2}}{2\cdot3\ldots(x-2)}\Psi_{2,x,t-ay}\ldots\ldots + \Psi_{x,x,t-ay}$. Per determinare la forma di queste funzioni si sostituisca la formola precedente nella proposta in luogo di z_x, e dal paragone de' termini troverassi in generale $\Psi_{n,x,t-ay} = \Psi_{n,x-1,t-ay}$, la qual' equazione ci dà $\Psi_{n,x,t-ay} = F_{n,t-ay}$. Sarà dunque $\Psi_{1,x,t-ay} = F_{1,t-ay}$; $\Psi_{2,t-ay} = F_{2,t-ay}$; ... $\Psi_{x,x,t-ay} = F_{x,t-ay}$; cioè una sola sarà la funzione arbitraria di x e di $t-ay$, come avevamo già veduto di sopra.

22. L' equazioni precedenti si possono però facilmente ridurre alla integrazione con una semplicissima trasformazione delle variabili. Ripigliamo l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$, e ponghiamo in luogo di t un' altra variabile u, che sia funzione di y e t, in modo che la quantità z_x diventi una funzione di x, y, ed u, che chiameremo Z_x. Sarà dunque $z_{x+1} = Z_{x+1}$; $\frac{dz_x}{dy} = \frac{dZ_x}{dy} + \frac{dZ_x}{du} \cdot \frac{du}{dy}$; $\frac{dZ_x}{dt} = \frac{dZ_x}{du} \cdot \frac{du}{dt}$; sostituiti i quali valori la proposta diventerà $Z_{x+1} = \frac{dZ_x}{dy} + \left(\frac{du}{dy} + a\frac{du}{dt}\right)\frac{dZ_x}{du}$. Facciamo $\frac{du}{dy} + a\frac{du}{dt} = 0$, ed avremo $Z_{x+1} = \frac{dZ_x}{dy}$, ove possiamo riguardare u come costante; e l' integrale di essa sarà (1) $Z_x = \frac{d^x\varphi(y,u)}{dy^x}$.

Ora l' equazione $\frac{du}{dy} + a\frac{du}{dt} = 0$ integrata ci dà $u = \Psi(t - ay)$; ma poichè non abbiamo bisogno, che di un valore particolare di u, prenderemo $u = t - ay$, lo che combina con le cose precedenti.

Generalmente, se sarà z_x funzione di un numero qualunque di variabili x, y, t, u, ec., data dalla equazione $z_{x+1} = a\frac{dz_x}{dy} + b\frac{dz_x}{dt} + c\frac{dz_x}{du} +$ ec., e sieno a, b, c, ec. quantità costanti, si troverà col medesimo metodo $z_x = a^x \frac{d^x\varphi(y, t, u, \&c.)}{dy^x}$, purchè si prendano le differenziali supponendo costanti le quantità $at - by$, $au - cy$, &c.

23. Sia adesso proposta l' equazione $az_{x+1} bz_x = \frac{dz_x}{dy} + c\frac{dz_x}{dt} + P$, ove sia a funzione di x, b e c funzioni di y e t, e P funzione di x, y, e t. Sia M il Moltiplicatore, che rende integrabile la differenziale $dt - cdy$, e sia

$\int M(dt - cdy) = u$. Introduciamo in luogo di t questa nuova variabile u, in modo che z_x diventi una funzione di x, y ed u, che chiameremo Z_x; e b, c, P si cangino respettivamente in b', c', e P'. Fatte queste sostituzioni la proposta diventerà $aZ_{x+1} + b'Z_x = \frac{dZ_x}{dy} + P'$. In questa u si può riguardare come costante, ed il di lei integrale è perciò (5) $Z_x = e^{\int b'dy - \Sigma \log . a} \cdot \frac{d^x \varphi(y,u)}{dy^x}$
$+ e^{\int b'dy - \Sigma \log . a} \cdot \frac{d^x \Sigma e^{\Sigma \log . a} \int^{x+1} dy^{x+1} P' e^{-\int b'dy}}{dy^x}$.

24. Fin quì abbiamo trattate quell' equazioni, nelle quali le differenze di due variabili erano infinitamente piccole, e la differenza della terza finita; passiamo a considerar quelle, nelle quali la differenza di due variabili è finita, e della terza infinitesima. Sia pertanto $z_{x,y}$ funzione di x, y, e t; e sia proposta l' equazione $z_{x+1,y} = z_{x,y+1} + a\frac{dz_{x,y}}{dt}$, ove a è una quantità costante. Ponendo $z_{0,y} = \varphi(y,t)$, se facciamo $x = 0$, avremo $z_{1,y} = \varphi(y+1,t) + a\frac{d\varphi(y,t)}{dt}$.
Così facendo $x = 1$, avremo $z_{2,y} = z_{x,y+1} + a\frac{dz_{1,y}}{dt}$; e sostituendo il valore di $z_{1,y}$, sarà $z_{2,y} = \varphi(y+2,t) + 2a\frac{d\varphi(y+1,t)}{dt}$
$+ a^2\frac{d^2\varphi(y,t)}{dt^2}$. Nella medesima maniera troveremo $z_{3,y} =$
$\varphi(y+3,t) + 3a\frac{d\varphi(y+2,t)}{dt} + 3a^2\frac{d^2\varphi(y+1,t)}{dt^2} + a^3\frac{d^3\varphi(y,t)}{dt^3}$;
onde si vede, che in generale sarà $z_{x,y} = \varphi(y+x,t) + xa\frac{d\varphi(y+x-1,t)}{dt} \dots + a^x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$; e questo è l' integrale della proposta.

Ma per aver questo integrale in una forma più concisa, ponghiamo $z_{x,y} = Z_{x,y}\frac{d^{x+y}Z1_{x,y}}{dt^{x+y}}$, ove $Z_{x,y}$ è funzio-

ne di x ed y, e $Z1_{x,y}$ funzione di x, y, t; e sostituendo avremo $Z_{x+1,y} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{x+1,y}}{dt^{x+y+1}} = Z_{x,y+1} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z_{x,y+1}}{dt^{x+y+1}}$ $+ aZ_{x,y} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{x,y}}{dt^{x+y+1}} = Z_{x,y+1} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{x,y}}{dt^{x+y+1}} +$ $Z_{x,y+1} \cdot \frac{d^{x+y+1}\Delta'Z1_{x,y}}{dt^{x+y+1}} + aZ_{x,y} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{x,y}}{dt^{x+y+1}}$. Facciamo $Z_{x+1,y} = Z_{x,y+1}$, $Z_{x,y+1} = -aZ_{x,y}$, alle quali equazioni soddisfaremo con prendere $Z_{x,y} = (-a)^{x+y}$. Ciò posto l' equazione precedente diventerà $Z1_{x+1,y} = \Delta'Z1_{x,y}$, ed integrata ci darà $Z1_{x,y} = \Delta'^{x}\varphi(y,t)$. Pertanto l' integrale della proposta sarà

$$z_{x,y} = \frac{(-a)^{x+y}d^{x+y}\Delta'^{x}\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}.$$

Quantunque questo valore di $z_{x,y}$ sembri a prima vista diverso da quello trovato di sopra, pure ambedue combinano perfettamente. Infatti ponghiamo in quello $(-a)^{y}\frac{d^{y}\varphi(y,t)}{dt^{y}}$ in luogo di $\varphi(y,t)$, lo che può farsi senza nulla togliere alla generalità, e diventerà

$$(-a)^{x+y} \cdot \frac{d^{x+y}[\varphi(y+x,t) - x\varphi(y+x-1,t) \ldots\ldots \pm \varphi.t]}{dt^{x+y}};$$

cioè $(-a)^{x+y} \cdot \frac{d^{x+y}\Delta^{x}\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$.

25. Se l' equazione data avrà la forma $z_{x-1,y} = z_{x,y+1} - a\frac{dz_{x,y}}{dt}$; porremo $z_{x,y} = Z_{x,y} \cdot \frac{d^{y-x}Z1_{x,y}}{dt^{x-y}}$, ove $Z_{x,y}$ è funzione di x ed y, e $Z1_{x,y}$ funzione x, y e t; e sostituendo avremo $Z_{x-1,y} \cdot \frac{d^{x-y+1}.Z1_{x-1,y}}{dt^{x-y+1}} = Z_{x,y+1} \cdot \frac{d^{x-y+1}(Z1_{x,y} + \Delta'Z1_{x,y})}{dt^{x-y+1}}$ $- aZ_{x,y} \cdot \frac{d^{x-y+1}.Z1_{x,y}}{dt^{x-y+1}}$. Facciamo $Z_{x-1,y} = Z_{x,y+1} = aZ_{x,y}$, cioè $Z_{x,y} = a^{y-x}$, e l' equazione precedente diventerà $Z1_{x-1,y} = \Delta Z_{x,y}$, l' integrale della quale è $Z1_{x,y} = \Sigma'^{x}\varphi(y,t)$. Sarà perciò $z_{x,y} = \frac{a^{y-x}d^{y-x}\Sigma'^{x}\varphi(y,t)}{dt^{y-x}} = \frac{a^{y-x}d^{y}\Sigma'^{x}\int^{x}dt^{x}\varphi(y,t)}{dt^{y}}$.

Si potrebbe giungere al medesimo integrale anche con

un altro metodo. Posto $z_{0,y}=\Psi(y,t)$ la proposta si può trasformare nella seguente $\Psi(y,t)=z_{x,y+x}-xa\frac{dz_{x,y+x-1}}{dt}+\frac{x(x-1)}{2}a^2\frac{d^2z_{x,y+x-2}}{dt^2}\ldots\pm a^x\frac{d^xz_{x,y}}{dt^x}$; e dividendo per $(-1)^x a^x$ verrà $\frac{\Psi(y,t)}{(-1)^x a^x}=\frac{d^xz_{x,y}}{dt^x}-\frac{x}{a}\cdot\frac{d^{x-1}z_{x,y+1}}{dt^{x-1}}+\frac{x(x-1)}{2a^2}\cdot\frac{d^{x-2}z_{x,y+2}}{dt^{x-2}}\ldots\pm\frac{1}{a^x}z_{x,y+x}$, ove si può riguardare x come costante. Paragonandola con l' equazione trattata al n.° 6. troveremo, che tutte le radici della equazione (P) sono eguali ad $\frac{1}{a}$; e quindi il di lei integrale sarà $z_{x,y}=\frac{a^{y-x}d^y\Sigma'^x a^{-y}\int^{x+y}dt^{x+y}\Psi(y,t)}{dt^y}$, il quale combina col valore trovato precedentemente, e si riduce ad esso ponendo $\frac{1}{a^y}\int^y dt^y\Psi(y,t)=\varphi(y,t)$.

26. Che se la proposta fosse $z_{x-1,y}=z_{x,y-1}-a\frac{dz_{x,y}}{dt}$; in tal caso porremmo $z_{x,y}=Z_{x,y}\int^{x+y}dt^{x+y}Z1_{x,y}$, preso Z e Z1 come sopra, e sostituendo avremmo $Z_{x-1,y}\int^{x+y-1}dt^{x+y-1}.Z1_{x-1,y}$ $=Z_{x,y-1}\int^{x+y-1}dt^{x+y-1}(Z1_{x,y}-\Delta'Z1_{x,y-1})$ $-aZ_{x,y}\int^{x+y-1}dt^{x+y-1}.Z1_{x,y}$. Facciamo $Z_{x-1,y}=Z_{x,y-1}=aZ_{x,y}$, cioè $Z_{x,y}=\frac{1}{a^{x+y}}$; e l' equazione precedente ci darà $Z1_{x-1,y}=-\Delta'Z1_{x,y-1}$, l' integrale della quale è $Z_{x,y}=(-1)^x\Sigma'^x\varphi(y+x,t)$. Pertanto l' integrale della proposta sarà $z_{x,y}=\frac{(-1)^x}{a^{x+y}}\int^{x+y}dt^{x+y}\Sigma'^x\varphi(x+y,t)$. I due segni integrali Σ' ed $\int$ porteranno altre due funzioni arbitrarie, una di x e t, e l' altra di x ed y, com' esser doveva, perchè la proposta è del terz' ordine.

27. Sia data adesso l' equazione $z_{x+1,y}=z_{x,y+1}-a\frac{dz_{x,y}}{dt}+P_x$, essendo a costante, e P_x funzione di x, y, t. Facciamo $z_{x,y}=a^{x+y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^xZ_{x,y}}{dt^{x+y}}$, e sostituendo avremo

$$a^{x+y+1}\cdot\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x+1}Z_{x+1,y}}{dt^{x+y-1}}=a^{x+y+1}\cdot\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x+1}Z_{x,y}}{dt^{x+y+1}}+P_x.$$

Quindi $\Delta Z_{x,y}=\Sigma'^{x+1}.\frac{1}{a^{x+y+1}}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P_x$, ed integrando

$Z_{x,y}=\varphi(y,t)+\Sigma\Sigma'^{x+1}.\frac{1}{a^{x+y+1}}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P_x$. Quindi l' integrale della proposta sarà, $z_{x,y}=a^{x+y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^{x}\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$

$$+\ a^{x+y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^{x}\Sigma\Sigma'^{x+1}.a^{-x-y-1}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P_x}{dt^{x+y}}.$$

Quest' ultimo termine si può anche esprimer così;

$\frac{a^{y}d^{y}\Sigma\Delta'^{r}\frac{1}{a^{y-r}}\int^{y-r}dt^{y-r}P_{x-r-1}}{dt^{y}}$, ove l' integrale Σ si deve prendere relativamente ad r da $r=0$ fino ad $r=x-1$.

28. Più generalmente, se fosse data l' equazione $az_{x+1,y}+bcz_{x,y}=z_{x,y+1}+c\frac{dz_{x,y}}{dt}+P$, ove a, b, c, P sono respettivamente funzioni di x, di t, di $x+y$, e di x, y, t; porremo $z_{x,y}=Z_{x,y}.Z1_{x,y}$, essendo $Z_{x,y}$ e $Z1_{x,y}$ ambedue funzioni di x, y, t; e sostituendo avremo invece $aZ_{x+1,y}.Z1_{x+1,y}+bcZ_{x,y}.Z1_{x,y}=Z_{x,y+1}.Z1_{x,y+1}+cZ_{x,y}.\frac{dZ1_{x,y}}{dt}+cZ1_{x,y}.\frac{dZ_{x,y}}{dt}+P$. Facciamo adesso

(1) $bZ_{x,y}=\frac{dZ_{x,y}}{dt}$; (2) $Z_{x,y+1}=cZ_{x,y}$; (3) $aZ_{x+1,y}=Z_{x,y+1}$; ed otterremo $Z1_{x+1,y}=Z1_{x,y+1}+\frac{dZ1_{x,y}}{dt}+\frac{P}{Z_{x,y+1}}$, che abbiamo integrata nel num.° precedente. Per determinare $Z_{x,y}$ abbiamo dalla equazione (1) $Z_{x,y}=e^{\int bdt}.\Psi(x,y)$, e sostituito questo valore la (2) diventa $\Psi(x,y+1)=c\Psi(x,y)$, e quindi abbiamo $\Psi(x.y)=e^{\Sigma'\log.c}.\varphi.x$, e dalla equazione (3) ricaveremo $\varphi.x=e^{-\Sigma\log.a}$. Sarà dunque $Z_{x,y}=e^{\int bdt+\Sigma'\log.c-\Sigma\log.a}$; o sia più semplicemente, poichè c è funzione di $x+y$, sarà $Z_{x,y}=e^{\int bdt+\Sigma\log.\frac{c}{a}}$.

AR-

ARTICOLO IV.

Metodo generale per l' integraione dell' equazioni tra tre variabili, nelle quali i coefficienti sono costanti.

29. Allorchè nell' equazioni lineari a differenze parziali finite e infinitesime i coefficienti son costanti, e non vi è alcun termine, che non contenga la funzione z_x, si può adoperare per la loro integrazione un' altro semplicissimo metodo. Sia proposta l' equazione del prim' ordine $z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy}$. Ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ove α e β sono quantità costanti, ed e il numero, che ha per logaritmo iperbolico l' unità. Sostituendo questo valore, e dividendo l' equazione per $\alpha^x e^{\beta y}$ otterremo $\alpha = A + B\beta$; la qual' equazione esprime il rapporto, che devono aver tra loro le quantità α e β, perchè $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$ soddisfaccia alla proposta. Sarà dunque $z_x = (A + B\beta)^x e^{\beta y} = [A^x + xA^{x-1}B\beta + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\beta^2 \ldots + B^x\beta^x]e^{\beta y}$; il qual valore si può mettere sotto la forma $z_x = A^x e^{\beta y} + xA^{x-1}B\frac{d.e^{\beta y}}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^2.e^{\beta y}}{dy^2} \ldots + B^x\frac{d^x.e^{\beta y}}{dy^x}$, e questo sarà un integrale particolare della proposta.

Per dedurne l' integrale completo si osservi, che ponendo nella proposta il precedente valore di z_x, essa diventerà identica. Ma, o cresca x dell' unità, o si differenzj z_x per rapporto ad y, è chiaro che in questa sostituzione si manterrà in ciascun termine inalterata la quantità $e^{\beta y}$, e solo si cangeranno i coefficienti e gli esponenti della caratteristica d. E siccome β può esser qualunque, se dopo questa sostituzione si porranno tutti i termini della equazione da una parte, svaniranno i coefficienti delle quantità $e^{\beta x}$, $\frac{d.e^{\beta y}}{dy}$, $\frac{d.^2e^{\beta y}}{dy^2}$, ec. Quindi, se nel valore di z_x in luogo di $e^{\beta y}$ si ponesse una funzione qualunque $\varphi.y$ di y, svanirebbero egualmente i coefficienti di $\varphi.y$, $\frac{d\varphi.y}{dy}$, $\frac{d^2\varphi.y}{dy^2}$, ec.,

che sarebbero quelli stessi di $e^{\beta y}$, $\frac{d.e^{\beta y}}{dy}$, ec., e l'equazione sarebbe sempre identica. Pertanto alla proposta soddisfarà il valore $z_x = A^x \varphi.y + x A^{x-1} B \frac{d\varphi.y}{dy} + \frac{x(x-1)}{2} A^{x-2} B^2 \frac{d^2\varphi.y}{dy^2}$ $\ldots + \frac{B^x d^x \varphi.y}{dy^x}$, che a motivo della funzione arbitraria $\varphi.y$ ne sarà l' integrale completo.

Abbiamo espresso α per β; se invece prenderemo il valore di β, otterremo lo stesso integrale sotto una forma molto più semplice. Sarà infatti $\beta = \frac{\alpha - A}{B}$, e quindi $z_x = \alpha^x e^{\beta y} = \alpha^x e^{[(\alpha - A):B]y}$, il qual valore si può anche esprimere così, $z_x = B^x e^{-(A:B)y} \frac{d^x.e^{\alpha y:B}}{dy^x}$; e col medesimo raziocinio si proverà, che in luogo di $e^{\alpha y:B}$ si può mettere una funzione qualunque di y. Adunque il cercato integrale sarà $z_x = B^x e^{-(A.B)y} \cdot \frac{d^x y}{dy^x}$.

30. Passiamo adesso alla equazione $z_{x+1} = A z_x + B \frac{dz_x}{dy} + C \frac{dz_{x+1}}{dy}$. Ponendo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$ avremo l'equazione $\alpha = A + B\beta + C\alpha\beta$, dalla quale si ricava $\alpha = \frac{A + B\beta}{1 - C\beta}$. Se esprimessimo, come sopra, il valore di α^x per le potenze di β, a motivo del denominatore $1 - C\beta$ avremmo una serie infinita; onde per ottenere l' integrale in termini finiti conviene in questo caso ricorrere ad altri artifizj. Facciamo $C\beta - 1 = C\gamma$, e sarà $\beta = \gamma + \frac{1}{C}$, ed $\alpha = \frac{A + B\gamma + B:C}{-C\gamma}$ $= \frac{1}{-C}\left(\frac{K}{\gamma} + B\right)$, posto $K = A + \frac{B}{C}$. Pertanto $\alpha^x e^{\beta y} =$ $\frac{1}{(-C)^x}\left(\frac{K}{\gamma} + B\right)^x e^{(\gamma + 1:C)y}$, e svolta in serie la quantità

$\left(\frac{K}{\gamma}+B\right)^x$ sarà $\alpha^x e^{\beta y}=\frac{1}{(-C)^x}e^{(\gamma+1:C)y}\left(\frac{K^x}{\gamma^x}+x\frac{K^{x-1}B}{\gamma^{x-1}}+\frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{K^{x-2}B^2}{\gamma^{x-2}}\ldots\ldots+B^x\right)$, la qual formola si può mettere sotto la forma $\frac{1}{(-C)^x}e^{(y:C)}(K^x\int^x dy^x e^{\gamma y}+xK^{x-1}B\int^{x-1}dy^{x-1}e^{\gamma y}\ldots+B^x e^{\gamma y})$. Quindi per le ragioni addotte sopra ponendo una funzione di y in luogo di $e^{\gamma y}$ avremo

$$z_x=\left\{\begin{array}{l}\frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}(K^x\int^x dy^x\varphi.y+xK^{x-1}B\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y+\\ \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y+\text{ec.})\end{array}\right\}.$$

Il segno integrale $\int^x dy^x\varphi.y$ introduce la quantità $\Psi.x+y\Psi(x-1)+\frac{y^2}{2}\Psi(x-2)+\frac{y^3}{2.3}\Psi(x-3)\ldots+\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi 1$; similmente il segno $\int^{x-1}$ porterà la quantità

$\Psi(x-1)+y\Psi(x-2)+\frac{y^2}{2}\Psi(x-3)\ldots\ldots+\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\Psi 1$;

e così in seguito. Onde l'integrale completo della proposta sarà

$$z_x=\frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}(K^x\int^x dy^x\varphi.y+xK^{x-1}B\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y\ldots+B^x\varphi.y)$$

$$+\frac{e^{(y:C)}.K^x}{(-C)^x}\left\{\begin{array}{l}\Psi.x+(y+\frac{B}{K}x)\Psi(x-1)+[\frac{y^2}{2}+\frac{B}{K}xy+\\ \frac{B^2}{K^2}.\frac{x(x-1)}{2}]\Psi(x-2)+[\frac{y^3}{2.3}+\frac{B}{K}.\frac{xy^2}{2}+\\ \frac{B^2}{K^2}.\frac{x(x-1)y}{2}+\frac{B^3}{K^3}.\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}]\Psi(x-3)\ldots\\ +[\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}+\frac{B}{K}.\frac{xy^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\ldots+\frac{B^{x-1}}{K^{x-1}}]\Psi 1.\end{array}\right\}.$$

il quale contiene due funzioni arbitrarie $\varphi.y$, e $\Psi.x$, perchè la proposta è del second' ordine.

La prima linea del valore di z_x si potrà rendere più concisa, se si pone sotto la forma

$\frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}\int^x dy^x\Big(K^x\varphi.y + xK^{x-1}B\frac{d\varphi}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots + B^x\frac{d^x\varphi}{dy^x}\Big)$. Facciamo $Q_x = K^x\varphi.y + xK^{x-1}B\frac{d\varphi}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots B^x\frac{d^x\varphi}{dy^x}$, ed avremo $Q_{x+1} = K^{x+1}\varphi.y + (x+1)K^xB\frac{d\varphi}{dy} + \frac{(x+1)x}{2}K^{x-1}B^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots\ldots + B^{x+1}\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}}$; poi $\frac{dQ_x}{dy} = K^x\frac{d\varphi}{dy} + xK^{x-1}\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots + B^x\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}}$. Quindi apparisce, che sarà $Q_{x+1} = KQ_x + B\frac{dQ_x}{dy}$, l' integrale della qual' equazione è $Q_x = B^x e^{-(K:B)y}\cdot\frac{d^x\varphi\, y}{dy^x}$. Per conseguenza in luogo della prima linea del valore di z_x si potrà sostituire la quantità $e^{(y:C)}\left(-\frac{B}{C}\right)^x\int^x dy^x\left(e^{-(K:B)y}\cdot\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}\right)$.

Se $K=0$, cioè $B=-AC$, ponendo $\Psi.x=\frac{F.x}{K^x}$ avremo $z_x = e^{(y:C)}A^x\varphi.y + \frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}\Big(F.x + BxF(x-1) + B^2\frac{x(x-1)}{2}F(x-2)\ldots\ldots + B^{x-1}xF.1\Big)$, o sia più semplicemente $z_x = A^x\varphi.y + e^{(y:C)}F.x$.

A questo integrale giungeremo subito, se osserviamo che l' equazione $\alpha = A + B\beta + C\alpha\beta$ diventa in questo caso della forma $(\alpha - A)(1 - C\beta) = 0$, onde si deduce o $\alpha = A$ e β qualunque, o $\beta = \frac{1}{C}$ ed α qualunque. Quindi $A^x e^{\beta y}$, e $e^{(y:C)}.\alpha^x$ soddisfaranno alla proposta. Ma in luogo di $e^{\beta y}$ possiamo porre una funzione qualunque di y, e così pure una funzione qualunque di x in luogo di α^x; poichè il valore $e^{(y:C)}.\alpha^x$ sostituito nella proposta In luogo di z_x la

renderà identica; e perciò, posti tutti i termini da una parte e dall' altra zero, saranno dopo questa sostituzione eguali a zero i coefficienti di α^x e di α^{x+1}, a motivo di α qualunque. Ora se invece di α^x prendiamo $\Psi.x$, e sostituiamo $e^{(y:C)}\Psi.x$ in luogo di z_x, saranno i coefficienti di $\Psi.x$ e $\Psi.(x+1)$ quei medesimi, che prima erano di α^x e di α^{x+1}, cioè eguali a zero. Pertanto soddisfaranno alla proposta i due valori $A^x\varphi.y$, ed $e^{(y:C)}\Psi.x$ di z_x, e siccome la proposta è lineare, soddifarà ancora $z_x = A^x\varphi.y + e^{(y:C)}\Psi x$, e ne sarà l' integrale completo, perchè comprende le due funzioni arbitrarie $\varphi.y$ e $\Psi.x$.

31. L' equazioni degli ordini superiori si potranno facilmente integrare, se dopo di avervi sostituito $\alpha^x e^{\beta y}$ in luogo di z_x, l' equazione, che ne nasce tra α e β, sarà risolubile in fattori della forma $\alpha - p - q\beta = 0$, o pure $\alpha - p - q\beta - r\alpha\beta = 0$. Ciascuno di questi fattori ci darà un valore particolare di z_x, e la somma di tutti l' integrale completo della proposta. A render ciò evidente consideriamo l' equazione del second' ordine $z_{x+2} + Az_{x+1} + Bz_x + C\frac{dz_x}{dy} + D\frac{dz_{x+1}}{dy} + E\frac{d^2z_x}{dy^2} = 0$, la quale posto $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$ ci dà tra α e β l' equazione $\alpha^2 + A\alpha + B + C\beta + D\alpha\beta + E\beta^2 = 0$. Se il primo membro di questa equazione è risolubile ne' due fattori $\alpha - p - q\beta$, $\alpha - p' + q'\beta$, è chiaro che ad essa si potrà dar la forma seguente $\alpha^2 - p\alpha + q\alpha\beta - p'(\alpha - p - q\beta) - q'(\alpha\beta - p\beta - q\beta^2) = 0$. Quindi l' equazione proposta sarà della forma $z_{x+2} - pz_{x+1} - q\frac{dz_{x+1}}{dy} - p'\left(z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy}\right) - q'\left(\frac{dz_{x+1}}{dy} - p\frac{dz_x}{dy} - q\frac{d^2z_x}{dy^2}\right) = 0$, ed è evidente, che ad essa soddisfà l' equazione $z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy} = 0$, cioè integrando $z_x = q^x e^{(-p:q)y}.\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}$. Nella stessa maniera si proverà, che alla proposta soddisfà l' equazione $z_{x+1} - p'z_x - q'\frac{dz_x}{dy} = 0$, e quindi $z_x = q'^x.e^{-(p':q')y}.\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$. Onde, siccome

la proposta è lineare, l' integrale sarà $z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \varphi . y}{dy^x}$ $+ q'^x e^{-(p':q')y} . \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x}$. L' istesso discorso si applica a qualunque altra equazione di una simile forma.

32. Negli stessi casi si potrà trovare l' integrale di quest' equazioni, anche quando il secondo membro, invece di esser zero, sarà una funzione qualunque P di x ed y. Infatti ponendo (a) $z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy} = X_x$, l' equazione per esempio del second' ordine, che abbiamo considerata nel n.° antecedente, diventerà $X_{x+1} - p'X_x - q'\frac{dX_x}{dy} = P$; la quale integrata ci darà (5)

$$X_x = q'^x e^{-(p':q')y} . \frac{d^x \Sigma q'^{-x-1} \int^{x+1} dy^{x+1} . P e^{(p':q')y}}{dy^x}.$$

Trovato X_x avremo dalla equazione (a)

$$z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \Sigma q^{-x-1} \int^{x+1} dy^{x+1} . X_x e^{(p:q)y}}{dy^x}.$$

Se p e q sono in ambedue i fattori i medesimi, sostituendo nel valore di z_x quello di X_x avremo

$$z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \Sigma^2 q^{-x-2} \int^{x+2} dy^{x+2} . P e^{(p:q)y}}{dy^x}.$$

Il medesimo metodo riuscirà in tutte l' equazioni di una simile forma; e nel caso che tutti i fattori $\alpha - p - p\beta$, $\alpha - p' - q'\beta$, &c. siano eguali, otterremo generalmente

$$z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \Sigma^n q^{-x-n} \int^{x+n} dy^{x+n} . P e^{(p:q)y}}{dy^x},$$ essendo n l' ordine della equazione.

33. Se l' equazione in α e β non è risolubile in fattori di primo grado, con i metodi conosciuti potremo esprimere la quantità α^x in una serie ascendente ordinata per le potenze di β di questa forma $\alpha^x = M\beta^{mx} + M'\beta^{mx+m'} + M''\beta^{mx+m''} +$ ec.; e col medesimo raziocinio usato di sopra ne dedurremo il valore particolare di z_x; cioè

$$z^x = M \frac{d^{mx} \varphi . y}{dy^{mx}} + M' \frac{d^{mx+m'} \varphi . y}{dy^{mx+m'}} + M'' \frac{d^{mx+m''} \varphi . y}{dy^{mx+m''}} + \text{ec.}$$

Ma siccome abbiamo tante serie per esprimere α^x, quanto è il grado dell' equazione in α e β, o sia quanto è l'ordine della equazione proposta tra z_x e le sue differenze, otterremo altrettanti valori particolari di z_x, e la somma di tutti ci darà l' integrale completo della proposta.

Se per le condizioni del problema le funzioni arbitrarie $\varphi.y$, &c. fossero funzioni intere, le serie in tal caso si terminerebbero, ed avremmo l' integrale espresso in un numero finito di termini. Eccettuato questo caso l' integrale ottenuto in tal modo sarà composto d' infiniti termini, e per averlo sotto una forma finita converrà ricorrere ad un altro metodo, che adesso son per esporre.

34. Sia adunque proposta l' equazione generale del second'ordine $z_{x+2} = Az_{x+1} + Bz_x + C\frac{dz_{x+1}}{dy} + D\frac{dz_x}{dy} + E\frac{d^2z_x}{dy^2}$. Se ponghiamo $z_1 = \varphi.y$, e $z_0 = \varphi'.y$, facendo $x = 0$ avremo $z_2 = A\varphi.y + C\frac{d\varphi}{dy} + B\varphi'.y + D\frac{d\varphi'}{dy} + E\frac{d^2\varphi'}{dy^2}$. Similmente ponendo $x = 1$ otterremo $z_3 = Az_2 + B\varphi.y + C\frac{dz_2}{dy} + D\frac{d\varphi}{dy} + E\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, e sostituendovi il valore di z_2 avremo il valore di z_3 della forma seguente $z_3 = a\varphi.y + a'\frac{d\varphi}{dy} + a''\frac{d^2\varphi}{dy^2} + b\varphi'.y + b'\frac{d\varphi'}{dy} + b''\frac{d^2\varphi'}{dy^2} + b'''\frac{d^3\varphi}{dy^3}$. Continuando ad operare nella medesima maniera troveremo il valore di z_x così espresso; $z_x = a_{0,x}\varphi.y + a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2} \ldots\ldots + a_{x-1,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-1}} + b_{0,x}\varphi'.y + b_{1,x}\frac{d^2\varphi'}{dy} + b_{2,x}\frac{d^2\varphi'}{dy^2} \ldots\ldots + b_{x,x}\frac{d^x\varphi'}{dy^x}$, che sarà l' integrale completo della proposta.

Per determinare i coefficienti $a_{0,x}$, $b_{0,x}$, ec. ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ed avremo $\varphi.y = z_1 = \alpha e^{\beta y}$; $\varphi'.y = z_0 = e^{\beta y}$; e quindi (a) $\alpha^x = a_{0,x}.\alpha + a_{1,x}.\alpha\beta + a_{2,x}.\alpha\beta^2 \ldots\ldots + a_{x-1,x}.\alpha\beta^{x-1} + b_{0,x} + b_{1,x}.\beta + b_{2,x}.\beta^2 + b_{3,x}.\beta^3 \ldots\ldots + b_{x,x}.\beta^x$; e tra α e β avrà luogo l' equazione (b) $\alpha^2 = A\alpha + B + C\alpha\beta + D\beta + E\beta^2$. Quindi apparisce, che l' equazione (a) si otterrà, se nella quantità α^x si porrà finchè si

può il valore di α^2 ricavato dalla equazione (b), e nella quantità che ne risulta, si sostituirà, finchè è possibile, il medesimo valore di α^2, e così in seguito. Posto ciò mettiamo nella equazione (a) $x+1$ in luogo di x, ed avremo (c) $\alpha^{x+1} = a_{0,x+1}.\alpha + a_{1,x+1}.\alpha\beta + a_{2,x+1}.\alpha\beta^2 + a_{3,x+1}.\alpha\beta^3 +$ &c. $+ b_{0,x+1} + b_{1,x+1}.\beta + b_{2,x+1}.\beta^2 + b_{3,x+1}.\beta^3 +$ &c. Ma il valore di α^{x+1} si può ottenere in altra maniera, se quello di α^x si moltiplica per α, e fatto ciò si troverà $\alpha^{x+1} = a_{0,x}.\alpha^2 + a_{1,x}.\alpha^2\beta + a_{2,x}.\alpha^2\beta^2 + a_{3,x}.\alpha^2\beta^3 +$ &c. $+ b_{0,x}.\alpha + b_{1,x}.\alpha\beta + b_{2,x}.\alpha\beta^2 + b_{3,x}.\alpha\beta^3 +$ &c. Se in questa quantità in luogo di α^2 si sostituisce il suo valore preso dalla equazione (b), si avrà (d) $\alpha^{x+1} = (A + C\beta)(a_{0,x}.\alpha + a_{1,x}.\alpha\beta + a_{2,x}.\alpha\beta^2 +$ &c.$) + (B + D\beta + E\beta^2)(a_{0,x} + a_{1,x}.\beta + a_{2,x}.\beta^2 +$ &c.$) + b_{0,x}.\alpha + b_{1,x}.\alpha\beta + b_{2,x}.\alpha\beta^2 + b_{3,x}.\alpha\beta^3 +$ &c. Siccome le due equazioni (c) e (d) devono essere identiche, se paragoniamo i coefficienti di α, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$, &c., avremo $a_{0,x+1} = Aa_{0,x} + b_{0,x}$; $a_{1,x+1} = Aa_{1,x} + Ca_{0,x} + b_{1,x}$; e generalmente (e) $a_{n,x+1} = Aa_{n,x} + Ca_{n-1,x} + b_{n,x}$; per mezzo della qual' equazione otterremo il valore di $b_{n,x}$, subito che conosceremo quello di $a_{n,x}$.

Se paragoniamo ancora i coefficienti di β^0, β, β^2, &c. troveremo $b_{0,x+1} = Ba_{0,x}$; $b_{1,x+1} = Ba_{1,x} + Da_{0,x}$; $b_{2,x+1} = Ba_{2,x} + Da_{1,x} + Ea_{0,x}$; e generalmente $b_{n,x+1} = Ba_{n,x} + Da_{n-1,x} + Ea_{n-2,x}$. Ponghiamo in quest' equazioni il valore di $b_{n,x}$ ricavato dalla equazione (e), ed avrassi $a_{0,x+2} = Aa_{0,x+1} + Ba_{0,x}$; $a_{1,x+2} = Aa_{1,x+1} + Ba_{1,x} + Ca_{0,x+1} + Da_{0,x}$, (f) $a_{n,x+2} = Aa_{n,x+1} + Ba_{n,x} + Ca_{n-1,x+1} + Da_{n-1,x} + Ea_{n-2,x}$; le quali tre equazioni sono tutte comprese nella terza, come apparisce dall' osservare che $a_{n,x}$ è zero, quando n è un numero negativo.

Pertanto l' integrazione della proposta equazione a differenze finite e infinitesime è ridotta alla integrazione della equazione (f) a differenze finite. Le due funzioni arbitrarie $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, che porterà l' integrazione di questa equazione, son tali, che $a_{n,0}$ è sempre $= 0$, ed $a_{n,1}$ è sempre $= 0$, fuorchè nel caso di $n = 0$, in cui è $= 1$: le funzioni $a_{0,x}$, $a_{1,x}$ son date dall' equazioni $a_{0,x+2} = Aa_{0,x+1} + Ba_{0,x}$; $a_{1,x+2} = Aa_{1,x+1} + Ba_{1,x} + Ca_{0,x+1} + Da_{0,x}$.

Del resto per trovare i coefficienti $a_{0,x}$, $b_{0,x}$, &c. si possono usare altri metodi, e a quest' oggetto si consulti

una

una eccellente Memoria del Sommo Geometra *Lagrange* sulla integrazione dell' equazioni a differenze finite inserita tra quelle dell' Accademia di Berlino dell' anno 1775. Solo si osservi, che questi metodi possono alquanto semplicizzarsi per la riflessione, che abbiamo fatta di sopra, cioè che il valore di $b_{n,x}$ è noto in generale, subito che si conosce quello di $a_{n,x}$.

35. Il metodo precedente non può adoprarsi, quando nella proposta manca il termine z_{x+2}. Per trovar l' integrale in tal caso, mettiamo la proposta sotto la forma $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} = Bz_x + C\frac{dz_x}{dy} + D\frac{d^2z_x}{dy^2}$, e facciamo $z_x = e^{my}.z'_x$, essendo m una quantità costante. Sostituito questo valore l' equazione diventerà $(1 + Am)z'_{x+1} + A\frac{dz'_{x+1}}{dy} = (B + Cm + Dm^2)z'_x + (C + 2Dm)\frac{dz_x}{dy} + D\frac{d^2z'_x}{dy^2}$. Ora potremo togliere il primo termine con fare $1 + Am = 0$, cioè $m = -\frac{1}{A}$, ed avremo $\frac{dz'_{x+1}}{dy} = B1z'_x + C1\frac{dz'_x}{dy} + D1\frac{d^2z'_x}{dy^2}$; nella qual formola sarà $B1 = \frac{B + Cm + Dm^2}{A}$, $C1 = \frac{C + 2Dm}{A}$, $D1 = \frac{D}{A}$. Ponghiamo adesso $z'_x = \int^x dy^x z''_x$, ed otterremo $z''_{x+1} = B1z'_x + C1\frac{dx''_x}{dy} + D1\frac{d^2z''_x}{dy^2}$. Per integrar questa equazione facciamo $z''_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ed avremo $\alpha = B1 + C1\beta + D1\beta^2$, e quindi $\alpha^x = (B1 + C1\beta + D1\beta^2)^x$, la qual quantità evolta secondo le potenze di β ci darà una formola della forma seguente, $\alpha^x = a_{0,x} + a_{1,x}.\beta + a_{2,x}.\beta^2 \ldots\ldots + a_{2x,x}.\beta^{2x}$. Di qui usando i precedenti ragionamenti dedurremo il valore di z''_x così espresso, $z''_x = a_{0,x}\varphi.y + a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2} \ldots + a_{2x,x}\frac{d^{2x}\varphi}{dy^{2x}}$; ove $\varphi.y$ è una funzione arbitraria di y. Ora essendo $z'_x = \int^x dy^x z''$, sarà $z'_x = a_{0,x}\int^x dy^x\varphi.y +$

$$a_{1,x}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y \ldots a_{x-1,x}\int dy\varphi.y + a_{x,x}\varphi.y + a_{x+1,x}.\frac{d\varphi}{dy} +$$

$$a_{x+2,x}.\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots + a_{2x,x}.\frac{d^x\varphi}{dy^x} + a_{0,x}\Psi.x + (ya_{0,x} + a_{1,x})\Psi(x-1)$$

$$+\left(\frac{y^2}{2}a_{0,x} + ya_{1,x} + a_{2,x}\right)\Psi(x-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{y^{x-1}}{2.3..(x-1)}a_{0,x} + \frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}a_{1,x}\ldots + a_{x-1,x}\right)\Psi.1;$$

e se questo valore lo moltiplichiamo per $e^{my} = e^{-(1:A)y}$, otterremo l' integrale completo della proposta equazione.

Nel caso di $A = 0$ il valore di z_x si troverà di una forma simile a quello di z''_x, e siccome non conterrà che una funzione arbitraria, sarà un integrale particolare. Nè si vede, come in tal caso possa esprimersi in termini finiti l' integrale completo della proposta.

36. Passiamo all' equazione del terz' ordine $z_{x+3} = Az_{x+2} + B\frac{dz_{x+2}}{dy} + Cz_{x+1} + D\frac{dz_{x+1}}{dy} + E\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2} + Fz_x + G\frac{dz_x}{dy} + H\frac{d^2z_x}{dy^2} + I\frac{d^3z_x}{dy^3}$. Se ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$, avremo tra α e β l' equazione (a) $\alpha^3 = A\alpha^2 + B\alpha^2\beta + C\alpha + D\alpha\beta + E\alpha\beta^2 + F + G\beta + H\beta^2 + I\beta^3$. Si sviluppi il vare di α^x in una formola della forma $\alpha_x = a_{0,x}.\alpha^2 + a_{1,x}.\alpha^2\beta + a_{2,x}.\alpha^2\beta^2 \ldots\ldots + a_{x-2,x}.\alpha^2\beta^{x-2} + b_{0,x}.\alpha + b_{1,x}.\alpha\beta + b_{2,x}.\alpha\beta^2 \ldots + b_{x-1,x}.\alpha\beta^{x-1} + c_{0,x} + c_{1,x}.\beta + c_{2,x}.\beta^2 \ldots\ldots + c_{x,x}.\beta^x$; e col ragionamento usato di sopra si dimostrerà l' integrale completo della proposta essere $z_x =$

$$a_{0,x}\varphi.y + a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots\ldots + a_{x-2,x}\frac{d^{x-2}\varphi}{dy^{x-2}}$$

$$+ b_{0,x}\varphi'.y + b_{1,x}\frac{d\varphi'}{dy} + b_{2,x}\frac{d^2\varphi'}{dy^2}\ldots\ldots + b_{x-1,x}\frac{d^{x-1}\varphi'}{dy^{x-1}}$$

$$+ c_{0,x}\varphi''.y + c_{1,x}\frac{d\varphi''}{dy^2} + c_{2,x}\frac{d^2\varphi''}{dy^2}\ldots\ldots + c_{x,x}\frac{d^x\varphi''}{dy^x};$$

ove $\varphi.y$, $\varphi'.y$, $\varphi''.y$ sono tre funzioni arbitrarie di y, cioè $\varphi.y = z_2$; $\varphi'.y = z_1$; $\varphi''.y = z_0$.

Nel valore di a^x ponendo $x+1$ in luogo di x avremo

$$\alpha^{x+1} = a_{0,x+1}\alpha^2 + a_{1,x+1}\alpha^2\beta + a_{2,x+1}\alpha^2\beta^2 + a_{3,x+1}\alpha^2\beta^3 + \text{ec.}$$
$$+ b_{0,x+1}\alpha + b_{1,x+1}\alpha\beta + b_{2,x+1}\alpha\beta^2 + b_{3,x+1}\alpha\beta^3 + \text{ec.}$$
$$+ c_{0,x+1} + c_{1,x+1}\beta + c_{2,x+1}\beta^2 + c_{3,x+1}\beta^3 + \text{ec.}$$

Ma in altra forma ancora otterremo α^{x+1}, se moltiplicheremo α^x per α, e poi in luogo di α^3 vi porremo il suo valore dedotto dalla equazione (a); e fatto ciò avremo

$$\alpha^{x+1} = (A + B\beta)(a_{0,x}\alpha^2 + a_{1,x}\alpha^2\beta + a_{2,x}\alpha^2\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ (C + D\beta + E\beta^2)(a_{0,x}\alpha + a_{1,x}\alpha\beta + a_{2,x}\alpha\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ (F + G\beta + H\beta^2 + I\beta^3)(a_{0,x} + a_{1,x}\beta + a_{2,x}\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ b_{0,x}\alpha^2 + b_{1,x}\alpha^2\beta + b_{2,x}\alpha^2\beta^2 + b_{3,x}\alpha^2\beta^3 + \text{ec.}$$
$$+ c_{0,x}\alpha + c_{1,x}\alpha\beta + c_{2,x}\alpha\beta^2 + c_{3,x}\alpha\beta^3 + \text{ec.}$$

Se adesso in questi due valori di α^{x+1} si paragonano i coefficienti di α^2, $\alpha^2\beta$, $\alpha^2\beta^2$, ec., si troverà $a_{0,x+1} = Aa_{0,x} + b_{0,x}$; $a_{1,x+1} = Aa_{1,x} + Ba_{0,x} + ba_{1,x}$; e generalmente $a_{n,x+1} = Aa_{n,x} + Ba_{n-1,x} + ba_{n,x}$; per mezzo della qual' equazione conosciuto $a_{n,x}$ si avrà subito $b_{n,x}$.

Paragonando i coefficienti di α, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$, &c. avremo $b_{0,x+1} = Ca_{0,x} + c_{0,x}$; $b_{1,x+1} = Ca_{1,x}\, Da_{0,x} + c_{1,x}$; $b_{2,x+1} = Ca_{2,x} + Da_{1,x} + Ea_{0,x} + c_{2,x}$; $b_{n,x+1} = Ca_{n,x} + Da_{n-1,x} + Ea_{n-2,x} + c_{n,x}$; nella qual'equazione se sostituiamo il valore di $b_{n,x}$ trovato di sopra avremo $c_{n,x} = a_{n,x+2} - Aa_{n,x+1} - Ba_{n-1,x+1} - Ca_{n,x} - Da_{n-1,x} - Ea_{n-2,x}$, e quindi conosciuto $a_{n,x}$ si avrà anche $c_{n,x}$.

Paragoniamo finalmente i coefficienti di β^0, β, β^2, ec., e troveremo $c_{0,x+1} = Fa_{0,x}$; $c_{1,x+1} = Fa_{1,x} + Ga_{0,x}$; $c_{2,x+1} = Fa_{2,x} + Ga_{1,x} + Ha_{0,x}$; $c_{3,x+1} = Fa_{3,x} + Ga_{2,x} + Ha_{1,x} + Ia_{0,x}$; e generalmente $c_{n,x+1} = Fa_{n,x} + Ga_{n-1,x} + Ha_{n-2,x} + Ia_{n-3,x}$. Si sostituisca in quest' equazioni il valore di $c_{n,x}$, ed avrassi

(b) $a_{0,x+3} = Aa_{0,x+2} + Ca_{0,x+1} + Fa_{0,x}$;

(c) $a_{1,x+3} = Aa_{1,x+2} + Ba_{0,x+2} + Ca_{1,x+1} + Da_{0,x+1} + Fa_{1,x} + Ga_{0,x}$;

(d) $a_{2,x+3} = Aa_{2,x+2} + Ba_{1,x+2} + Ca_{2,x+1} + Da_{1,x+1} + Ea_{0,x+1} + Fa_{2,x}\, Ga_{1,x} + Ha_{0,2}$;

(e) $a_{n,x+3} = Aa_{n,x+2} + Ba_{n-1,x+2} + Ca_{n,x+1} + Da_{n-1,x+1} + Ea_{n-2,x+1} + Fa_{n,x} + Ga_{n-1,x} + Ha_{n-2,x} + Ia_{n-3,x}$.

Le quali equazioni sono tutte comprese nella (e), giacchè $a_{n,x}$ è $= 0$, quando n è negativa.

La ricerca pertanto di $a_{n,x}$ dipende dalla integrazione della equazione (e) a differenze finite. E qui si osservi, che le funzioni arbitrarie $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, $a_{n,2}$, che porterà questa

integrazione son date in modo, che $a_{n,0}$ ed $a_{n,1}$ sono sempre eguali a zero; $a_{n,2}$ è $=1$ nel solo caso di $n=0$, negli altri è sempre $=0$. Le funzioni $a_{0,x}$, $a_{1,x}$, $a_{2,x}$ sono date dall'equazioni (*b*), (*c*), (*d*), che essendo a differenze finite tra due sole variabili non presentano alcuna difficoltà per la loro integrazione. Ad oggetto di conoscere altri metodi per determinare $a_{n,x}$ si consulti la lodata Memoria di *Lagrange*.

37. Se manca il termine z_{x+3}, l' equazione precedente potrà mettersi sotto la forma $z_{x+2} + A\frac{dz_{x+2}}{dy} = Bz_{x+1} + C\frac{dz_{x+1}}{dy} + D\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2} + Ez_x + F\frac{dz_x}{dy} + G\frac{d^2z_x}{dy^2} + H\frac{d^3z_x}{dy^3}$. Ponghiamo $z_x = e^{-y:A}.z'_x$, ed avremo $\frac{dz'_{x+2}}{dy} = B_1z'_{x+1} + C_1\frac{dz'_{x+1}}{dy} + D_1\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2} + E_1z'_x$ $F_1\frac{dz'_x}{dy} + G_1\frac{d^2z'_x}{dy^2} + H_1\frac{d^3z'_x}{dy^3}$; ove $B_1 = \frac{B}{A} - \frac{C}{A^2} + \frac{D}{A^3}$, $C_1 = \frac{C}{A} - \frac{2D}{A^2}$, $D_1 = \frac{D}{A}$, $E_1 = \frac{E}{A} - \frac{F}{A^2} + \frac{G}{A^3} - \frac{H}{A^4}$, $F_1 = \frac{F}{A} - \frac{2G}{A^2} + \frac{3H}{A^3}$, $G_1 = \frac{G}{A} - \frac{3H}{A^2}$, $H_1 = \frac{H}{A}$. Se adesso facciamo $z'_x = \alpha^x e^{\beta y}$, avremo tra α e β l'equazione $\alpha^2\beta = B_1\alpha + C_1\alpha\beta + D_1\alpha\beta^2 + E_1 + F_1\beta + G_1\beta^2 + H_1\beta^3$. Mediante questa equazione se svolgeremo la quantità α^x in una formola della forma

$$\alpha^x = \frac{a_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}} + \frac{a_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}} \ldots + a_{x-1,x}.\alpha + a_{x,x}.\alpha\beta \ldots + a_{2x-2,x}.\alpha\beta^{x-1}$$
$$+ \frac{b_{0,x}}{\beta^{x-1}} + \frac{b_{1,x}\alpha}{\beta^{x-2}} \ldots + b_{x-1,x} + b_{x,x}.\beta \ldots + b_{2x-1,x}.\beta^x$$

otterremo l' integrale della proposta così espresso;

$$z'_x = a_{0,x}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y + a_{1,x}\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y \ldots + a_{x-2,x}\int dy\,\varphi.y$$
$$+ a_{x-1,x}\varphi.y + a_{x,x}\frac{d\varphi}{dy} \ldots\ldots\ldots + a_{2x-2,x}.\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-1}}$$
$$+ b_{0,x}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi'.y + b_{1,x}\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi'.y \ldots + b_{x-2,x}\int dy\,\varphi'.y$$
$$+ b_{x-1,x}\varphi'.y + b_{x,x}\frac{d\varphi'}{dy} \ldots\ldots\ldots + b_{2x-1,x}\frac{d^x\varphi'}{dy^x}.$$

Questo integrale non sembra completo, perchè contiene due sole funzioni arbitrarie $\varphi.y$ e $\varphi'.y$. Ma è da notarsi, che i segni sommatorj introdurranno un' altra funzione arbitraria di x, e si dovrà aggiungere al valore precedente di z'_x la formola seguente

$$\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\Psi_{1,x}+\frac{y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)}\Psi_{2,x}\ldots+y\Psi_{x-2,x}+\Psi_{x-1,x}.$$

Delle funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$, ec. una sola dev' essere arbitraria, e per determinar le altre si sostituirà nella equazione data la formola precedente in luogo di z'_x, e dal paragone de' diversi termini si dedurrà la relazione che deve aver luogo tra le medesime funzioni.

38. Sia data per esempio l' equazione $z_{x+2}+A\frac{dz_{x+2}}{dy}=Bz_{x+1}+Ez_x$; la quale posto $z_x=e^{-y:A}z'_x$, e $B1=\frac{B}{A}$, $E1=\frac{E}{A}$ si cangia nella seguente $\frac{dz'_{x+2}}{dy}=B1z'_{x+1}+E1z'_x$. Se facciamo $z'_x=\alpha^x e^{\beta y}$, avremo tra α e β l' equazione $\alpha^2=\frac{B1\alpha}{\beta}+\frac{E1}{\beta}$, mediante la quale svolgeremo la quantità α^x in una formola della forma seguente

$$\alpha^x=\frac{a_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\frac{a_{2,x}.\alpha}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}}{\beta^{x-2}}+\frac{b_{2,x}}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$

Ponghiamo in questa formola $x+1$ in luogo di x, ed avremo

$$\alpha^{x+1}=\frac{a_{0,x+1}.\alpha}{\beta^x}+\frac{a_{1,x+1}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{2,x+1}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x+1}}{\beta^x}+\frac{b_{1,x+1}}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{2,x+1}}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$

Per ottenere un' altro valore di α^{x+1} moltiplichiamo quello di α^x per α, e sarà

$$\alpha^{x+1}=\frac{a_{0,x}.\alpha^2}{b^{x-1}}+\frac{a_{1,x}.\alpha^2}{\beta^{x-2}}+\frac{a_{2,x}.\alpha^2}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\frac{b_{2,x}.\alpha}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$

e se in luogo di α^2 vi si sostituisce il suo valore $\frac{B1\alpha}{\beta}+\frac{E1}{\beta}$,

$$\text{sarà } \alpha^{x+1} = \frac{B1a_{0,x}.\alpha}{\beta^x}+\frac{B1a_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{B1a_{2,x}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{E1a_{0,x}}{b^x}+\frac{E1a_{1,x}}{\beta^{x-1}}+\frac{E1a_{2,x}}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$

Questo valore di α^{x+1} dovendo essere identico col primo trovato, avremo dal paragone de' termini simili $b_{n,x+1}=E1a_{n,x}$; cioè conosciuto $a_{n,x}$ sarà $b_{n,x}=E1a_{n,x-1}$. Sarà inoltre $a_{0,x+1}=B1a_{0,x}$; $a_{n,x+1}=Ba_{n,x}+b_{n-1,x}$; e sostituendovi il valore di $b_{n,x}$, $a_{n,x+1}=B1a_{n,x}+E1a_{n-1,x-1}$. Prima d' integrare questa equazione si osservi, che la funzione $a_{n,x}$ è tale, che $a_{1,2}=0$, $a_{2,3}=0$, $a_{3,4}=0$, e generalmente $a_{n,n+1}=0$, eccettuato il solo caso di $n=0$ in cui è $=1$. Posto ciò facciamo $a_{n,x}=B1^x c_{n,x}$, e sarà

$$c_{0,x+1}=c_{0,x};\ c_{n,x+1}=c_{n,x}+\frac{E1}{B1^2}c_{n-1,x-1}.$$

Da questa si ricava $c_{n,x}=\frac{E1}{B1^2}\Sigma c_{n-1,x-1}$, e sostituendo nel secondo membro di questa equazione il valore di $c_{n-1,x-1}$ dedotto dalla medesima, e così in seguito, giungeremo all' equazione $c_{n,x}=\frac{E1^n}{B1^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x-n}$, cioè $c_{n,x+n}=\frac{E1^n}{B1^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x}$; e posto $x-1$ in luogo di x, $c_{n,x+n+1}=\frac{E1^n}{B^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x+1}$; onde si deduce $c_{n,x+n}=\frac{E1^n}{B1^{2n}}\Sigma^{n+1}.(c_{0,x+1}-c_{0,x})$. Ma poichè $c_{0,x+1}-c_{0,x}=0$, avremo $c_{n,x+n}=\frac{E1^n}{B1^{2n}}\Big(\Psi(n+1)+(x-1)\Psi.n$

$$+\frac{(x-1)(x-2)}{2}\Psi(n-1)\ldots+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{2.3\ldots n}\Psi.1\Big).$$

Sarà pertanto, posto $x-n$ in luogo di x e in luogo di $c_{n,x}$ il suo valore, $a_{n,x}=$

$$B1^{x-2n}.E1^n\left\{\begin{array}{l}\Psi(n+1)+(x-n-1)\Psi.n+\frac{(x-n-1)(x-n-2)}{2}\Psi(n-1)\\ \ldots+\frac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n)}{2.3\ldots\ldots n}\Psi.1\end{array}\right\}.$$

Per determinare la funzione arbitraria $\Psi.n$ facciamo $x=n+1$, ed otterremo $\Psi(n+1)=\frac{B1^{n-1}}{E1^{n}}a_{n,x+1}$. Ma $a_{n,x+1}=0$, fuorchè nel caso di $n=0$; dunque sarà $\Psi.n=0$ eccettuato il caso di $n=1$, in cui è $\Psi.1=\frac{1}{B1}$. Dunque avremo finalmente

$$a_{n,x}=B1^{x-2n-1}.E1^{n}.\frac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ n}.$$

E siccome $b_{n,x}=E1a_{n,x-2}$, sarà

$$b_{n,x}=B1^{x-2n-2}.E1^{n+1}.\frac{(x-n-2)(x-n-3)\ldots(x-2n-1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ n}$$

Avremo pertanto nel caso di x pari, $z_x=$

$$e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{aligned}&B1^{x-1}\textstyle\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y+B1^{x-3}.E1(x-2)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y\\&+B1^{x-5}.E1^{2}\frac{(x-3)(x-4)}{2}\textstyle\int^{x-3}dy^{x-3}\varphi.y\ \ldots\ldots\ldots\\&+B1^{3}.E1^{(x-4):2}.\frac{(x+2)x(x-2)}{2^{4}.3}\textstyle\int^{(x+2):2}dy^{(x+2):2}\\&+B1.E1^{(x-2):2}.\frac{x}{2}\textstyle\int^{x:2}dy^{x:2}\varphi.y\end{aligned}\right.$$

$$+e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{aligned}&B1^{x-2}.E1\textstyle\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi'.y+B1^{x-4}.E1^{2}(x-3)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi'.y\\&+B1^{x-6}.E1^{3}\frac{(x-4)(x-5)}{2}\textstyle\int^{x-3}dy^{x-3}\varphi'.y\ \ldots\ldots\\&+B1^{2}.E1^{(x-2):2}\frac{x(x-2)}{2^{3}}\textstyle\int^{(x+2):2}dy^{(x+2):2}\varphi'.y\\&+E1^{x:2}\textstyle\int^{x:2}dy^{x:2}\varphi'y.\end{aligned}\right.$$

E nel caso di x dispari, $z_x=$

$$e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{aligned}&B1^{x-1}\textstyle\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y+B1^{x-3}.E1(x-2)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y\\&\ldots\ldots+B1^{2}.E1^{(x-3):2}.\frac{(x+1)(x-1)}{2^{3}}\textstyle\int^{(x+1):2}dy^{(x+1):2}\varphi.y\\&+E1^{(x-1):2}\textstyle\int^{(x-1):2}dy^{(x-1):2}\varphi.y\end{aligned}\right.$$

$$+e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{aligned}&B1^{x-2}\textstyle\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi'.y+B1^{x-4}.E1^{2}(x-3)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi'.y\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+B1^{3}.E1^{(x-3):2}.\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{2^{4}.3}\textstyle\int^{(x+3):2}dy^{(x+3):2}\varphi'.y\\&+B1.E1^{(x-1):2}.\frac{x-1}{2}\textstyle\int^{(x+1):2}dy^{(x+1):2}\varphi'.y.\end{aligned}\right.$$

Rimane adesso a determinare le funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$ ec. nella quantità

$$\frac{y^{x-2}}{2.3..(x-2)}\Psi_{1,x} + \frac{y^{x-3}}{2.3..(x-3)}\Psi_{2,x} \ldots + y\Psi_{x-2,x} + \Psi_{x-1,x},$$

che conviene aggiungere al valore di z'_x, perchè questo diventi l'integrale completo della proposta. A quest' oggetto si sostituisca quella quantità in luogo di z'_x nella equazione $\frac{dz'_{x+2}}{dy} = B1z'_{x+1} + E1z'_x$, ed avrassi

$$o = \frac{y^{x-1}}{2.3...(x-1)}\Psi_{1,x+2} + \frac{y^{x-2}}{2...(x-2)}\Psi_{2,x+2}$$
$$+ \frac{y^{x-3}}{2...(x-3)}\Psi_{3,x+2} + \text{ec.} + \frac{y^{x-1}}{2.3...(x-1)}B1\Psi_{1,x+2}$$
$$+ \frac{y^{x-2}}{2...(x-2)}B1\Psi_{2,x+1} + \frac{y^{x-3}}{2...(x-3)}B1\Psi_{3,x+1} + \text{ec.}$$
$$+ \frac{y^{x-2}}{2...(x-2)}E1\Psi_{1,x} + \frac{y^{x-3}}{2...(x-3)}E1\Psi_{2,x} + \text{ec.}$$

e quindi $\Psi_{1,x+2} = B1\Psi_{n,x+1}$; $\Psi_{2,x+2} = B1\Psi_{2,x+1} + E1\Psi_{1,x}$; e $\Psi_{n,x+2} = B1\Psi_{n,x+1} + E1\Psi_{n-1,x}$. Pongniamo $\Psi_{n,x} = B1^{x-2n}.Z_{n,x}$, ed avremo $Z_{1,x+2} = Z_{1,x+1}$; $Z_{n,x+1} = Z_{n,x} + E1Z_{n-1,x-1}$, cioè $Z_{n,x} = E1\Sigma.Z_{n-1,x-1}$. Di qui si ricava $Z_{n,x} = E1^{n-1}\Sigma^{n-1}.Z_{1,x-n+1}$, cioè $Z_{n,x+n} = E1^{n-1}\Sigma^{n-1}.Z_{x,x+1}$, e ponendo $x+1$ in luogo di x, $Z_{n,x+n+1} = E1^{n-1}\Sigma^{n-1}.Z_{1,x+2}$, e perciò $Z_{n,x+n} = E1^{n-1}\Sigma^{n}(Z_{1,x+2} - Z_{1,x+1})$. A questo integrale, perchè sia completo, conviene aggiungere la formola $E1^{n-1}[F_n + (x-1)F_{n-1} + \frac{(x-1)(x-2)}{2}F_{n-2} \ldots\ldots + \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{2.3\ldots(n-1)}F_1]$. Ma $Z_{1,x+2} - Z_{1,x+1} = o$;

dunque avremo $\Psi_{n,x+n} = B1^{x-n}.E1^{n-1}[F_x + (x-1)F_{n-2} \ldots + \frac{(x-1)\ldots(x-n+1)}{2\ldots(n-1)}F_1]$; e quindi $\Psi_{n,x} =$

$$B1_x^{-2n}.E1^{n-1}\left\{\begin{array}{l} F_n + (x-n-1(F_{n-1} + \frac{(x-n-1)(x-n-2)}{2}F_{n-2} \\ \ldots + \frac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n+1)}{2.3\ldots\ldots(n-1)}F_1 \end{array}\right\}$$

Sa-

Sarà pertanto $\Psi_{1,x} = B1^{x-2}.F_1$; $\Psi_{2,x} = B1^{x-4}.E1(F_2 + (x-3)F_1)$; $\Psi_{3,x} = B1^{x-6}.E1^2(F_3 + (x-4)F_2 + \frac{(x-4)(x-5)}{2}F_1) \ldots\ldots$ $\Psi_{x-2,x} = B1^{-x+4}.E1^{x-3}(F_{x-2} + F_{x-3})$; $\Psi_{x-1,x} = B1^{-x+2}.E1^{x-2}.F_{x-1}$. Laonde al valore trovato precedentemente di z_x, perchè sia completo, conviene aggiungere la quantità

$$e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{array}{l} \frac{y^{x-2}}{2.3..(x-2)}B1^{x-2}F_1 + \frac{y^{x-3}}{2.3...(x-3)}B1^{x-4}E1(F_2(x-3)F_1) \\ + \frac{y^{x-4}}{2.3...(x-4)}B1^{x-6}.E1^2(F_3+(x-4)F_2+\frac{(x-4)(x-5)}{2}F_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + yB1^{-x+4}.E1^{x-3}(F_{x-2}+F_{x-3}) + B1^{-x+2}.E1^{x-2}F_{x-1} \end{array}\right.$$

la qual formola contiene la funzione arbitraria F_x.

39. Merita particolare attenzione il caso, in cui oltre il termine z_{x+3} mancano nella proposta anche gli altri due termini z_{x+2}, e $\frac{dz_{x+2}}{dy}$. L' equazione diventa allora della forma $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2} = Cz_x + C\frac{dz_x}{dy} + E\frac{d^2z_x}{dy^2} + F\frac{d^3z_x}{dy^3}$. Per trovarne l' integrale si ponga $z_x = e^{my}.z'_x$, e presa m in modo, che sia $1 + Am + Bm^2 = 0$, cioè che m sia una radice dell' equazione $1 + At + Bt^2 = 0$, la proposta diventerà $A1\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2} = C1z'_x + D1\frac{dz'_x}{dy} + E1\frac{d^2z'_x}{dy^2} + F\frac{d^3z'_x}{dy^3}$, ove $A1 = A + 2Bm$, $C1 = C + Dm + Em^2 + Fm^3$, $D1 = D + 2Em + 3Fm^2$, $E1 = E + 3Fm$. Si faccia adesso $z'_x = \int^x dy^x z''_x$, ed avrassi $A1z''_{x+1} + B\frac{dz''_{x+1}}{dy} = C1z''_x + D1\frac{dz''_x}{dy} + E1\frac{d^2z''_x}{dy^2} + F\frac{d^3z''_x}{dy^3}$.

Se di nuovo ponghiamo $z''_x = e^{ny}.z'''_x$, e prendiamo n in modo, che sia $A1 + Bn = 0$, avremo $\frac{dz'''_{x+1}}{dy} = C^2z'''_x + D2\frac{dz'''_x}{dy} + E2\frac{d^2z'''_x}{dy^2} + F2\frac{d^3z'''_x}{dy^3}$, ove

$C2 = \frac{C1 + D1n + E1n^2 + Fn^3}{B}$, $D2 = \frac{D1 + 2E1n + 3Fn^2}{B}$,
$E2 = \frac{E1 + 3Fn}{B}$, $F2 = \frac{F}{B}$. Si osservi, che nella equazione $A1 + Bn = 0$ mettendo il valore di $A1$ abbiamo $A1 + 2Bm + Bn = 0$; ora se chiamiamo m' l'altra radice della equazione $1 + At + Bt^2 = 0$, sarà $m + m' = -\frac{A}{B}$, e quindi $-m - m' + 2m + n = 0$, cioè $n = m' - m$.

Si faccia adesso $z'''_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ed avrassi $\alpha = \frac{C2}{\beta} + D2 + E2\beta + F2\beta^2$, la qual quantità inalzata alla potenza x ci darà $\alpha^x = \frac{a_{0,x}}{\beta^x} + \frac{a_{1,x}}{\beta^{x-1}} + \frac{a_{2,x}}{\beta^{x-2}} \dots\dots\dots + a_{3x,x}.\beta^{2x}$, e quindi dedurremo

$$z''_x = a_{0,x}\int^x d^x y\varphi.y + a_{1,x}\int^{x-1} dy^{x-1}\varphi.y \dots\dots + a_{x-1,x}\int dy\varphi.y$$
$$+ a_{x,x}\varphi.y + a_{x+1,x}\frac{d\varphi}{dy} \dots\dots\dots\dots + a_{3x,x}.\frac{d^{2x}\varphi}{dy^{2x}}.$$

Il segno integrale $\int^x dy^x\varphi.y$ introdurrà in questo valore una funzione arbitraria di x, ed un'altra ne porterà nel valore di z'_x il segno integrale $\int^x dy^x z''_x$; onde avrassi il valore completo di z_x con tre funzioni arbitrarie, come meglio si vedrà nell' esempio seguente.

40. Sia proposta l' equazione $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2} = Cz_x$. Se ponghiamo $z_x = e^{my}.z'_x$, $z'_x = \int^x dy^x z''_x$, $z''_x = e^{(m'-m)y}.z'''_x$, otterremo le seguenti trasformate

$$(A + 2Bm)\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2} = Cz'_x$$

$$(A + 2Bm)z''_{x+1} + B\frac{dz''_{x+1}}{dy} = Cz''_x$$

$$B\frac{dz'''_{x+1}}{dy} = Cz'''_x,$$

l'ultima delle quali integrata ci dà $z'''_x = \frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x\varphi.y$; onde avremo $z_x = e^{my}.\frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x e^{(m'-m)y}\int^x dy^x\varphi.y$.

E' facile il vedere, che questo valore di z_x si può ridurre alla forma seguente $z_x =$

$$e^{my}(M\int^x dy^x . e^{(m'-m)y} . \varphi . y + M1\int^{x-1} dy^{x-1} e^{(m'-m)y} \varphi . y + \&c.)$$
$$+ e^{m'y}(N\int^x dy^x \varphi . y + N1\int^{x-1} dy^{x-1} \varphi . y + \&c.)$$

ove i coefficienti M, N, sono funzioni di x. Onde converrà aggiungere al presente valore le quantità

$$e^{my}\left(\frac{y^{x-1}}{1 . 2 . . . (x-1)}\Psi_{1,x} + \frac{y^{x-2}}{1 . 2 . . . . (x-2)}\Psi_{2,x} . . . + \Psi_{x,x}\right),$$
$$e^{m'y}\left(\frac{y^{x-1}}{1 . 2 . . . (x-1)}\Psi'_{1,x} + \frac{y^{x-2}}{1 . 2 . . . (x-2)}\Psi'_{2,x} . . . + \Psi'_{x,x}\right).$$

Per determinare le funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$; &c. $\Psi'_{1,x}$, $\Psi'_{2,x}$ &c., sostituiamo la prima delle quantità precedenti nella proposta in luogo di z_x, e riflettendo che $1 + Am + Bm^2 = 0$ troveremo $0 = \frac{y^{x-1}}{1 . 2 . . . (x-1)}[(A + 2Bm)\Psi_{1,x+1} - C\Psi_{1,x}]$

$$+ \frac{y^{x-2}}{1 . 2 . . . (x-2)}[(A + 2Bm)\Psi_{2,x+1} - C\Psi_{2,x} - B\Psi_{1,x+1}]$$
$$+ \frac{y^{x-3}}{1 . 2 . . . (x-3)}[(A + 2Bm)\Psi_{3,x+1} - C\Psi_{3,x} - B\Psi_{2,x+1}]$$

+ ec. Quindi otterremo $(A + 2Bm)\Psi_{1,x+1} = C\Psi_{1,x}$; $(A + 2Bm)\Psi_{2,x+1} = C\Psi_{2,x} + B\Psi_{1,x+1}$; e generalmente $(A + 2Bm)\Psi_{n,x+1} = C\Psi_{n,x} + B\Psi_{n-1,x+1}$: e sostituendovi il valore di $A = - B(m + m')$ sarà $B(m - m')\Psi_{1,x+1} = C\Psi_{1,x}$; $B(m - m')\Psi_{n,x+1} = C\Psi_{n,x} + B\Psi_{n-1,x+1}$. Facciasi $\Psi_{n,x} = \frac{C^x}{B^x(m-m')^x}Z_{n,x}$, e si avrà $Z_{1,x+1} = Z_{1,x}$;

$$Z_{n,x+1} = Z_{n,x} + \frac{1}{m - m'}Z_{n-1,x-1}.$$

Da quest' ultima equazione facilmente si deduce

$$Z_{n,x} = \frac{1}{(m - m')^{n-1}}\Sigma^{n-1} . Z_{1,x+n-1}; \text{ cioè}$$

$$Z_{n,x-n+1} = \frac{1}{(m - m')^{n-1}}\Sigma^{n-1} . Z_{1,x}; \text{ e quindi}$$

$$Z_{n,x-n+1} = \frac{1}{(m - m')^{n-1}}\Sigma^{n}(Z_{1,x+1} - Z_{1,x}).$$

Ma poichè $Z_{1,x+1} - Z_x = 0$, avremo

$$Z_{n,x-n+1} = \frac{1}{(m-m')^{n-1}}(F_n + (x+1)F_{n-1} + \frac{(x+1)x}{2}F_{n-2} \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{(x-1)(\ldots(x-n+3)}{2\ldots n-1}F_1);$$ con che si otterrà il valore di $\Psi_{n,x} = \frac{C^x}{B^x(m-m')^{x+n-1}}(F_n + (x+n)F_{n-1} + \frac{(x+n)(x+n-1)}{2}F_{n-2} \ldots\ldots + \frac{(x+n)\ldots(x+2)}{2\ldots(n-1)}F_1)$.

E' facile il vedere, che questo valore di $\Psi_{n,x}$ si cangerà in quello di $\Psi'_{n,x}$, se solamente si cangerà m in m', e viceversa m' in m; pertanto l'integrale completo della proposta avrà la forma $z_x = e^{my}.\frac{C^x}{B^x}\int^y dy^x.e^{(m'-m)y}\int^x dy^x\varphi.y$

$$+P\begin{cases} \frac{y^{x-1}}{2\ldots(x-1)}F_1 + \frac{y^{x-2}}{2\ldots(x-2)}.\frac{1}{m-m'}[F_2+(x+2)F_1] \\ + \frac{y^{x-3}}{2\ldots(x-3)}.\frac{1}{(m-m')^2}[F_3+(x+3)F_2+\frac{(x+3)(x+2)}{2}F_1] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{1}{(m-m')^{x-1}}[F_x+2xF_{x-1}+\frac{2x(2x-1)}{2}F_{x-3}\ldots+\frac{2x\ldots(x+2)}{2\ldots(x-1)}F_1] \end{cases}$$

$$+Q\begin{cases} \frac{y^{x-1}}{2\ldots(x-1)}F'_1 + \frac{y^{x-2}}{2\ldots(x-2)}.\frac{1}{m'-m}[F'_2+(x+2)F_1] \\ + \frac{y^{x-3}}{2\ldots(x-3)}.\frac{1}{(m'-m)^2}[F'_3+(x+3)F'_2\frac{(x+3)(x+2)}{2}F_1] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{1}{(m'-m)^{x-1}}[F'_x+2xF'_{x-1}\ldots+\frac{2x\ldots(x+2)}{2\ldots(x-1)}F_1] \end{cases}$$

ove $\varphi.y$, F_x, e F'_x sono tre funzioni arbitrarie; ed inoltre $P = e^{my}.\frac{C^x}{B^x(m-m')^x}$; $Q = e^{my}\frac{C^x}{B^x(m'-m)^x}$.

41. Dal fin qui esposto facilmente apparisce, che i medesimi metodi condurranno sempre alla integrazione dell' equazioni a differenze parziali finite e infinitesime tra tre variabili, qualunque sia l'ordine dell' equazioni, purchè i coefficienti siano costanti. Ma se, la forma dell' equazioni rimanendo la medesima, i coefficienti saranno funzioni di x,

in tal caso la loro integrazione si potrà ridurre a quella dell' equazioni a differenze finite con i coefficienti variabili. Sia data per esempio la seguente equazione del prim' ordine $z_{x+1} = A_x z_x + B_x \frac{dz_x}{dy}$, ove i coefficienti A_x, B_x sono funzioni date di x. Se ponghiamo $z_0 = \varphi . y$, l'integrale di questa equazione in tal caso si vedrà prendere la forma

$$z_x = a_{0,x} \varphi . y + a_{1,x} \frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x} \frac{d^2\varphi}{dy^2} \ldots + a_{x,x} \frac{d^x\varphi}{dy^x}.$$

Per determinare le quantità $a_{0,x}$, $a_{1,x}$, ec. sostituiamo questo valore nella proposta, e ne ricaveremo l' equazione

$$0 = a_{0,x+1} \varphi . y + a_{1,x+1} \frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x+1} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \text{ec.}$$
$$- A_x a_{0,x} \varphi . y - A_x a_{1,x} \frac{d\varphi}{dy} - A_x a_{2,x} \frac{d^2\varphi}{dy^2} - \text{ec.}$$
$$- B_x a_{0,x} \frac{d\varphi}{dy} - B_x a_{1,x} \frac{d^2\varphi}{dy^2} - \text{ec.}$$

e quindi $a_{0,x+1} = A_x a_{0,x}$; $a_{1,x+1} = A_x a_{1,x} + B_x a_{0,x}$; e generalmente $a_{n,x+1} = A_x a_{n,x} + B_x a_{n-1,x}$; dalla qual' equazione perciò dipenderà l' integrazione della proposta.

42. Consideriamo adesso l' equazione del second' ordine

$$z_{x+1} - A_x \frac{dz_{x+1}}{dy} = B_x z_x + C_x \frac{dz_x}{dy} + D_x \frac{d^2 z_x}{dy^2}.$$

Ponendo $x = 0$, e $z_0 = \varphi . y$, avremo invece la seguente

$$z_1 - A_0 \frac{dz_1}{dy} = B_0 \varphi . y + C_0 \frac{d\varphi}{dy} + D_0 \frac{d^2\varphi}{dy^2} = u_1.$$

Così pure, se si fa $x = 1$, sarà

$$z_2 - A_1 \frac{dz^2}{dy} = B_1 z_1 + C_1 \frac{dz_1}{dy} + D_1 \frac{d^2 z_1}{dy^2}$$
$$\frac{dz^2}{dy} - A_1 \frac{d^2 z_2}{dy^2} = B_1 \frac{dz_1}{dy} + C_1 \frac{d^2 z_1}{dy^2} + D_1 \frac{d^3 z_1}{dy^3};$$

e quindi

$$z_2 - A_1 \frac{dz_2}{dy} - A_0 \left(\frac{dz_2}{dy} - A_1 \frac{d^2 z_2}{dy^2} \right) = B_1 u_1 + C_1 \frac{du_1}{dy} + D_1 \frac{d^2 u_1}{dy^2};$$

la qual' equazione rappresenteremo così

$$z_2 + \alpha_2 \frac{dz_2}{dy} + \alpha'_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} = u^2,$$

ove i coefficienti α_2, α'_2 son tali, che la quantità
$1 + \alpha_2 m + \alpha'_2 m^2 = (1 - A_0 m)(1 - A_1 m)$.
Facendo adesso $x = 2$ otterremo

$$z_3 - A_2 \frac{dz_3}{dy} = B_2 z_2 + C_2 \frac{dz_2}{dy} + D_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2}$$

$$\frac{dz_3}{dy} - A_2 \frac{d^2 z_3}{dy^2} = B_2 \frac{dz_2}{dy} + C_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} + D_2 \frac{d^3 z_2}{dy^3}$$

$$\frac{d^2 z_3}{dy^2} - A_2 \frac{d^3 z_3}{dy^3} = B_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} + C_2 \frac{d^3 z_2}{dy^3} + D_3 \frac{d^4 z_2}{dy^4};$$

donde si ricava

$$z_3 - A_2 \frac{dz_3}{dy} + \alpha_2 \left(\frac{dz_3}{dy} - A_2 \frac{d^2 z^3}{dy^2} \right) + \alpha'_2 \left(\frac{d^2 z_3}{dy^2} - A_2 \frac{d^3 z_3}{dy^3} \right)$$

$$= B_2 u_2 + C_2 \frac{du_2}{dy} + D_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} = u_3;$$

la qual' equazione se si pone sotto la forma

$$z_3 + \alpha_3 \frac{dz_3}{dy} + \alpha'_3 \frac{d^2 z_3}{dy^2} + a''_3 \frac{d^3 z_3}{dy^3} = u_3,$$

sarà la quantità

$$1 + \alpha_3 m + \alpha'_3 m^2 + \alpha''_3 m^3 = (1 + \alpha_2 m + \alpha'_2 m^2)(1 - A_2 m)$$
$$= (1 - A_0 m)(1 - A_1 m)(1 - A_2 m).$$

Continuando ad operare nella medesima maniera giungeremo finalmente alla equazione

$$\text{(A)}\ z_x + \alpha_x \frac{dz_x}{dy} + \alpha'_x \frac{d^2 z_x}{dy^2} \ldots + \alpha_x^{(x-1)} . \frac{d^x z_x}{dy^x} = u_x,$$

ove i coefficienti α_x, α'_x, ec. son tali, che $1 + \alpha_x m + \alpha'_x m^2 \ldots + \alpha_x^{(x-1)} m^x = (1 - A_0 m)(1 - A_1 m) \ldots (1 - A_{x-1} m)$; e per determinare u_x abbiamo l' equazione

$u_{x+1} = B_x u_x + C_x \frac{du_x}{dy} + D_x \frac{d^2 u^x}{dy^2}$, la quale possiamo trattare col metodo usato nel numero precedente.

Adesso nella equazione (A) potremo riguardare x come costante, ed il di lei integrale sarà

$$z_x = \frac{e^{y:A_0} \int e^{-y:A_0} . u_x dy}{k} + \frac{e^{y:A_1} \int e^{-y:A_1} . u_x dy}{k} + \text{ec.}$$

$$+ e^{y:A_0} \Psi_{1,x} + e^{y:A_1} \Psi_{2,x} + e^{y:A_2} \Psi_{3,x} \ldots + e^{y:A_{x-1}} . \Psi_{x,x}.$$

Per determinare le funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$, ec. sostituiamo questo valore di z_x nella proposta, e troveremo

$$A_0(A_0 - A_x)\Psi_{1,x+1} = (A_0^2 B_x + A_0 C_x + D_x)\Psi_{1,x}$$
$$A_1(A_1 - A_x)\Psi_{2,x+1} = (A_1^2 B_x + A_1 C_x + D_x)\Psi_{2,x}$$

e generalmente

$$A_{n-1}(A_{n-1} - A_{x-1})\Psi_{n,x+1} = (A_{n-1}^2 B_x + A_{n-1} C_x + D_x)\Psi_{n,x}.$$

L' integrale di questa equazione sarà della forma $\Psi_{n,x} = X_{n,x}.F_n$, essendo $X_{n,x}$ una funzione data di n ed x, ed F_n una funzione arbitraria di n. E poichè si deve prendere il valore di $\Psi_{n,x}$ da $n=1$ fino ad $n=x$, esso introdurrà nell' integrale della proposta una nuova funzione arbitraria di x.

Le due equazioni contemplate ci fanno conoscere il metodo, che in ogni caso si deve tenere, per ridurre l' integrazione di qualsivoglia equazione lineare a differenze parziali miste con i coefficienti variabili alla integrazione di una simile equazione a differenze parziali finite. Noi ci astenghiamo dal più lungamente parlarne, perchè questa riduzione oltre i due casi considerati è più curiosa che utile, poichè l' integrazione dell' equazioni a differenze finite con i coefficienti variabili al di là del prim' ordine è tra le cose desiderate.

ARTICOLO V.

Applicazione del metodo precedente all' equazioni tra quattro variabili.

43. Passando all' equazioni tra quattro variabili, proponghiamoci in primo luogo d' integrare l' equazione del prim' ordine $z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy} + C\frac{dz_x}{dt}$, essendo z_x funzione delle tre variabili x, y, t. Ponendo $z_x = \alpha^x e^{\beta y + \gamma t}$ avremo (a) $\alpha = A + B\beta + C\gamma$, cioè $\alpha = B\beta + C\delta$, posto $A + C\gamma = C\delta$. Quindi sarà $\alpha^x = B^x\beta^x + xB^{x-1}C\beta^{x-1}\delta + \frac{x(x-1)}{2}B^{x-2}C^2\beta^{x-2}\delta^2 \ldots\ldots + C^x\delta^x$; e perciò $\alpha^x e^{\beta y + \gamma t}$

$$= e^{-\frac{A}{C}t}\left(B^x\frac{d^x.e^{\beta y+\gamma t}}{dy^x}+xB^{x-1}C\frac{d^x.e^{\beta y+\gamma t}}{dy^{x-1}dt}\ldots+C^x\frac{d^x.e^{\beta y+\gamma t}}{dt^x}\right);$$

onde usando un ragionamento simile ai precedenti (29) ricaveremo

$$z^x = e^{-\frac{A}{C}t}\left(B^x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dy^x}+xB^{x-1}C\frac{d^x\varphi}{dy^{x-1}dt}\ldots\ldots+C^x\frac{d^x\varphi}{dt^x}\right).$$

Il medesimo integrale potrà ottenersi in una forma più semplice espresso, se, invece di prendere dalla equazione (α) il valore di α, si prenderà quello di β o di γ. Infatti si avrà $\gamma = \frac{\alpha - A - B\beta}{C}$, ed $\alpha^x e^{\beta y+\gamma t} = e^{-\frac{A}{C}t}\alpha^x e^{\frac{\alpha}{C}t+\beta(y-\frac{B}{C}t)}$

$= e^{-\frac{A}{C}t}.C^x\alpha^x e^{\alpha t+\beta(Cy-Bt)}$ (se in luogo di α e β si pone $C\alpha$ e $C\beta$) $= e^{-\frac{A}{C}t}.C^x.\frac{d^x.e^{\alpha t+\beta(Cy-Bt)}}{dt^x}$ nella supposizione di $Cy-Bt$ costante. Sarà dunque $z_x = e^{-\frac{A}{C}t}.C^x.\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$, purchè si prendano i differenziali nella ipotesi di $Cy-Bt$ costante.

44. Sia proposta adesso l' equazione del second' ordine

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}+B\frac{dz_{x+1}}{dt} = Cz_x + D\frac{dz_x}{dy}+E\frac{dz_x}{dt}.$$

Ponendo $z_x = \alpha^x e^{\beta y+\gamma t}$ avremo

$$\alpha + A\alpha\beta + B\alpha\gamma = C + D\beta + E\gamma.$$

Facciamo

$$1 + A\beta + B\gamma = (AE - BD)\delta,$$
$$C + D\beta + E\gamma = (AE - BD)\theta;$$

ed avremo $\alpha = \frac{\theta}{\delta}$, $\beta = E\delta - B\theta + K$, $\gamma = A\theta - D\delta + L$, ove

$K = \frac{BC - E}{AE - BD}$, $L = \frac{D - AC}{AE - BD}$, e sarà

$$\alpha^x e^{\beta y+\gamma t} = \frac{\theta^x}{\delta^x}e^{Ky+Lt+\delta(Ey-Dt)+\theta(At-By)}$$

Se

Se per più semplicità ponghiamo $Ey - Dt = r$, $At - By = u$, ne otterremo l'equazione $\alpha^x e^{\beta y + \gamma t} = e^{(r+Cu):(BD-AE)} \cdot \frac{\theta^x}{\delta^x} e^{\delta r + \theta u}$ $= e^{(r+Cu):(BD-AE)} \int^x dr^x \cdot \frac{d^x e^{\delta r + \theta u}}{du^x}$. E siccome in luogo di $e^{\delta r + \theta u}$ si può sostituire una funzione qualunque di r ed u, sarà $z_x = e^{(r+Cu):(BD-AE)} \int^x dr^x \cdot \frac{d^x \varphi(r,u)}{du^x}$. Il segno integrale $\int^x dr^x \varphi(r,u)$ porterà la quantità $\Psi_{u,x} + r\Psi_{u,x-1} + \frac{r^2}{2}\Psi_{u,x-2} \ldots\ldots\ldots + \frac{r^{x-1}}{2 \cdot 3 \ldots (x-1)}\Psi_{u,1}$. Quindi l' integrale completo della proposta sarà $z_x = e^{(r+Cu):(BD-AE)} \cdot \frac{d^x \int^x dr^x \varphi(r,u)}{du^x}$ $+ e^{(r+Cu):(BD-AE)} \left(\frac{d^x \Psi_{x,u}}{du^x} + r \frac{d^x \Psi_{x-1,u}}{du^x} \ldots + \frac{r^{x-1}}{2 \cdot 3 \ldots (x-1)} \frac{d^x \Psi_{1,u}}{du^x} \right)$.

La medesima equazione può anche trattarsi con un metodo analogo a quello del n.° 42. Prima di tutto osservo, che essa può rendersi assai più semplice, se si pone $z_x = e^{my+nt} \cdot z'_x$. Infatti essa diventerà dopo questa sostituzione $(1 + Am + Bn) z'_{x+1} + A \frac{dz'_{x+1}}{dy} + B \frac{dz'_{x+1}}{dt} = (C + Dm + En) z'_x$ $+ D \frac{dz'_x}{dy} + E \frac{dz'_x}{dt}$. Ora essendo le quantità m ed n in nostro arbitrio, potremo prenderle tali, che ne risulti $1 + Am + Bn = 0$; $C + Dm + En = 0$, nel qual caso svanendo i coefficienti di due termini, l' equazione sarà $A \frac{dz'_{x+1}}{dy} + B \frac{dz_{x+1}}{dt} = D \frac{dz'_x}{dy} + E \frac{dz'_x}{dt}$. Facciamo in questa $x = 0$, e ponendo $z'_x = \varphi(y,t)$ avremo $A \frac{dz'_1}{dy} +$ $B \frac{dz'_1}{dt} = D \frac{d\varphi}{dy} + E \frac{d\varphi}{dt} = u_1$. Se adesso ponghiamo $x = 1$, avremo $A \frac{dz'_2}{dy} + B \frac{dz'_2}{dt} = D \frac{dz'_1}{dy} + E \frac{dz'_1}{dt}$, e quindi sarà $A^2 \frac{d^2 z'_2}{dy^2} + 2AB \frac{d^2 z'_2}{dy\,dt} + B^2 \frac{d^2 z'_1}{dt^2} = AD \frac{d^2 z'_1}{dy^2} +$

$(AE+BD)\frac{d^2z'_1}{dydt}+BE\frac{d^2z'_1}{dt^2}=D\frac{du_1}{dy}+E\frac{du_1}{dt}=u_2$. Similmente troveremo $A^3\frac{d^3z'_3}{dy^3}+3A^2B\frac{d^3z'_3}{dy^2dt}+3AB^2\frac{d^3z'_3}{dydt^2}+B^3\frac{d^3z'_3}{dt^3}$ $=A^2D\frac{d^3z'_2}{dy^3}+(2ABD+A^2E)\frac{d^3z'_2}{dy^2dt}+(B^2D+2ABE)\frac{d^3z'_2}{dydt^2}$ $+B^2E\frac{d^3z'_2}{dt^3}=D\frac{du_2}{dy}+E\frac{du_2}{dt}=u_3$. Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata (a) $A^x\frac{d^xz'_x}{dy^x}+xA^{x-1}B\frac{d^xz'_x}{dy^{x-1}dt}+\frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^xz'_x}{dy^{x-2}dt^2}\ldots$ $+B^x\frac{d^xz'_x}{dt^x}=u_x$, ove u_x si deve determinare dalla equazione $u_{x+1}=D\frac{du_x}{dy}+E\frac{du_x}{dt}$; cioè sarà (43) $u_x=E_x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$, purchè si facciano le differenziazioni nella ipotesi di $Ey-Dt$ costante. Nella equazione (a) si potrà considerare x come costante, e il di lei integrale sarà (17) $z'_x=\frac{1}{A^x}\int^x dy^x.u_x$, facendo le integrazioni nella supposizione di $At-By$ costante; le quali cose combinano con l'integrale trovato precedentemente.

45. Passiamo all' equazione generale del second' ordine $z_{x+2}=Az_{x+1}+B\frac{dz_{x+1}}{dy}+C\frac{dz_{x+1}}{dt}+Dz_x+E\frac{dz_x}{dy}$ $+F\frac{dz_x}{dt}+G\frac{d^2z_x}{dy^2}+H\frac{d^2z_x}{dydt}+I\frac{d^2z_x}{dt^2}$. Ponendo $z_x=\alpha^xe^{\beta y+\gamma t}$, e dividendo per $\alpha^xe^{\beta y+\gamma t}$ avremo (a) $\alpha^2=A\alpha+B\alpha\beta+C\alpha\gamma+D+E\beta+F\gamma+G\beta^2+H\beta\gamma+I\gamma^2$. Se da questa equazione deduciamo i valori di α^3, α^4, ec. ponendovi, finchè è possibile, il valore di α^2 ricavato dalla medesima equazione, troveremo α^x espresso nella forma seguente;

$$\alpha^x=\alpha\left\{\begin{array}{l}a_{0,0,x}+a_{1,0,x}\beta+a_{0,1,x}\gamma+a_{2,0,x}\beta^2+a_{1,1,x}\beta\gamma+a_{0,2,x}\gamma^2\\+a_{3,0,x}\beta^3+a_{2,1,x}\beta^2\gamma+a_{1,2,x}\beta\gamma^2+a_{0,3,x}\gamma^3\ldots\ldots\\+a_{x-1,0,x}\beta^{x-1}+a_{x-2,1,x}\beta^{x-2}\gamma\ldots\ldots+a_{0,x-1,x}\gamma^{x-1}\end{array}\right.$$
$$\begin{array}{l}+b_{0,0,x}+b_{1,0,x}\beta+b_{0,1,x}\gamma+b_{2,0,x}\beta^2+b_{1,1,x}\beta\gamma+b_{0,2,x}\gamma^2\\+b_{3,0,x}\beta^3+b_{2,1,x}\beta^2\gamma+b_{1,2,x}\beta\gamma^2+b_{0,3,x}\gamma^3\ldots\ldots\\+b_{x,0,x}\beta^x+b_{x-1,1,x}\beta^{x-1}\gamma\ldots\ldots\ldots+b_{0,x,x}\gamma^x\end{array}$$

Quindi con il ragionamento più volte usato dedurremo l'integrale completo della proposta espresso come segue

$$z_x = a_{0,0,x}\varphi(y,t) + a_{1,0,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{0,1,x}\frac{d\varphi}{dt} + a_{2,0,x}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_{1,1,x}\frac{d^2\varphi}{dydt}$$

$$+ a_{0,2,x}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_{3,0,x}\frac{d^3\varphi}{dy^3} + a_{2,1,x}\frac{d^3\varphi}{dy^2dt} \dots\dots\dots$$

$$+ a_{x-1,0,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-1}} + a_{x-2,1,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-2}dt} \dots + a_{0,x-1,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dt^{x-1}}$$

$$+ b_{0,0,x}\varphi'(y,t) + b_{1,0,x}\frac{d\varphi'}{dy} + b_{0,1,x}\frac{d\varphi'}{dt} + b_{2,0,x}\frac{d^2\varphi'}{dy^2} + b_{1,1,x}\frac{d^2\varphi'}{dydt}$$

$$+ b_{0,2,x}\frac{d^2\varphi'}{dt^2} + b_{3,0,x}\frac{d^3\varphi'}{dy^3} + b_{2,1,x}\frac{d^3\varphi'}{dy^2dt} \dots\dots\dots$$

$$+ b_{x,0,x}\frac{d^x\varphi'}{dy^x} + b_{x-1,0,x}\frac{d^x\varphi'}{dy^{x-1}dt} \dots\dots\dots + b_{0,x,x}\frac{d^x\varphi'}{dt^x};$$

ove φ e φ' sono due funzioni arbitrarie di y e t.

Per determinare i coefficienti $a_{0,0,x}$, ec. $b_{0,0,x}$, ec. ponghiamo $x+1$ in luogo di x nel valore di α^x, ed avremo

$$\alpha^{x+1} = \alpha\begin{cases} a_{0,0,x+1} + a_{1,0,x+1}\beta + a_{0,1,x+1}\gamma + a_{2,0,x+1}\beta^2 \\ + a_{1,1,x+1}\beta\gamma + a_{0,2,x+1}\gamma^2 + a_{3,0,x+1}\beta^3 + \text{ec.}\end{cases}$$
$$+ b_{0,0,x+1} + b_{1,0,x+1}\beta + b_{0,1,x+1}\gamma + b_{2,0,x+1}\beta^2$$
$$+ b_{1,1,x+1}\beta\gamma + b_{0,2,x+1}\gamma^2 + b_{3,0,x+1}\beta^3 + \text{ec.}$$

Ma questo valore di α^{x+1} si può ottenere ancora in altra guisa, se quello di α^x si moltiplica per α, e poi in luogo di α^2 si sostituisce il suo valore ricavato dall' equazione (a). Sarà dunque

$$\alpha^{x+1} = (A + B\beta + C\gamma)\times\begin{cases} a_{0,0,x} + a_{1,0,x}\beta + a_{0,1,x}\gamma \\ + a_{2,0,x}\beta^2 + a_{1,1,x}\beta\gamma + \text{ec.}\end{cases}$$
$$+\alpha\begin{cases} b_{0,0,x} + b_{1,0,x}\beta + b_{0,1,x}\gamma + b_{2,0,x}\beta^2 + b_{1,1,x}\beta\gamma \\ + b_{0,2,x}\gamma^2 + b_{3,0,x}\beta^3 + b_{2,1,x}\beta^2\gamma + b_{1,2,x}\beta\gamma^2 + \text{ec.}\end{cases}$$
$$+ (D + E\beta + F\gamma + G\beta^2 + H\beta\gamma + I\gamma^2)\begin{cases} a_{0,0,x} + a_{1,0,x}\beta \\ + a_{0,1,x}\gamma + \text{ec.}\end{cases}$$

Siccome questi due valori di α^{x+1} devono essere identici, paragonando insieme i coefficienti de' termini α, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta^2$, ec. avremo

(b) $a_{0,0,x+1} = Aa_{0,0,x} + b_{0,0,x}$.

(c) $a_{m,0,x+1} = Aa_{m,0,x} + Ba_{m-1,0,x} + b_{m,0,x}$.

(d) $a_{0,n,x+1} = Aa_{0,n,x} + Ca_{0,n-1,x} + b_{0,n,x}$.

(e) $a_{m,n,x+1} = Aa_{m,n,x} + Ba_{m-1,n,x} + Ca_{m,n-1,x} + b_{m,n,x}$.

le quali equazioni si vede esser tutte comprese nella equazione (e), se si osserva che $a_{m,n,x}$ è $=0$, quando m o n è un numero negativo.

Similmente paragonando ne' due valori di α^{x-1} i coefficienti de' termini β, γ, β^2, $\beta\gamma$, γ^2, ec. otterremo in generale l'equazione (f) $b_{m,n,x+1} = Da_{m,n,x} + Ea_{m-1,n,x} + Fa_{m,n-1,x} + Ga_{m-2,n,x} + Ha_{m-1,n-1,x} + Ia_{m,n-2,x}$ purchè si rifletta, che $a_{m,n,x}$ è $=0$, quando uno de' numeri m o n è negativo.

L' equazione (e) ci darà il valore di $b_{m,n,x}$ subito che sarà trovato quello di $a_{m,n,x}$. Sostituendo poi il valore di $b_{m,n,x}$ nella equazione (f), avremo l' equazione $a_{m,n,x+2} = Aa_{m,n,x+1} + Ba_{m-1,n,x+1} + Ca_{m,n-1,x+1} + Da_{m,n,x} + Ea_{m-1,n,x} + Fa_{m,n-1,x} + Ga_{m-2,n,x} + Ha_{m-1,n-1,x} + Ia_{m,n-2,x}$ a differenze finite, l'integrazione della quale ci darà il valore di $a_{m,n,x}$. Anche indipendentemente dalla integrazione della equazione precedente si potrà trovare con altri metodi il valore di $a_{m,n,x}$; sopra di che si può vedere la citata Memoria di *Lagrange*.

46. Se nella proposta mancasse il termine z_{x+2}, cioè se essa fosse della forma $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} + B\frac{dz_{x+1}}{dt} = Cz_x + D\frac{dz_x}{d} + E\frac{dz_x}{dt} + \frac{Fd^2z_x}{dy^2} + G\frac{d^2z_x}{dydt} + H\frac{d^2z_x}{dt^2}$, non si potrebbe adoprare il metodo precedente. In questo caso ponghiamo $z_x = e^{-y:A}.z'_x$, e l' equazione diventerà $A\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{dz'_{x+1}}{dt} = C1z'_x + D1\frac{dz'_x}{dy} + E1\frac{dz'_x}{dt} + F\frac{d^2z'_x}{dy^2} + G\frac{d^2z'_x}{dydt} + H\frac{d^2z'_x}{dt^2}$, essendo $C1 = C - \frac{D}{A} + \frac{F}{A^2}$, $D1 = D - \frac{2F}{A}$, $E1 = E - \frac{G}{A}$. Adesso in luogo di t introduciamo la variabile $u = At - By$, in modo che z'_x diventi funzione di x, y, ed u, ed avremo (a) $A\frac{dz'_{x+1}}{dy} = C1z'_x + D1\frac{dz'_x}{dy} + E2\frac{dz'_x}{du} + F\frac{d^2z'_x}{dy^2} + G1\frac{d^2z'_x}{dydu} + H1\frac{d^2z'_x}{du^2}$, ove $E2 = AE1$

$-$ BD1, $G1 = AG - 2BF$, $H1 = A^2H - ABG + B^2F$. Si faccia $z'_x = \int^x dy^x . z''_x$, e l'equazione precedente si cangerà in $Az''_{x+1} = C1 z''_x + D1 \frac{dz''_x}{dy} + E2 \frac{dz''_x}{du} + F \frac{d^2 z''_x}{dy^2} + G1 \frac{d^2 z''_x}{dydt}$ $+ H1 \frac{d^2 z''_x}{du^2}$. Ora ponendo $z''_x = \alpha^x e^{\beta y + \gamma u}$ avremo $A\alpha =$ $C1 + D1\beta + E2\gamma + F\beta^2 + G1\beta\gamma + H1\gamma^2$, e quindi $\alpha^x = \frac{1}{A^x}(C1 + D1\beta + E2\gamma + F\beta^2 + G1\beta\gamma + H\gamma^2)^x$.
Se svolgiamo questo valore di α^x nella forma $a_{0,0} +$ $a_{1,0}.\beta + a_{0,1}.\gamma + a_{2,0}.\beta^2 + a_{1,1}.\beta\gamma + a_{0,2}.\gamma^2 \ldots\ldots\ldots$ $+ a_{2x,0}.\beta^{2x} + a_{2x-1,1}.\beta^{2x-1}\gamma \ldots\ldots\ldots + a_{0,2x}\gamma^{2x}$, sarà

$$z''_x = a_{0,0}\varphi(y,u) + a_{1,0}.\frac{d\varphi}{dy} + a_{0,1}.\frac{d\varphi}{du} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_{2x,0}.\frac{d^{2x}\varphi}{dy^{2x}} + a_{2x-1,1}\frac{d^{2x}\varphi}{dy^{2x-1}du} \ldots\ldots + a_{0,2x}.\frac{d^{2x}\varphi}{du^{2x}}.$$

Il segno sommatorio $\int^x dy^x . z''_x$ porterà la quantità

$$\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi_{1,x,u} + \frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\Psi_{2,x,u} \ldots\ldots + \Psi_{x,x,u};$$

e per determinare la funzione $\Psi_{n,x,u}$ si porrà questa quantità in luogo di z'_x nella equazione (a). Fatta la sostituzione si troverà $A\Psi_{1,x+1} = C1\Psi_{1,x} + E2\frac{d\Psi_{1,x}}{du} + H1\frac{d^2\Psi_{1,x}}{du^2}$

$$A\Psi_{n,x+1} = C1\Psi_{n,x} + E2\frac{d\Psi_{n,x}}{du} + H1\frac{d^2\Psi_{n,x}}{du^2} + D1\Psi_{n-1,x}$$

$+ G1\frac{d\Psi_{n-1,x}}{du} + F\Psi_{n-2,x}$. Questa equazione è di un genere diverso da quello, che qui si contempla, poichè la differenza di due variabili n ed x è finita, e della terza u infinitesima, e della di lei integrazione parleremo in seguito.

Per l'integrazione dell'equazione $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy}$ $+ B\frac{dz_{x+1}}{dt} = Cz_x + D\frac{dz_x}{dy} + E\frac{dz_x}{dt} + F\frac{d^2z_x}{dy^2} + G\frac{d^2z_x}{dydt} +$ $H\frac{d^2z_x}{dt^2}$ si può anche usare il metodo seguente, che è ge-

neralmente applicabile all' equazioni della medesima forma di un ordine più elevato. Facciamo $z_0 = \varphi)y,t)$, e ponendo nella proposta $x + o$ avremo $z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt} = C\varphi(y,t)$ $+ D\frac{d\varphi}{dy} + E\frac{d\varphi}{dt} + F\frac{d^2\varphi}{dy^2} + G\frac{d^2\varphi}{dydt} + H\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u_1$.

Similmente, se facciamo $x = 2$, otterremo

$$z_2 + A\frac{dz_2}{dy} + B\frac{dz_2}{dt} + A\frac{d\left(z_2 + A\frac{dz_2}{dy} + B\frac{dz_2}{dt}\right)}{dy}$$

$$+ B\frac{d\left(z_2 + A\frac{dz_2}{dy} + B\frac{dz_2}{dt}\right)}{dt} = C\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)$$

$$+ D\frac{d\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dy} + E\frac{d\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dt}$$

$$+ F\frac{d^2\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dy^2} + G\frac{d^2\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dydt}$$

$+ H\frac{d^2\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dt^2}$; e se ponghiamo questa equazione sotto la forma $z_2 + \alpha\frac{dz_2}{dy} + \alpha'\frac{dz_2}{dt} + \alpha''\frac{d^2z_2}{dy^2} + \alpha'''\frac{d^2z_2}{dydt}$ $+ \alpha''''\frac{d^2z_2}{dt^2} = u_2$, sarà la quantità $1 + \alpha m + \alpha' n + \alpha'' m^2$ $+ \alpha''' mn + \alpha'''' n^2 = (1 + Am + Bn)^2$; ed $u_2 = Cu_1 + D\frac{du_1}{dy}$ $+ E\frac{du_1}{dt} + F\frac{d^2u_1}{dy^2} + G\frac{d^2u_1}{dydt} + H\frac{d^2u_1}{dt^2}$. Così pure, se nella proposta ponghiamo $x = 2$, ne dedurremo

$$z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt} + \alpha\frac{d\left(z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt}$$

$$+ \alpha'\frac{d\left(z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt} + \alpha''\frac{d^2\left(z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dy^2}$$

$$+\alpha'''\frac{d^2\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dydt}+\alpha''''\frac{d^2\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt^2}$$

$$=Cu_2+D\frac{du_2}{dy}+E\frac{du_2}{dt}+F\frac{d^2u_2}{dy^2}+G\frac{d^2u_2}{dydt}+H\frac{d^2u_2}{dt^2};$$

la qual' equazione se si pone sotto la forma $z_3+\beta\frac{dz_3}{dy}$ $+\beta'\frac{dz_3}{dt}+\beta''\frac{d^2z_3}{dy^2}+\beta'''\frac{d^2z_3}{dydt}+\beta''''\frac{d^2z_3}{dt^2}+\beta'''''\frac{d^3z_3}{dy^3}+\beta''''''\frac{d^3z_3}{dy^2dt}$ $+\beta'''''''\frac{d^3z_3}{dydt^2}+\beta''''''''\frac{d^3z_3}{dt^3}=u_3$, la quantità $1+\beta m+\beta' n$ $+\beta'' m^2+\beta''' mn+\beta'''' n^2+\beta''''' m^3+\beta'''''' m^2n+\beta''''''' mn^2$ $+\beta'''''''' n^3$ sarà $=(1+\alpha m+\alpha' n+\alpha'' m^2+\alpha''' mn$ $+\alpha'''' n^2)(1+Am+Bn)=(1+Am+Bn)^3$.

Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata (a) $z_x+\omega\frac{dz_x}{dy}+\omega'\frac{dz_x}{dt}+\omega''\frac{d^2z_x}{dy^2}$ $+\omega'''\frac{d^2z_x}{dydt}+\omega''''\frac{d^2z_x}{dt^2}+\text{ec.}=u_x$; ove la quantità $1+\omega m$ $+\omega' n+\omega'' m^2+\omega''' mn+\omega'''' n^2+\text{ec.}$ è $=(1+Am+Bn)^x$, e per determinare u_x abbiamo l' equazione $u_{x+1}=Cu_x$ $+D\frac{du_x}{dy}+E\frac{du_x}{dt}+F\frac{d^2u_x}{dy^2}+G\frac{d^2u_x}{dydt}+H\frac{d^2u_x}{dt}$, per mezzo della quale potremo col metodo del n.° 45. esprimere u_x per $\varphi(y,t)$, e per le differenziali di questa funzione relativamente ad y ed a t.

Trovato u_x, l' equazione (a) integrata (19) ci darà $z_x=\frac{e^{-y:A}}{A^x}\int^x dy^x.e^{y:A}u_x$, purchè si prendano questi integrali nella ipotesi di $At-By$ costante. Col metodo precedente si potrà sempre ridurre l' integrazione di qualunque equazione della forma, che abbiamo considerata, alla integrazione di una equazione a differenze parziali e infinitesime.

47. Passiamo adesso a considerare quell' equazioni, nelle quali la differenza di due variabili x ed y è finita, e della terza t infinitesima. Se $z_{x,y}$ rappresenta una funzione di x, y, e t, la forma generale dell' equazione del prim' or-

dine è la seguente; $z_{x+1,y} = Az_{x,y} + Bz_{x,y+1} + C\frac{dz_{x,y}}{dt}$.
Per integrarla facciamo $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$, ed avremo $\alpha = A + B\beta + C\gamma = B\beta + C\delta$, se ponghiamo $A + C\gamma = C\delta$, cioè $\gamma = \delta - \frac{A}{C}$. Sarà dunque $\alpha^x = B^x\beta^x + xB^{x-1}C\beta^{x-1}\delta + \frac{x(x-1)}{2}B^{x-2}C^2\beta^{x-2}\delta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots C^x\delta^x$; e siccome $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \alpha^x\beta^y e^{(\delta - A:C)t}$, sarà $z_{x,y} = e^{-(A:C)t}(B^x\beta^{x+y}e^{\delta t} + xB^{x-1}C\frac{d.\beta^{x+y-1}e^{\delta t}}{dt} \ldots\ldots + C^x\frac{d^x.\beta^y e^{\delta t}}{dt^x})$; onde col ragionamento più volte usato dedurremo l' integrale completo
$z_{x,y} = e^{-(A:C)t}(B^x\varphi(x+y,t) + xB^{x-1}C\frac{d.\varphi(x+y-1,t)}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots + C^x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$.

L' istesso integrale può ottenersi espresso in un modo più semplice. Ripigliamo l' equazione $\alpha = B\beta + C\delta$, e ponghiamo $B\beta = -C\omega\delta$; sarà $\alpha = -C\delta(\omega - 1)$; e quindi avremo $\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{e^{-(A:C)t}.(-C)^{x+y}}{B^y}.\delta^{x+y}(\omega-1)^x\omega^y e^{\delta t} = \frac{e^{-(A:C)t}.(-C)^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\omega^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}}$; onde ricaveremo l' integrale cercato $z_{x,y} = \frac{e^{-(A:C)t}.(-C)^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$, ove Δ' rappresenta la differenza finita per rapporto ad y. Possiamo ancora porre $\alpha = C\omega\delta$, ed avremo $\beta = \frac{C}{B}\delta(\omega - 1)$, e col medesimo discorso troveremo

$$z_{x,y} = \frac{e^{-(A:C)t}.C^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta^x\psi(x,t)}{dt^{x+y}}.$$

48. Consideriamo adesso l' equazione del second' ordine $z_{x+1,y} + Az_{x+1,y+1} + B\frac{dz_{x+1,y}}{dt} = Cz_{x,y} + Dz_{x,y+1} + E\frac{dz_{x,y}}{dt}$.

Po-

Ponendo $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y e^{\gamma t}$ avremo $\alpha = \frac{C + D\beta + E\gamma}{1 + A\beta + B\gamma}$; e facendo $1 + B\gamma = B\delta$, e $C - \frac{E}{B} = K$, sarà $\alpha = \frac{K + D\beta + E\delta}{A\beta + B\delta}$.

Se adesso ponghiamo $A\beta = -B\omega\delta$, sarà $\beta = -\frac{B}{A}\omega\delta$, ed $\alpha = \frac{K + \delta(E - L\omega)}{-B\delta(\omega - 1)}$, ove $L = \frac{BD}{A}$. Di nuovo facciamo $E - L\omega = -E(\omega' - 1)$; ed otterremo $\omega = \frac{E}{L}\omega'$, $\beta = -\frac{BE}{AL}\omega'\delta$, ed $\alpha = \frac{K - E\delta(\omega' - 1)}{-B\delta\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)}$. Sarà pertanto $\alpha^x \beta^y e^{\gamma t}$

$$= \frac{(-B)^y e^{-t:B}}{A^y(-B)^x} \cdot \frac{[K - E\delta(\omega' - 1)]^x \cdot \frac{E^y}{L^y}\omega'^y e^{\delta t}}{\delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)^x}.$$ Ma la quantità

$$\frac{[K - E\delta(\omega' - 1)]^x \cdot \frac{E^y}{L^y}\omega'^y e^{\delta t}}{\delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)^x},$$ svolto in serie il binomio $[K - E\delta(\omega' - 1)]^x$, diventa $\Big\{[K^x - xK^{x-1}E\delta(\omega' - 1) + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}E^2\delta^2(\omega' + 1)^2 \ldots \pm E^x\delta^x(\omega' - 1)^x]\left(\frac{E}{L}\right)^y \omega'^y e^{\delta t}\Big\}$ $: \delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)^x$; e questa formola si può mettere sotto la forma $\Big\{d^{y-x}\Sigma'^x \frac{E^y}{L^y}\Big(K^x \omega'^y e^{\delta t} - xK^{x-1}E\frac{d\Delta'.\omega'^y e^{\delta t}}{dt} - \ldots\ldots$ $\ldots\ldots \pm E^x \frac{d^x\Delta'^x.\omega'^y e^{\delta t}}{dt^x}\Big)\Big\} : dt^{y-x}$. Se dunque facciamo z_x eguale a questa ultima quantità, dopo di averla moltiplicata per $\frac{(-B)^y e^{-(t:B)}}{A^y(-B)^x}$, e di aver posto in luogo di $\omega' e^{\delta t}$ una funzione qualunque arbitraria di y e t, avremo l' integrale della proposta.

Ora si osservi, che la formola $K^x\varphi(y,t) - xK^{x-1}E\frac{d\Delta'\varphi}{dt} + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}E^2\frac{d^2\Delta'^2\varphi}{dt^2} \ldots\ldots \pm E^x\frac{d^x\Delta'^x\varphi}{dt^x}$ si può ridurre in una forma assai più concisa. Facciamola infatti $= Q_{x,y}$, ed avremo $Q_{x+1,y} = K^{x+1}\varphi - (x+1)K^xE\frac{d\Delta'\varphi}{dt} + \frac{(x+1)x}{2}K^{x-1}E^2\frac{d^2\Delta'^2\varphi}{dt^2}$ — ec., e $\frac{d\Delta'Q_{x,y}}{dt} = K^x\frac{d\Delta'\varphi}{dt} - xK^{x-1}E\frac{d^2\Delta'^2\varphi}{dt^2}$ + ec. Quindi apparisce, che sarà $Q_{x+1,y} = KQ_{x,y} - E\frac{d\Delta'Q_{x,y}}{dt}$. Per integrare questa equazione ponghiamo $Q_{x,y} = \alpha^x\beta^ye^{\gamma t}$, ed avremo $\alpha = K - E(\beta - 1)\gamma$; il qual valore di α diventa $\alpha = K - E\omega + E\gamma$, se si fa $\int\gamma = \omega$. Di nuovo ponghiamo $K + E\gamma = F\delta$, ed $\omega = \omega'\delta$, ed avremo $\alpha = -F\delta(\omega' - 1)$, $\beta = \frac{\omega'\delta}{\delta - K:E}$, e quindi $\alpha^x\beta^ye^{\gamma t} = \frac{(-E)^x\delta^{x+y}(\omega'-1)^x.\omega'^ye^{(\delta - K:E)t}}{(\delta - K:E)}$, la qual quantità si può mettere sotto la forma $(-E)^x\int^ydt^y.e^{-(K:E)t}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\omega'^ye^{\delta t}}{dt^{x+y}}$. Pertanto il valore di $Q_{x,y}$ sarà $Q_{x,y} = (-E)^x\int^ydt^y.e^{-(K:E)t}\frac{d^{x+y}\Delta'^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$; e l'integrale della proposta

$$z_{x,y} = \frac{(-B)^yE^xe^{-(t:B)}}{A^yB^x}.\frac{d^{y-x}\Sigma'^x\frac{E^y}{L^y}\int^ydt^y.e^{-(K:E)t}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}}{dt^{y-x}}.$$

49. Questa forma d'integrale cessa di essere utile in due casi, cioè quando $D=0$, e quando $B=0$. Nel primo caso ponendo $z_{x,y} = \alpha^x\beta^ye^{\gamma t}$, e poi $1 - B\gamma = E\delta$, e $K = C - \frac{B}{E}$, avremo $\alpha = \frac{K + E\delta}{A\beta + E\delta}$; e quindi facendo $A\beta = -B\omega\delta$ otterremo $\beta = -\frac{B}{A}\omega\delta$, ed $\alpha = \frac{K + ED}{-B\delta(\omega - 1)}$; onde sarà

$$\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} e^{-(1:B+K:E)t} \cdot \frac{(\delta+K:E)^x \omega^y \delta^y e^{(\delta+K:E)t}}{\delta^x(\omega-1)^x};$$

la qual quantità si può mettere sotto la forma

$$\frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} e^{-(1:B+K:E)t} \cdot \frac{d^x . e^{(K:E)t} d^{y-x} \Sigma'^x \omega^y e^{\delta t}}{d^y}.$$ Quindi ponendo una funzione arbitraria di y e t in luogo di $\omega^y e^{\delta t}$ avremo

$$z_{x,y} = \frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} e^{-(1:B+K:E)t} \cdot \frac{d^x e^{(K:E)t} d^{y-x} \Sigma'^x \varphi(,t)}{dt^y}.$$

E se oltre ad essere D=o, fosse anche C=o, a motivo di $\frac{K}{E} = -\frac{1}{B}$, sarà $z_{x,y} = \frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} \cdot \frac{d^x e^{-(t:B)} d^{y-x} \Sigma'^x \varphi(y,t)}{dt^y}$.

50. Nel caso di B=o facendo $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$ avremo $\alpha = \frac{C+D\beta+E\gamma}{1+A\beta}$. Si ponga $C+E\gamma = E\delta$, $A\beta = -\omega$, e sarà $\gamma = \delta - \frac{C}{E}$, $\beta = -\frac{\omega}{A}$, ed $\alpha = \frac{(D:A)\omega - E\delta}{\omega-1}$. Si faccia adesso $\frac{D}{A}\omega = E\omega'\delta$, e chiamando M la quantità $\frac{AE}{D}$, avremo $\omega = M\omega'\delta$; $\beta = -\frac{M\omega'\delta}{A}$; ed $\alpha = \frac{E(\omega'-1)\delta}{M\omega'\delta-1}$. Quindi sarà

$$\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{E^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \cdot \frac{(\omega'-1)^x \delta^{x+y} M^y \omega'^y e^{\delta t}}{(M\omega'\delta-1)^x},$$ il qual valore può mettersi sotto la forma $\frac{E^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \Sigma'^x . M^y \frac{d^{x+y} \Delta'^x \omega'^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}}$;

e perciò $$z_{x,y} = \frac{E^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \Sigma'^x . \frac{A^y E^y}{D^y} . \frac{d^{x+y} \Delta'^x \varphi(y,t)}{dt^{x+y}}.$$

E se B e D fossero nel medesimo tempo = o, fermandoci ai valori di α e β in δ ed ω, avremmo $\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{(-E)^x e^{-(C:E)t} \omega^y e^{\delta t}}{(-A)^y(\omega-1)^x}$; donde facilmente si ricava

$$z_{x,y} = \frac{(-E)^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \cdot \frac{d^x \Sigma'^x \varphi(y,t)}{dt^x}.$$

51. L'equazione del n.° 48. si potrebbe anche trattare nel modo seguente. Ponghiamovi $z_{y,y} = e^{-(t:B)} . z_{x,y}$, ed essa diventerà $Az'_{x+1,y+1} + B\frac{dz'_{x+1,y}}{dt} = Kz'_{x,y} + Dz'_{x,y+1} + E\frac{dz_{x,y}}{dt}$. Sia $z'_{0,y} = \varphi(y,t)$, e posto $x = 0$ sarà $Az'_{1,y+1} + B\frac{dz_{1,y}}{dt} = K\varphi(y,t) + D\varphi(y+1,t) + E\frac{d\varphi(y,t)}{dt} = u_{1,y}$.
Similmente facendo $x = 1$, avremo $Az'_{2,x+1} + B\frac{dz'_{2,y}}{dt} = Kz'_{1,y} + Dz'_{1,y+1} + E\frac{dz_{1,y}}{dt}$; onde si deduce

$$A^2z'_{2,y+2} + 2AB\frac{dz'_{2,y+1}}{dt} + B^2\frac{d^2z'_{2,y}}{dt^2} = K\left(Az'_{1,y+1} + B\frac{dz'_{1,y}}{dt}\right) + D\left(Az'_{1,y+2} + B\frac{dz'_{1,y+1}}{dt}\right) + E\left(A\frac{dz'_{1,y+1}}{dt} + B\frac{d^2z'_{1,y}}{dt^2}\right) =$$

$$Ku_{1,y} + Du_{1,y+1} + E\frac{du_{1,y}}{dt} = u_{2,y}.$$

Nella medesima maniera troveremo, facendo $x = 2$;
$A^3z'_{3,y+3} + 3A^2B\frac{dz'_{3,y+2}}{dt} + 3AB^2\frac{d^2z'_{3,y+1}}{dt^2} + B^3\frac{d^3z_{3,y}}{dt^3} = u_{3,y}$;
ove sarà $u_{3,y} = Ku_{2,y} + Du_{2,y+1} + E\frac{du_{2,y}}{dt}$; e generalmente

(a) $A^x z'_{x,y+x} + xA^{x-1}B\frac{dz'_{x,y+x-1}}{dt} \ldots\ldots + B^x\frac{d^x z'_{x,y}}{dt^x} = u_{x,y}$;
essendo (b) $u_{x+1,y} = Ku_{x,y} + Du_{x,y+1} + E\frac{du_{x,y}}{dt}$. L'equazione (b) ci dà (47) $u_{x,y} = \frac{e^{-(K:E)t}.(-E)^{x+y}}{D^y} . \frac{d^{x+y}\Delta'^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$.
Nella equazione (a) si può considerare x come costante, ed il di lei integrale sarà (6)

$$z'_{x,y} = \frac{(-B)^x}{A^y(-B)} . \frac{d^y\Sigma'^x\frac{A^y}{(-B)^y}\int^{x+y}dt^{x+y}.u_{x,y}}{dt^y};$$ lo che combina con le cose precedenti.

Perchè questo valore di $z'_{x,y}$ sia completo, converrà aggiungervi quella quantità, che introduce il segno Σ'^x, cioè $\frac{(-B)^y}{A^y(-B)^x}\left(\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-1)}\cdot\frac{d^{y-x}\Psi_{1,x}}{dt^{y-x}}\right.$ $+\frac{y\ldots(y-x+3)^x}{1\ldots(x-2)}\cdot\frac{d^{y-x}\Psi_{2,x}}{dt^{y-x}}\ldots\ldots+\left.\frac{d^{y-x}\Psi_{x,x}}{dt^{y-x}}\right)$; e per determinare la funzione $\Psi_{n,x}$ converrà sostituire questa quantità nella equazione data in luogo di $z'_{x,y}$. Ma si osservi che $\frac{(y+r)(y+r-1)\ldots(y+r-5)}{1.2\ldots\ldots(5+1)}$ è $=\frac{(y+r-1)(y+r-2)\ldots(y+r-5-1)}{1.2\ldots\ldots(5+1)}$ $+\frac{(y+r-1)(y+r-2)\ldots(y+r-5)}{1.2\ldots\ldots5}$. Posto ciò, facendo la sostituzione, e ponendo come sopra $\frac{BD}{A}=L$, avremo

$$o=\frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-1)}\left(\Psi_{1,x+1}-K\Psi_{1,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{1,x}}{dt}\right)$$
$$+\frac{y(y-1)\ldots(y-x+3)}{1.2\ldots(x-2)}\left(\Psi_{2,x+1}-K\Psi_{2,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{2,x}}{dt}+L\frac{d\Psi_{1,x}}{dt}\right)$$
$$+\frac{y(y-1)\ldots(y-x+4)}{1.2\ldots(x-3)}\left(\Psi_{3,x+1}-K\Psi_{3,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{3,x}}{dt}+L\frac{d\Psi_{2,x}}{dt}\right)$$
$+$ ec.

Quindi paragonando i termini simili otterremo (a) $\Psi_{1,x+1}$ $-K\Psi_{1,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{1,x}}{dt}=o$; $\Psi_{n,x+1}-K\Psi_{n,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{n,x}}{dt}$ $+L\frac{d\Psi_{n-1,x}}{dt}=o$. Questa seconda equazione è quella medesima del n.° 49., se ivi si pone $x=n-1$, $y=x$, $A=-\frac{1}{K}$, $B=\frac{E-L}{K}$, $C=o$, ed $E=\frac{L}{K}$; onde sarà

$$\Psi_{n,x}=(E-L)^{x-n+1}.L^{n-1}.\frac{d^{n-1}.e^{Kt(L-E)}d^{x-n+1}\Sigma^{n-1}F(x,t)}{dt^x}.$$

Sostituiamo il valore di $\Psi_{1,x}$ dato da questa formola nella equazione (1), ed avremo $F(x+1,t)=F(x,t)$, cioè sarà $F(x,t)$ una funzione di t senza x, e perciò $\Sigma^{n-1}F(x,t)$ sarà della forma

$$f_{n,t}+xf_{n-1,t}+\frac{x(x-1)}{2}f_{n-2,t}\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{2\ldots\ldots(n-1)}f_{1,t};$$

e siccome n si deve prendere da $n=o$ fino ad $n=x$, verrà

ad introdursi nel valore di $z_{x,y}$ una funzione arbitraria di x e t, lo che era necessario per rendere quell' integrale completo.

52. Sia adesso proposta l' equazione generale del secondo' ordine $z_{x+2,y} = Az_{x+1,y} + Bz_{x+1,y+1} + C\frac{dz_{x+1,y}}{dt} + Dz_{x,y} + Ez_{x,y+1} + F\frac{dz^x}{dt} + Gz_{x,y+2} + H\frac{dz_{x,y+1}}{dt} + I\frac{d^2z_{x,y}}{dt^2}$. Ponendo $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$, avremo $\alpha^2 = (A+B\beta+C\gamma)\alpha + D + E\beta + F\gamma + G\beta^2 + H\beta\gamma + I\gamma^2$; e se per mezzo di questa equazione svolgeremo il valore di α^x nella forma seguente

$$\alpha^x = \alpha\begin{cases} a_{0,0,x} + a_{1,0,x}.\beta + a_{0,1,x}.\gamma + a_{2,0,x}.\beta^2 + a_{1,1,x}.\beta\gamma + a_{0,2,x}.\gamma^2 \\ + a_{3,0,x}.\beta^3 + a_{2,1,x}.\beta^2\gamma + a_{1,2,x}.\beta\gamma^2 + a_{0,3,x}\gamma^3 \;\ldots\ldots \\ + a_{x-1,0,x}.\beta^{x-1} + a_{x-2,1,x}.\beta^{x-2}\gamma \ldots + a_{0,x-1,x}.\gamma^{x-1}\end{cases}$$
$$+ b_{0,0,x} + b_{1,0,x}.\beta + b_{0,1,x}.\gamma + b_{2,0,x}.\beta^2 + b_{1,1,x}.\beta\gamma + b_{0,2,x}.\gamma^2$$
$$+ b_{3,0,x}.\beta^3 + b_{2,1,x}.\beta^2\gamma + b_{1,2,x}.\beta\gamma^2 + b_{0,3,x}.\gamma^3 \;\ldots\ldots$$
$$+ b_{x,0,x}.\beta^x + b_{x-1,1,x}.\beta^{x-1}\gamma \;\ldots\ldots\ldots\; + b_{0,x,x}.\gamma^x,$$

chiamando $\varphi.y$, e $\varphi'.y$ due' funzioni arbitrarie di y e t, otterremo l' integrale completo della proposta

$$z_{x,y} = a_{0,0,x}.\varphi.y + a_{1,0,x}.\varphi(y+1) + a_{0,1,x}.\frac{d\varphi.y}{dt} + a_{2,0,x}.\varphi(y+2)$$
$$+ a_{1,1,x}.\frac{d\varphi(y+1)}{dt} + a_{0,2,x}.\frac{d^2\varphi.y}{dt^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{x-1,0,x}.\varphi(y+x-1) + a_{x-2,3,x}.\frac{d\varphi(y+x-2)}{dt} \ldots + a_{0,x-1,x}.\frac{d^{x-1}\varphi.y}{dt^{x-1}}$$
$$+ b_{0,0,x}.\varphi'.y + b_{1,0,x}.\varphi'(y+1) + b_{0,1,x}.\frac{d\varphi'.y}{dt} + b_{2,0,x}.\varphi'(y+2)$$
$$+ b_{1,1,x}.\frac{d\varphi'(y+1)}{dt} + b_{0,2,x}.\frac{d^2\varphi'.y}{dt^2} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ b_{x,0,x}.\varphi'(y+x) + b_{x-1,1,x}.\frac{d\varphi(y+x-1)}{dt} \ldots + b_{0,x,x}.\frac{d^x\varphi'.y}{dt^x};$$

ove i coefficienti $a_{x,0,x}$, ec. si determineranno come sopra (45.). In luogo di svolgere il valore di α^x si potrà egualmente prendere quello di β^y, e si giungerà in una simile maniera all' integrale della equazione proposta.

53. Ma se mancassero insieme i due termini $z_{x+2,y}$ e $z_{x,y+2}$, questo metodo non potrebbe adoprarsi, e converrebbe servirsi del seguente. Sia adunque proposta l' equazione

$z_{x+1,y} + Az_{x+1,y+1} + B\frac{dz_{x+1,y}}{dt} = Cz_{x,y} + Dz_{x,y+1} + E\frac{dz_{x,y}}{dy}$ $+ F\frac{dz_{x,y+1}}{dt} + G\frac{d^2z_{x,y}}{dt^2}$. Posto $x=0$, sarà $z_{0,y}$ una funzione di y e t, chiameremo $\varphi.y$, e la proposta ci darà $z_{1,y} + Az_{1,y+1} + B\frac{dz_{1,y}}{dt} = C\varphi.y + D\varphi(y+1) + E\frac{d\varphi.y}{dt} + F\frac{d\varphi(y+1)}{dt}$ $+ G\frac{d^2\varphi.y}{dt^2} = u_{1,y}$. Così pure, se facciamo $x=1$, avremo $z_{2,y} + Az_{2,y+1} + B\frac{dz_{2,y}}{dt} = Cz_{1,y} + Dz_{1,y+1} + \frac{Edz_{1,y}}{dt} + F\frac{dz_{1,y+1}}{dt}$ $+ G\frac{d^2z_{1,y}}{dt^2}$; donde si deduce $z_{2,y} + Az_{2,y+1} + B\frac{dz_{2,y}}{dt}$ $+ A\left(z_{2,y+1} + Az_{2,y+2} + B\frac{dz_{2,y+1}}{dt}\right) + B\left(\frac{dz_{2,y}}{dt} + A\frac{dz_{2,y+1}}{dt}\right.$ $\left.+ B\frac{d^2z_{2,y}}{dt^2}\right) = Cu_{1,y} + Du_{1,y+1} + E\frac{du_{1,y}}{dt} + F\frac{du_{1,y+1}}{dt^2}$ $+ G\frac{d^2u_{1,y}}{dt^2} = u_{2,y}$; la qual equazione posta sotto la forma

$$z_{2,y} + \alpha z_{2,y+1} + \alpha'\frac{dz_{2,y}}{dt} + \alpha''z_{2,y+2} + \alpha'''\frac{dz_{2,y+1}}{dt} + \alpha''''\frac{d^2z_{2,y}}{dt^2} = u_{2,y},$$

sarà la quantità $1 + \alpha m + \alpha' n + \alpha'' m^2 + \alpha''' mn + \alpha'''' n^2$ $= (1 + Am + Bn)^2$. Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata (a) $z_{x,y} + \omega z_{x,y+1}$ $+ \omega'\frac{dz_{x,y}}{dt} + \omega'' z_{x,y+2} + \omega'''\frac{dz_{x,y+1}}{dt} + \text{ec.} = u_{x,y}$, ove sarà $1 + \omega m + \omega' n + \omega'' m^2 + \omega''' mn + \text{ec.} = (1 + Am + Bn)^x$; e per determinare $u_{x,y}$ avremo l'equazione $u_{x+1,y} = Cu_{x,y}$ $+ Du_{x,y+1} + E\frac{du_{x,y}}{dt} + F\frac{du_{x,y+1}}{dt} + G\frac{d^2u_{x,y}}{dt^2}$, la quale s'integrerà col metodo del numero antecedente, ed il valore di $u_{x,y}$ conterrà una funzione arbitraria di y, e t.

Nella equazione (a) si può riguardare x come costante, e se la paragoniamo con quella, che abbiamo considerata al n.° 32., avremo il di lei integrale così espresso

$$z_{x,y} = \frac{(-B)^{y-x}}{A^y} e^{-(t:B)} \cdot \frac{d^{y-x}\Sigma'^x\left(-\frac{A}{B}\right)^y \int^y dt^y . e^{(t:B)} u_{x,y}}{dt^{y-x}}.$$

A questo valore di $z_{x,y}$, perchè sia completo, conviene aggiungere la quantità

$$\frac{(-B)^{y-x}}{A^y} e^{-t:B} \left(\frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{1\cdot 2\ldots(x-1)} \cdot \frac{d^{y-x}\Psi_{1,x}}{dt^{y-x}} + \frac{y\ldots(y-x+3)}{1\ldots(x-2)} \cdot \frac{d^{y-x}\Psi_{2,x}}{dt^{y-x}} \ldots + \frac{d^{y-x}\Psi_{x,x}}{dt^{y-x}} \right);$$

e per determinare la funzione $\Psi_{n,x}$ si sostituirà questa quantità in luogo di $z_{x,y}$ nella equazione proposta. Fatto ciò si troverà

$$\Psi_{1,x+1} = A1\Psi_{1,x} + B1\frac{d\Psi_{1,x}}{dt} + C1\frac{d^2\Psi_{1,x}}{dt^2};$$

$$\Psi_{n,x+1} = A1\Psi_{n,x} + B1\frac{d\Psi_{n,x}}{dt} + C1\frac{d^2\Psi_{n,x}}{dt^2} + D1\frac{d\Psi_{n-1,x}}{dt} + E1\frac{d^2\Psi_{n-1,x}}{dt^2};$$ ove $A1 = C - \frac{E}{B} + \frac{G}{B^2}$, $B1 = E - \frac{BD}{A} + \frac{F}{A} - \frac{2G}{B}$, $C1 = G - \frac{BF}{A}$, $D1 = F - \frac{BD}{A}$, $E1 = -\frac{BF}{A}$.

Questa ultima equazione è del terz' ordine, e per integrarla si potranno usare i metodi precedenti. Ma siccome il calcolo va divenendo sempre più complicato, porremo qui fine a queste ricerche, e piuttosto passeremo a mostrarne qualche uso nella Dottrina delle Serie.

ARTICOLO VI.

Dell' uso delle precedenti ricerche nella Teoria delle serie.

54. Abbiamo già veduto, che l' equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime possono esser qualche volta utili per trovare la somma delle serie. Adesso proponghiamoci il problema seguente: data la serie infinita

$$\int^x dy^x \varphi(y,t,u) + ax\int^{x+1} dy^{x+1}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + a^2\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.}$$
$$+ bx\int^{x+1} dy^{x+1}\cdot\frac{d\varphi}{du} + 2ab\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt\,du} + \text{ec.}$$
$$+ b^2\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.},$$ ove le integrazioni so-

no fatte nella ipotesi di t ed u costanti, trovare la somma di questa serie.

Se la facciamo $= z_x$, avremo $\frac{dz_{x+1}}{dy} = \int^x dy^x \varphi$

$$+ a(x+1)\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{dt} + a^2 \frac{(x+1)(x+2)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.}$$

$$+ b(x+1)\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{du} + 2ab \frac{(x+1)(x+2)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dtdu} + \text{ec.}$$

$$+ b^2 \frac{(x+1)(x+2)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{du^2} + \text{ec.}$$

$$\frac{dz_{x+1}}{dt} = \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{dt} + a(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.}$$

$$+ b(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dtdu} + \text{ec.}$$

$$\frac{dz_{x+1}}{du} = \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{du} + a(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dtdu} + \text{ec.}$$

$$+ b(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{du^2} + \text{ec.}$$

Quindi sarà $\frac{dz_{x+1}}{dy} - a\frac{dz_{x+1}}{dt} - b\frac{dz_{x+1}}{du} = z_x$.

Per integrare questa ultima equazione ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y + \gamma t + \delta u}$, ed avremo $\alpha\beta - a\alpha\gamma - b\alpha\delta = 1$, e prendendo da questa equazione il valore di β, avremo $\alpha^x e^{\beta y + \gamma t + \delta u} = \alpha^x e^{(1:\alpha)y + \gamma(t+ay) + \delta(u+by)} = \int^x dy^x . e^{(1:\alpha)y + \gamma(t+ay) + \delta(u+by)}$, purchè si prendano gl' integrali supponendo costanti $t+ay$, ed $u+by$; e quindi per il ragionamento più volte usato sarà nella medesima ipotesi $z^x = \int^x dy^x \Psi(y,t,u)$. Facendo $x = 0$ abbiamo $z_0 = \varphi(y,t,u) = \Psi(y,t,u)$, e di qui nasce il Teorema: la serie proposta è eguale al suo primo termine $\int^x dy^x \varphi(y,t,u)$, purchè si facciano le integrazioni nella ipotesi di $t+ay$, ed $u+by$ costanti. Questo Teorema è quel medesimo del n.° 21. generalizzato, e facilmente si vede, che può estendersi ad un numero qualunque di variabili.

53. Passiamo ad un problema di altro genere, che mostri l'uso delle cose esposte nella evoluzione delle funzioni in serie. Sia data una equazione $z=0$ tra le variabili x ed y, e sia da trovare il valore di una funzione u delle medesime variabili x ed y in una serie ordinata per le potenze di y.

L' equazione $z=0$, posta $y=0$, si ridurrà ad essere una equazione tra x e costanti, la quale risoluta ci darà varj valori di x. Sia a uno di questi valori, cioè sia $x-a$ uno dei fattori della funzione z, allorchè vi si pone $y=0$, ed A sia il prodotto degli altri fattori, che suppongo tutti diversi da $x-a$; è chiaro che si potrà dare alla equazione $z=0$ la forma $(x-a)A+\varphi=0$; essendo φ una funzione di x ed y, la quale svanisce, quando $y=0$. La funzione φ non avrà il fattore $x-a$, perchè se lo avesse, l' equazione $z=0$ si risolverebbe nelle due $x-a=0$, $A+\frac{\varphi}{x-a}=0$, le quali converrebbe considerare separatamente. Si può anche supporre, che la quantità a non entri in φ, perchè se ciò fosse, si potrebbe mettere un' altra lettera b in luogo di a, e si risolverebbe un problema più generale, e dopo terminate tutte le operazioni si farebbe $b=a$ per aver la soluzione del caso dato. Ciò posto, se, riguardando x come una funzione di a ed y data dalla equazione $(x-a)A+\varphi=0$, differenziamo la medesima equazione prima per rapporto ad a, e poi per rapporto ad y, avremo

$$A\frac{dx}{da}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{da}-A+\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{da}=0,$$

$$A\frac{dx}{dy}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=0;$$

e di qui dedurremo $\frac{dx}{dy}=-\frac{d\varphi}{Ady}\cdot\frac{dx}{da}=-\frac{dz}{Ady}\cdot\frac{dx}{da}$ perchè $\frac{d\varphi}{dy}=\frac{dz}{dy}$.

Se la funzione data u contenesse a, si potrebbe da essa eliminare ponendovi in luogo di a il suo valore $x+\frac{\varphi}{A}$ dedotto dalla equazione $z=0$; perciò si può supporre che a non sia contenuta in u. Per ridurre la funzione u in una serie ordinata per le potenze di y, bisogna cercare i differenziali di u presi per rapporto ad y, e per trovar questi siccome avrò bisogno di differenziare u relativamente ad y in due diverse maniere, mi servirò di due segni differenti;

cioè indicherò questo differenziale col segno $\frac{du}{dy}$, quando si considera x come funzione di y data dalla equazione $z=0$, e col segno $\left(\frac{du}{dy}\right)$, quando si riguardano x ed y come tra loro indipendenti. Sarà dunque $\frac{du}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)$ $-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{da}$; e siccome $P\frac{dx}{da}=\frac{d.\int Pdx}{da}$, allorchè nell' integrale $\int Pdx$ si suppone y costante, sarà in questa ipotesi (1) $\frac{du}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx}{da}$. Questa equazione differenziata per rapporto ad y ci darà $\frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{dy}$ $-\frac{d^2.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dz}dx}{dady}$. Ma $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{du}=-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dx}{da}$, e ponendo nella equazione (1) $\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx$ in luogo di u abbiamo $\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx}{dy}=\int\left[\frac{1}{A}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{du}{dx}+\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\right]dx$ $-\frac{d.\int\frac{1}{A^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{du}{dx}dx}{da}$. Quindi sostituendo questi valori avremo $\frac{d^2u}{dy^2}$ espresso nella forma seguente (2) $\frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ $+\frac{d.\int\alpha dx}{da}+\frac{d^2.\int\alpha' dx}{da^2}$. Differenziamo di nuovo l' equazione (2), ed otterremo $\frac{d^3u}{dy^3}=\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)+\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\frac{dx}{dy}+\frac{d^3.\int\alpha dx}{dady}+\frac{d^3.\int\alpha' dx}{da^2dy}$. Ma in vigore della equazione (1) si ritrova $\frac{d.\int\alpha dx}{dy}=\int\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)dx-\frac{d.\int(1:A)(dz:dy)\alpha dx}{da}$; $\frac{d.\int\alpha' dx}{dy}=\int\left(\frac{d\alpha'}{dy}\right)dx$

$-\frac{d.\int(1:A)(dz:dy)\alpha' dx}{da}$; $\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{d.\int(1:A)(dz:dy)(d^3u:dxdy^2)dx}{da}$.

Pertanto il valore di $\frac{d^3u}{dy^3}$ avrà la forma $\frac{d^3u}{dy^3} = \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)$ $+ \frac{d.\int\beta dx}{da} + \frac{d^2.\int\beta' dx}{da^2} + \frac{d^3.\int\beta'' dx}{da^3}$. Continuando ad operare nella medesima maniera troveremo in generale, che il valore di $\frac{d^nu}{dy^n}$ sarà della forma seguente (a) $\frac{d^nu}{dy^n} = \left(\frac{d^nu}{dy^n}\right)$ $+ \frac{d.\int B dx}{da} + \frac{d^2.\int B1 dx}{da^2} + \frac{d^3.\int B2 dx}{da^3} \ldots\ldots + \frac{d^n.\int B(n-1)dx}{da^n}$, ove converrà trovare le quantità B, B1, B2, ec.

Se chiamiamo B′, B1′, B2′, ec. i valori di B, B1, B2, ec. quando n diventa $n+1$, avremo similmente (b) $\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}$ $= \left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right) + \frac{d.\int B' dx}{da} + \frac{d^2.\int B1' dx}{da^2} + \frac{d^3.\int B2' dx}{da^3} +$ ec.

Ma l' equazione (a) differenziata ci dà $\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}} = \left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)$ $- \frac{d.\int(1:A)(dz:dy)(d^{n+1}u:dxdy^n)dx}{da} - \frac{d^2\int(B:A)(dz:dy)dx}{da^2} +$ ec. $+ \frac{d.\int(dB:dy)dx}{da} + \frac{d^2\int(dB1:dy)dx}{da^2} +$ ec. Dunque paragonando questa con l' equazione (b) avremo la seguente serie di equazioni a differenze parziali finite e infinitesime

$B' = \left(\frac{dB}{dy}\right) - \frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$; $B1' = \left(\frac{dB1}{dy}\right) - \frac{B}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$;

$B2' = \left(\frac{dB2}{dy}\right) - \frac{B1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$; ec. Se adesso osserviamo, che $\frac{d.\int B dx}{da} = B\frac{dx}{da}$, otterremo ($c$) $\frac{d^nu}{dy^n} = \left(\frac{d^nu}{dy^n}\right) + B\frac{dx}{da} +$ $\frac{d.B1dx:da}{da} + \frac{d^2B2dx:da}{da^2} \ldots\ldots + \frac{d^{n-1}.B(n-1)dx:da}{da^{n-1}}$, ove nel secondo membro convien porre il valore di x in a ed y ricavato dalla equazione $z=0$.

Ma per svolgere la funzione u in una serie ordinata per le potenze di y, bisogna, com' è noto, trovare il valore di $\frac{d^n u}{dy^n}$, quando $y=0$. Ora l' equazione $z=0$, allorchè $y=0$, ci dà $x=a$; dunque avremo il ricercato valore di $\frac{d^n u}{dy^n}$, nel caso di $y=0$, dalla equazione (c), se nel secondo membro porremo $y=0$ ed $x=a$. Per altra parte, siccome u e $\frac{dz}{dy}=\frac{d\varpi}{dy}$, e in conseguenza le quantità B, B1, ec. non contengono a, facilmente si vede, che $\frac{d^r.B(r)dx:da}{da^r}$, ponendovi $x=a$, è lo stesso che $\frac{d^r.B(r)}{dx^r}$, se vi si pone $x=a$ dopo le differenziazioni. Sarà pertanto con questa condizione

$$\frac{d^n u}{dy^n}=\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)+B+\frac{dB1}{dx}+\frac{d^2.B2}{dx^2}\ldots+\frac{d^{n-1}.B(n-1)}{dx^{n-1}}.$$

Allorchè si fa $x=a$ dopo le differenziazioni, è sempre

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^r P}{dx^{n-1}}=(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r)\frac{d^{n-r-1}P}{dx^{n-r-1}};$$

dunque avremo eziandio l' equazione $\frac{d^n u}{dy^n}=\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)+$

$$\frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1}+b1(x-a)^{n-2}+b2(x-a)^{n-3}\ldots+b(n-1)]}{dx^{n-1}},$$

ove $b=\frac{B}{1.2\ldots(n-2)}$; $b1=\frac{B1}{2.3\ldots(n-1)}$; $b2=\frac{B2}{3.4\ldots(n-1)}$; ec.: cioè avranno luogo tra b, $b1$, $b2$, ec. le seguenti equazioni $nb'=\left(\frac{db}{dy}\right)-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}.\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$;

$nb1'=\left(\frac{db1}{dy}\right)-\frac{b}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$; $nb'2=\left(\frac{db2}{dy}\right)-\frac{2b1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$;

$nb3'=\left(\frac{db3}{dy}\right)-\frac{3b2}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$; ec.

Consideriamo adesso la quantità $\frac{Ab}{z}+\frac{A^2b1}{z^2}+\frac{A^3b2}{z^3}+\frac{A^4b3}{z^4}\ldots+\frac{A^nb(n-1)}{z^n}$; la quale, se riguardiamo x

come costante, è una funzione di n ed y, che chiameremo $S_{n,y}$. Ponendovi $n+1$ in luogo di n avremo $S_{n+1,y}$ $= \frac{Ab'}{z} + \frac{A^2 b1'}{z^2} + \frac{A^3 b2'}{z^3} + \frac{A^4 b3'}{z^4} +$ ec.; e sostituendovi i valori di b', $b1'$, ec. ricavati dall' equazioni precedenti, sarà $S_{n+1,y} = -\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) + \frac{1}{n}.\frac{A(db:dy)}{z}$ $+\frac{1}{n}.\frac{A^2(db1:dy)}{z^2}. +$ ec. $-\frac{1}{n}Ab\left(\frac{dz}{z^2dy}\right) - \frac{2}{n}A^2b1\left(\frac{dz}{z^3dy}\right)$ $-\frac{3}{n}A^3b2\left(\frac{dz}{z^4dy}\right) -$ ec. Ma la quantità $S_{n,y}$ differenziata per rapporto ad y ci dà $\frac{dS_{n,y}}{dy} = \frac{A(db:dy)}{z} + \frac{A^2(db1:dy)}{z^2}$ $+\frac{A^3(db2:dy)}{z^3} +$ ec. $- Ab\left(\frac{dz}{z^2dy}\right) - 2A^2b1\left(\frac{dz}{z^3dy}\right)$ $-3A^3b2\left(\frac{dz}{z^4dy}\right) -$ ec. Quindi avremo $S_{n+1,y} = \frac{1}{n}.\frac{dS_{n,y}}{dy}$ $-\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$, l' integrale della quale è (5)
$S_{n,y} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}.\frac{d^n[\varphi.y - \Sigma f^{n+1}dy^{n+1}(dz:zdy)(d^{n+1}u:dxdy^n)]}{dy^n}$.

Per render questo valore più semplice, liberandolo dal segno integrale Σ, facciasi $\Sigma f^{n+1}dy^{n+1}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$ $= f^n dy^n.P_{n,y}.Q$, nella quale $P_{n,y}$ è funzione di n ed y, e Q funzione di y; e prendendo la differenza finita avremo $f^{n+1}dy^{n+1}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) = f^{n+1}dy^{n+1}.P_{n+1,y}.Q - f^n dy^n.P_{n,y}.Q$ $= f^{n+1}dy^{n+1}\left(P_{n+1,y}.Q - P_{n,y}.\frac{dQ}{dy} - Q\frac{dP_{n,y}}{dy}\right)$. Quindi sarà $\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) = Q\left(P_{n+1,y} - \frac{dP_{n,y}}{dy}\right) - P_{n,y}.\frac{dQ}{dy}$; e se facciamo $P_{n+1,y} - \frac{dP_{n,y}}{dy} = 0$, cioè $P_{n,y} = \frac{d^n\psi y}{dy^n}$ otterremo

$\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) = -\frac{d^n\Psi.y}{dy^n}.\frac{dQ}{dy}$; alla qual' equazione si soddisfà prendendo $\Psi.y = \frac{du}{dx}$, e $-\frac{dQ}{dy} = \frac{dz}{zdy}$, cioè $Q = C - \log.z$. Sostituendo questi valori, quello di $S_{n,y}$ diventerà $S_{n,y} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[\frac{d^n\varphi.y}{dy^n} - (C - \log.z)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right]$.

Per determinare la funzione arbitraria $\varphi.y$, facciamo $n=1$, ed avremo $S_{1,y} = \frac{d\varphi.y}{dy} - (C - \log.z)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \frac{Ab}{z}$; ma quando $n=1$, è $b = -\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}$; dunque sarà $\frac{d\varphi.y}{dy} = -\left(\frac{dz}{zdy}\right)\frac{du}{dx} + (C - \log.z)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$, e $\varphi.y = c + C\frac{du}{dx} - \frac{du}{dx}\log.z$. Avremo dunque $\frac{Ab}{z} + \frac{A^2b1}{z^2} + \frac{A^3b2}{z^3} + \text{ec.} = -\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[\left(\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}\right) - \log.z\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right]$, e ponendo $y=0$, poichè $z=(x-a)A+\varphi$, sarà $\frac{b}{x-a} + \frac{b1}{(x-a)^2} + \frac{b2}{(x-a)^3} + \text{ec.} = -\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[\left(\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}\right) - \log.z\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right]$; e moltiplicando per $(x-a)^n$, e differenziando $n-1$ volte per rapporto ad x, sarà $\frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1} + b1(x-a)^{n-2} + \text{ec.}]}{dx^{n-1}}$

$$= -\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}}{1\,.\,2\ldots(n-1)dx^{n-1}} + \frac{d^{n-1}(x-a)^n\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\log.z}{1\,.\,2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Ma siccome dopo le differenziazioni si deve fare $x=a$, si potrà omettere il termine $\frac{d^{n-1}(x-a)^n\log.z(d^{n+1}u:dxdy^n)}{1\,.\,2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}$, il quale è sempre $=0$. In fatti siccome $\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$ non diventa infinita facendovi $x=a$, il termine precedente sarà della forma

$[Q(x-a)+Q_1(x-a)^2 \ldots\ldots + Q_{n-1}(x-a)^n]\log.(x-a)$ $+R(x-a)+R_1(x-a)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + R_{n-1}(x-a)^n$, ove i coefficienti Q, Q_1, ec. R, R_1, ec. non saranno infiniti quando $x=a$. Ora questa quantità è visibilmente $=0$ nel caso di $x=a$, perchè è noto che in questo caso $(x-a)^r\log.(x-a)=0$, quando r è un numero intero positivo. Quindi finalmente nel caso di $y=0$ sarà $\frac{d^n u}{dy^n}=\frac{d^n u}{dy^n}$

$$-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}}{1.2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}},$$

ove nel secondo membro si riguarderanno le variabili x ed y come tra loro indipendenti, e si farà $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. E se chiamiamo q_n il coefficiente del termine y^n nella serie, che nasce dallo sviluppo di u, sarà con queste condizioni $q_n=\frac{d^n u}{1.2\ldots n dy}$

$$-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{1.2\ldots n dy^n}}{1.2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Una simil serie si troverà per esprimere u, qualunque altro fattore si assuma della quantità z, allorchè $y=0$; ma perchè la cosa riesca, conviene che tutti questi fattori siano diseguali. Infatti abbiamo supposto nei calcoli precedenti, che A non contenga altri fattori eguali ad $x-a$. Ma nel caso che vi siano più fattori eguali espressi da $(x-a)^i$, la quantità z si potrà risolvere in i fattori z', z'', z''' ec., ciascuno de' quali avrà la forma $(x-a)A'+\varphi'$, ove A' non contenga più il fattore $x-a$, e φ' sia una funzione di x ed y, che svanisca quando $y=0$; e ciascuno dei fattori z', z'', ec. ci darà per coefficiente di y^n nella serie di u la quantità

$$\frac{d^n u}{1.2\ldots n dy^n}-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z'}{1.2\ldots\ldots n dy^n}}{1.2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Se adesso prendiamo il medio aritmetico tra tutte queste i serie che nascono dai fattori z', z'', ec., e chiamiamo q_n il coefficiente di y^n in questa serie media, avremo

q_n

$$q_n = \frac{d^n u}{1.2\ldots n dy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n.\frac{d^n.\frac{du}{dx}(\log.z'+\log.z''+\log.z'''+\text{ec.})}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\ldots\, n dy^n}}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\ldots\, dx^{n-1}};$$

cioè, a motivo di $\log.z' + \log.z'' + \log.z''' + \text{ec.} = \log.z$,

$$q_n = \frac{d^n u}{1\,.\,2\ldots n dy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n.\frac{d^n.\frac{du}{dx}\log.z}{1\,.\,2\ldots n dy^n}}{1\,.\,2\ldots(n-1)i dx^{n-1}},$$ posto, come sopra, $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

Questo Teorema è stato dato senza dimostrazione dal sommo Geometra *Laplace* nelle Memorie dell'Accademia di Parigi dell'anno 1777., per trovare il coefficiente di y^n nella serie, che nasce dal fattore $(x-a)^i$. Noi lo avevamo già dimostrato nel Tomo IV. della Società Italiana, ma la dimostrazione precedente è assai più diretta.

Dalle cose precedenti apparisce, che il Teorema è vero, quando $i=1$; ma quando $i>1$, q_n non esprime che il coefficiente di y^n nella serie, che è il medio aritmetico tra tutte quelle le quali rappresentano il valore di u dipendentemente dal fattore $(x-a)^i$. Ma questa serie media non ci dà il valore esatto di u, perchè con essa non si soddisfà alla equazione $z=0$, cioè non si assume tra x ed y quel rapporto, che è dato da questa equazione.

Per mostrar ciò con un esempio semplicissimo, si prenda l'equazione $(x-a)^2 - y^2(b+cx)^2 = 0$, e si voglia svolgere il valore di x in una serie ordinata per le potenze di y. Saranno $x-a-y(b+cx)$, $x-a+y(b+cx)$ i due fattori della quantità z, e questi fattori ci daranno le due serie

$$x=a+(ac+b)y + c(ac+b)y^2 + c^2(ac+b)y^3 + \text{ec.}$$
$$x=a-(ac+b)y + c(ac+b)y^2 - c^2(ac+b)y^3 + \text{ec.}$$

ciascuna delle quali soddisfà all'equazione $z=0$. Se prendiamo di queste due serie il medio aritmetico, avremo quella serie, che ci dà il Teorema di *Laplace*, cioè

$$x = a + c(ac+b)y^2 + c^3(ac+b)y^4 + \text{ec.}$$

ma questa non soddisfà alla equazione $z=0$.

DELLA PIU' ESATTA COSTRUZIONE DELLE CARTE GEOGRAFICHE.

DI ANTONIO CAGNOLI.

Ricevuta li 7. Ottobre 1799.

EGli mi pare, che non l'eguaglianza assoluta di superficie, tra una Carta geografica e la porzione sferica da essa rappresentata, ma bensì la più prossima al vero, che far si possa, proporzion nelle mutue distanze de' paesi costituisca l'essenzial pregio di simili Carte. Nè può rivocarsi in dubbio, che dalla desiderevole testè mentovata propinquità non siano lontane le projezioni, o altra sorta metodi, posti avanti finora: quantunque soglia applicarsi ordinariamente alle Carte una scala fissa, e per conseguente ingannevole, onde misurar le distanze.

Nella projezione Ortografica i seni fanno le veci degli archi. Ora niuno è che non sappia, sol che abbia messo il piede sul limitare della Trigonometria, quanto sieno sproporzionate le variazioni degli uni da quelle degli altri.

Consimile sproporzione, comechè con minori mostruosità, regna nella Stereografica: dove gli archi son figurati dalle tangenti delle loro metà. V' ha error del doppio sulle distanze, negli emisferj, paragonando quelle d' intorno al mezzo della Carta con quelle dappresso ai margini.

Delle Carte marine, o di riduzione, non è da parlare, essendo dell' intimo loro instituto, deformar le distanze stranamente.

Lorgna, meritissimo fondatore di questa Società, inventò (*Principj di Geografia astronomico-geometrica*, Verona 1789) un metodo, in cui le superficie sulla sfera e sulla carta sono perfettamente uguali. Che poi le distanze de' paesi, nell' una e nell' altra, non siano proporzionali, facilmente s' intende: conciosiachè gli archi de' meridiani sono rappresentati dalle lor corde. Questa disproporzione per altro è minore di ciascuna delle tre sumentovate: e convien far ragione che il modo proposto da Lorgna serba assai

meglio l' analogia tra le distanze latitudinali de' punti terrestri.

Senza riandare altre pratiche ingegnose, trovate ed usate da celebri Geografi, posto che *toutes ont le défaut de représenter mal les distances respectives des lieux* (*Lalande, Astronomie*, 4075); verrò tosto dicendo, qualmente la costruzione, che più s' accosta, a mio credere, all' esatta rappresentazione delle distanze reciproche de' paesi, è quella che adoperai in certe tavolette celesti, pubblicate ne' miei Almanacchi ad oggetto di far conoscere agl' imperiti le posizioni relative ed i nomi delle stelle principali. Mi fo ad indicarla.

Nel quadrilatero della carta s' inscriva un cerchio, e si partisca in 360 (o qual numero summultiplice giovi meglio) porzioni eguali: poi si tirino raggi al centro, quanti faran di bisogno per le seguenti operazioni.

Supponghiamo in prima, a più facile esplicazione; che il detto centro sia il polo artico della Terra, ed il cerchio l' equatore; e che vogliasi delinear l' emisfero boreale della medesima. Ogni raggio farà le veci d' un quarto di meridiano. Divido un di questi raggi in 90 (o qual numero summultiplice più mi piaccia) parti uguali; e per ciascuna divisione fo passare una periferia, avente per centro il polo anzidetto. Queste circonferenze saranno i paralleli di latitudine.

Or volendo situare i paesi ne' respettivi lor luoghi, eleggo ad arbitrio un de' raggi per primo meridiano; e comincio da questo la numerazione de' gradi, che segno lungo il circuito dell' equatore. Ciò fatto, s' io abbia da collocar, per esempio, una città a 30 gradi di longitudine, e 40 di latitudine, la metto in quel punto, dove si tagliano insieme il parallelo di 40 gradi, ed il raggio che rappresenta il meridiano di 30.

Per tener conto dei minuti, o sia delle frazioni di grado, fo poi due scale di suddivisione, l' una per l' arco d' un grado dell' equatore, l' altra per la nonantesima porzione del raggio; con quel maggior numero di particelle, che far si possa.

Or conviene mostrare, che questa costruzione, usata in vero con limiti, ma larghissimi, produce esattezza gran-

de. Siccome il raggio è uguale a gradi 57, 3 vicinissimamente; così dividendolo in 90 parti, i gradi di latitudine, da queste rappresentati, saranno più corti di quelli di longitudine; i quali nell' equatore della Carta s'intendono conservare la vera grandezza lor propria: e la relazione sarà, come 57, 3 a 90. Adunque le distanze in latitudine saranno da per tutto minori, d'un terzo circa, del giusto. Ma gli archi di longitudine, che sono al giusto conformi nell' equatore; ne' paralleli poi, dalla sfera alla carta, osservano la ragione, come $90 \cos . n^\circ$ a $90 - n$, detta n° la latitudine. Imperocchè, rappresentando con la fig. 1. un pezzo di superficie terrestre, del quale PA, PB sono meridiani, AB arco dell' equatore, CE di parallelo; e con la fig. 2. lo stesso pezzo, descritto sul piano d' una Carta, si hanno le seguenti proporzioni.

$$AB : CE :: \text{sen.}PA : \text{sen.}PC :: 1 : \text{sen.}PC :: 1 : \cos . n^\circ$$

$$ab : ce :: pa : pc :: 90 : 90 - n$$

Dunque $AB = \dfrac{CE}{\cos . n^\circ} = ab = \dfrac{90\ ce}{90 - n}$. E però

$$CE : ce :: 90 \cos . n^\circ : 90 - n.$$

Ora, quando $n = 60$, allora $90 \cos . n^\circ : 90 - n :: 45 : 30 :: 90 : 60$, la qual ragione poco differisce da quella di 90 a 57, 3, che regna costantemente, ne' meridiani e porzioni omologhe loro, dalla sfera alla carta. Se non che quel divario, comunque tenue, diviene poi anche del tutto insensibile o nullo, per due motivi, cospiranti a perfezionare il mio metodo. L'uno è, che la ragione, $90 \cos . n^\circ : 90 - n$, s' accosta sempre a quella di 90 : 57, 3, quanto più la latitudine del parallèlo è maggior di 60 gradi. L'altro; che le distanze in longitudine nella carta si misurano sulle corde de' paralleli, e per conseguenza sono sempre minori degli archi, a' quali spetta la ragione, $90 \cos . n^\circ : 90 - n$; nè tal minoranza eccede mai quella di 57, 3 relativamente a 60, sin che l' arco non sia maggior di 60°. Per le quali cose conchiudo, che trattandosi di delineare la superficie d'un segmento sferico, l'altezza del quale sia il seno verso di 30, o di minor numero di gradi, la proporzione dalla sfera alla carta, usando il mio metodo, è la stessa, o molto prossimamente, tanto nelle distanze in longitudine sui paralleli, quanto nelle distanze in latitudine.

Egli è bensì vero, che se si voglia disegnare un segmento maggiore; a misura che le latitudini diminuiscono, i gradi di parallelo sulla carta vie più si scostano dall' eguaglianza di proporzione con quelli di latitudine. Ma come son rare le Carte geografiche, le quali comprendano oltre a 60 gradi di latitudine, sol che si eccettuino gli Emisferj e le Parti del Mondo, così mi sembra che la mia costruzione possa considerarsi a bastanza generale per conseguire una proporzione molto accurata, fra le distanze de' paesi sulla convessità del globo e quelle sul piano d'una Carta rappresentativa.

Rimane da far vedere, che questa maniera, la qual riesce agevole da eseguire e da intendere quando il polo è nel mezzo della Carta, si può applicare con egual sicurezza a tutti i casi, dovunque sia il polo, sì dentro che fuor della Carta.

Eleggasi un punto terrestre, il più centrale che sia possibile nella Carta che vuolsi distendere; e quello si consideri come il zenit in un globo. Segnato questo punto nel mezzo della Carta, si faccia passare per esso una linea retta dall' alto al basso, la qual figurerà un circolo verticale ed insieme il meridiano di quel punto. Si divida la linea in tante parti uguali, quanti sono i gradi di latitudine, che voglionsi abbracciati dalla Carta. Se adesso, fatto centro al zenit, si descrivessero cerchj per queste divisioni, sarebbero tanti almicantarat, che determinerebbero la distanza dal zenit, nella quale ogni paese debba situarsi, non che l'angolo del meridiano con la linea unitiva il paese col zenit; distanze ed angoli, che ritrovansi per via di calcolo, come or ora si vedrà. Ho accennato la descrizione degli almicantarat, per far vedere che il fondo del metodo è identico con quello già esposto pel caso del polo nel mezzo della Carta: ma fuor di tal caso è superflua la mentovata descrizione, potendosi pervenire senz' essa allo scopo, che è quel di condurre per le divisioni del meridiano li paralleli correspettivi, e tagliarli con tutti gli altri meridiani, quanti dee contenerne la Carta di grado in grado. Fatta questa rete, il situare i paesi, alla maniera già dichiarata, è faccenda lievissima. Ora per tesser la rete, fa di mestieri

determinare ogni punto d' intersecazione tra paralleli e meridiani, mediante la soluzione del seguente problema.

Essendo date longitudine e latitudine del punto eletto per zenit, non che quelle d' un paese, che vuol situarsi nella Carta, trovar l' azzimutto di questo paese, e la distanza dal zenit. Per azzimutto qui intendo l' angolo che fanno insieme nella superficie d' un globo il meridiano del zenit della Carta, ed il circolo verticale che passa per lo stesso zenit e pel paese di cui si tratta.

Due mezzi ci ha per risolvere questo problema: li trigonometrici, e i grafici. I primi sono apparecchiati negli articoli 472, 477, 478 della mia Trigonometria. Se non che, dopo aver trovato l' angolo col metodo del 472, non è più necessaria la fatica del 477 per determinare la distanza dal zenit; la quale si ottien più presto dalla formula, che or produco: *cot.* lato cercato = *cos.* angolo trovato × *cot.* secondo segmento pur trovato.

Il metodo grafico è poi esposto nell' art. 506.

Convengo, che ognuna di queste maniere è laboriosa; non però tanto, quanto può credersi a primo aspetto: imperocchè venghiamo ad un esempio, cui basterà riferire al metodo trigonometrico.

Vogliasi disegnare la Carta dell' Italia. Eleggo per centro della Carta il punto della Terra a 41° di latitudine, e 30° di longitudine orientale contata dall' Isola del Ferro; il qual punto è nel mare Mediterraneo, tra il Regno di Napoli e l' Isola di Sardegna: e tiro d' alto in basso, conforme il solito, il suo meridiano MER (*fig.* 3), E essendo il punto centrale testè mentovato, che deve cadere nel mezzo di MR. Divido la retta MR in dieci parti eguali; tanti essendo i gradi di latitudine, che intendo comprendere nella Carta. Or si tratta di segnare gli altri 7 meridiani, e gli 11 paralleli, esposti così ad occhio nella figura, la qual rappresenta la sola metà della Carta, da cui suppongo volersi abbracciati 14 gradi di longitudine. A tale oggetto fa d' uopo determinare li 77 punti d' intersecazione, che sono fuori della retta MR; per li quali è poi facile condur meridiani e paralleli, con direzioni e curvature grandemente prossime all' esattezza; essendoci all' uopo anche regoli

flessibili, che si applicano ai punti pe' quali si dee tirare la curva.

Gioverà far vedere la via più breve per effettuare i computi. A trovar, verbigrazia, il sito del punto L, è mestieri conoscer la sua distanza EL dal zenit, e l' azzimutto LEM. Or sia P (*fig.* 4) il polo, L, E gli stessi punti sul globo, così nominati nella fig. 3, in cui la ME rappresenta una porzione dell' arco PE (*fig.* 4). Dalle cose dette di leggieri s' intende, che P è un angolo di 7°, PE un arco di 49°, e PL di 44°. Si cercano l' angolo E, e l' arco EL. Ecco il calcolo.

Log.cos.P = 9.9967507 ..... l.tang. = 9.0891438

L.tang. PL = 9.9848372

L.tang. I segm. = 9.9815879 ..... l. sen. = 9.8400861

PE = 49° Compl. l. sen. II segm. = 1.0415604 ...... l.cot. = 1.0397598

— I segm. = 43 47 10 l. tang.E = 9.9707903 ...... l.cos. = 9.8635966

II segm. = 5° 12′ 50″; E = 43° 4′ 30″; EL = 7° 7′ 10″; l.cot. EL = 0.9033564

Ho legato con punti que' logaritmi, cui giova pigliar immediatamente l' un dopo l' altro nelle tavole, posciachè, con tale avvertenza, per trovarne dieci si cerca sei volte solamente; e così il calcolo può spedirsi in 7 minuti di tempo al più. Basta poi tener conto delle decine de' minuti secondi, al che sono opportune le tavole di Gardiner. Che se il primo segmento fosse maggiore di PE, il secondo sarà sempre la loro differenza, ma l' angolo E sarà ottuso.

Conosciuto quest' angolo, deve formarsi di tal grandezza sopra la Carta l' angolo MEL (*fig.* 3), col mezzo, o di buono e grande rapportatore, o d' una scala delle corde, o con altra maniera che meglio piaccia. E la lunghezza della linea morta EL si determina, trasportando i gradi, minuti, ec. dell' arco EL (*fig.* 4), trovati col calcolo, sopra la scala cui somministrano le divisioni e suddivisioni della retta MR (*fig.* 3).

Rinvenuto e segnato in tal guisa il punto L, util cosa è ricercar successivamente il punto B, e tutte le altre intersecazioni del meridiano BA, poichè in questi computi rimangono costanti i logaritmi di *cos.*P e di *tang.*P. Nel modo stesso si adoperi per ogni altro meridiano. In 9 ore al più può spacciarsi ogni calcolo logaritmico.

Descritta la rete da una parte della retta MR, per esempio a sinistra, come rappresenta la figura, gli stessi computi già fatti servirebbero a disegnarla dall' altra parte, cioè dalla destra: se non che è molto facile trasportare, per vie meccaniche, la figura fatta, a quel modo come verrebbe a stamparsi alla destra di MR, piegando la Carta lunghesso di questa linea.

Il metodo, che ho proposto, non è dunque di tanta fatica e dispendio di tempo, che debba ritrarre cui caglia ottenere quella esattezza, che ho dimostrata, e senza la quale non sono degne d'alcuna stima le Carte Geografiche.

ME-

moria Vassalli pag. 516.

moria Cagnoli pag. 658.

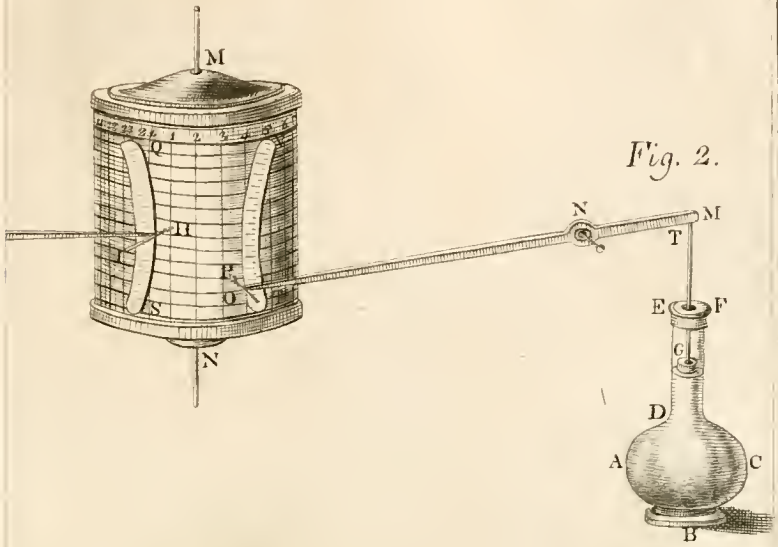
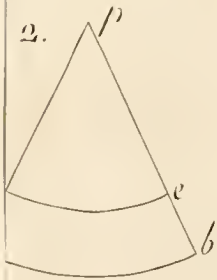
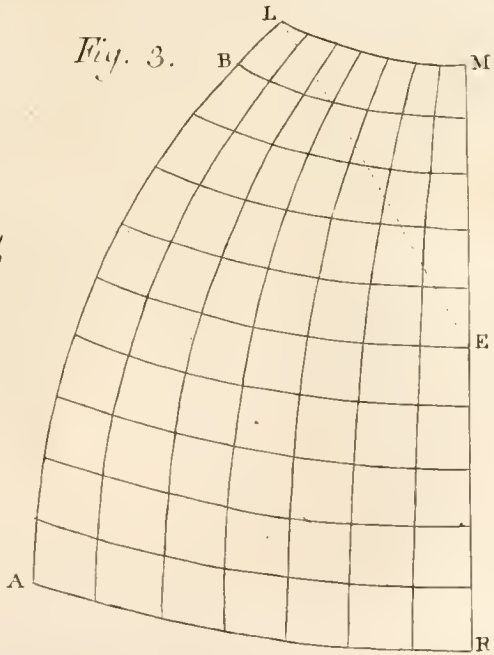
G. Gajani sc.

Memoria Vassalli pag. 516.

Fig. 1.

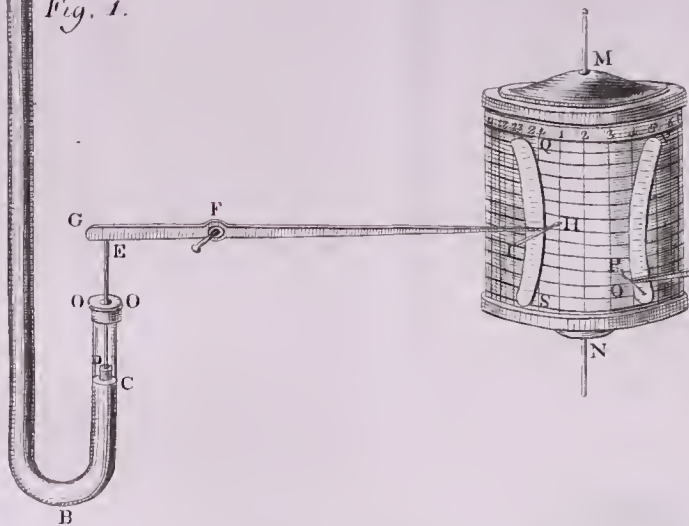
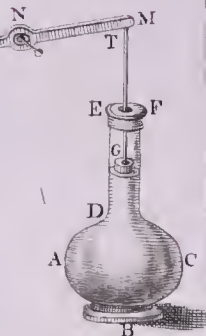



Fig. 2.

Memoria Cagnoli pag. 658.

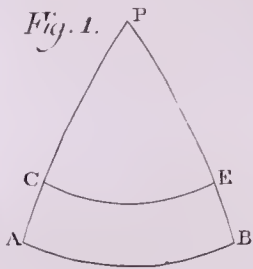
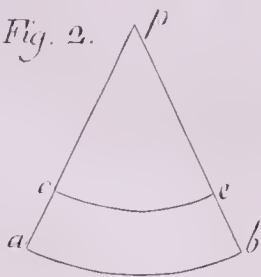
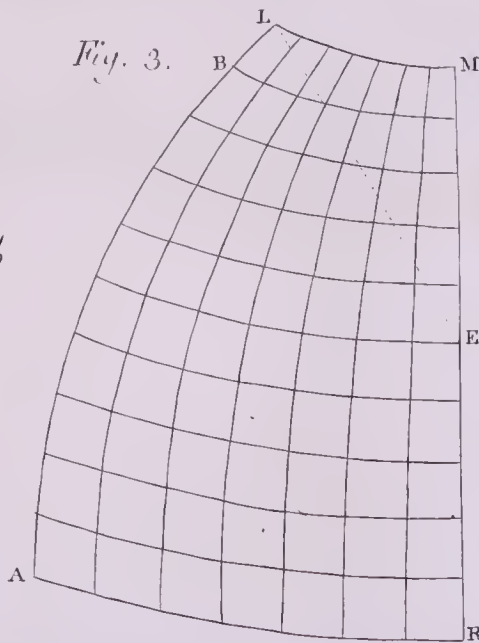
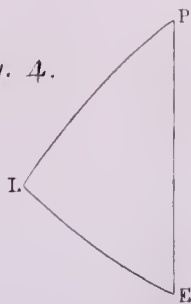



Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

G. Gajani sc.

SULL' AZIONE SPECIFICA DELLA CHINACHINA SULLE VIE URINARIE.

Di Pietro Rubini.

Presentata da Giambatista Venturi li 15. Aprile 1799.

INTRODUZIONE.

STrano sembrar potrà forse a taluno, che al giorno d' oggi nuove idee voglian da me proporsi sulla Peruviana corteccia, e nuove proprietà indicarsene, dopochè tanti, e sì voluminosi scritti sono stati su d' essa dati alla luce, dall' epoca della di lei scoperta fin quà, e con tanta attenzione ed impegno, ora con critico e severo sopracciglio, ora con amichevole e facil predilezione se ne sono esaminate le proprietà, e tanto estese le virtù, che non v' ha forse malattia contro cui non sia stata proposta, nè indicazione medica cui non siasi creduta capace di soddisfare. Forse più d' ogni altro crederanno inutile il ritornare sul trito Argomento i seguaci tanto in Italia moltiplicati del Browniano sistema, il Legislatore de' quali avendo colla filosofica sua precisione ridotte tutte le proprietà della Chinachina alla sola eccitante di lei attività; ed avendo anche fissato il grado di questa al di sotto d' altri stimoli da lui chiamati diffusibili, come il muschio, l' etere, l' alkali volatile, l' oppio, sembra così aver chiuso l' adito a nuove ricerche. Pure non avendo io giammai nella lettura dei diversi libri, che procurar mi potei su tale soggetto, riscontrato accennarsi la proprietà di cui sono per favellare nella presente Memoria, mi lusingo perciò di non farmi quì a ripetere con inutile fatica cosa generalmente conosciuta; e spero, che i Browniani stessi anzichè ritrovare quì cosa che urti il loro sistema, veder potranno nella nuova proprietà un interessante aggiunta, un nuovo anello della Medica Catena.

La proprietà, che le mie replicate osservazioni, e le sperienze con determinato fine istituite mi convinsero do-

versi attribuire alla Peruviana Corteccia, si è quella di agire particolarmente, e con una specifica e diretta forza sulle vie urinarie, ossia su tutto il moltiplice e composto apparato d' organi, che servono a separare, contenere, ed espeller l' urina, in modo da alterare e cambiare sensibilmente le loro funzioni. L' importanza propria di questi organi, il consenso loro col restante della macchina animale, ed i rapporti delle loro funzioni con tutta la vitale economia rendono meritevole delle riflessioni de' Medici un tale Argomento. Per trattarlo con qualche ordine e chiarezza, io dividerò in quattro Capitoli questa Memoria. Nel primo io raccoglierò per quanto mi fia possibile, i fenomeni, che diversi prattici Scrittori osservarono prodursi dall' uso della Corteccia nella quantità e qualità delle urine, da' quali avrebbero essi potuta conoscer l' azione specifica del rimedio, se più attentamente li avessero esaminati, e contentati non si fossero di darne un' inesatta, ed insussistente spiegazione dedotta dalle generali, e già conosciute proprietà dello stesso. Nel 2.° io produrrò le mie particolari Osservazioni, le quali serviranno a compiere la dimostrazione della sovraccennata proprietà, alle quali ne aggiugnerò altre poche analoghe, a me comunicate gentilmente da qualche medico mio amico. Nel 3.° io proporrò qualche congettura atta forse a spargere qualche lampo di luce sul principio onde la proprietà stessa scaturisce: e cercherò nel 4.° di dedurre dalle cose premesse alcune conseguenze vantaggiose per l' uso della prattica medicina.

CAPITOLO I.

Osservazioni, e pensieri di varii Scrittori sui cangiamenti indotti nelle urine dall' uso della Chinachina.

Nel rivolgere con attenzione le Opere de' Clinici, io riscontrai i seguenti aver osservati, e con diligenza notati i cangiamenti seguiti, dopo l' esibizione della peruviana Corteccia, nelle urine. Uno de' primi a rimarcare, che il flusso delle medesime grandemente accresceasi in tal circostanza, si fu lo Scrittor Anonimo del libretto intitolato, La Guerison des Fievres par la Quinquina. Videro, e notaro-

no lo stesso fenomeno Geudero presso Lentilio Med. pratt. T. 2., Albino de Febbre Quartana, Werlhoff de Febribus Sect. V., e Brunnero Francio Boedero ed altri dal medesimo citati, e Torti Respons. Jatropolog. p. 430., Clerici de vita hominis diutius tuenda p. 70., Bianchi de Hist. Hepatis, e Mautt de Cort. Peruviano apud Sandifort T. I. Scrissero pure promoversi la sortita delle urine dalla Chinachina Geoffroy Mat. Med. T. 2. ed Irvine presso Gregory. Il Blegny, Restaurando, e Jones insegnarono l' escrezione dell' urina promoversi con tal forza dalla Corteccia, che si è potuta ottener col mezzo d' essa la guarigione delle Idropi. Una Storia di questo genere ci fu lasciata da Kaaw Boeraave, riferita anche da Mautt l. c.; e Jonaldo Monro nel Thesaur. Med. Edimburg. T. 2., e White presso Rahn Advers. Med. proposero con tal vista anch' essi la Chinachina. Posson rapportarsi a questo luogo pure le guarigioni delle Idropi ottenute collo stesso rimedio osservate da Torti, Brunner, Kramer, Heister, Berger, Stork, Back, Broclesby, Lind, Tipot, ed altri. Lo Scaramucci nell' Opera intitolata Theoremata Medico-phisica parla d' un Diabetico profluvio d' urina, che attribuisce alla Corteccia. Nelle Ricerche ed Osservazioni Mediche di Londra T. I. è registrato il caso d' una soppressione d' orina creduta dipendente dallo sfiancamento de' Muscoli detrusori, che dopo aver resistito ostinatamente all' azione d' ogni altro rimedio, fu vinta coll' uso della Scorza del Perù. Veggasi Videmar de rariori quadam Ischuriæ specie.

Altri Osservatori all' opposto videro dopo il di lei uso arrestarsi o scemarsi la copia delle urine, o diventar esse pallide ed acquose. Notum enim est in praxi, dice Sagar sistem. Morb. T. 1., quod Chinachina intus data turbidas urinas impediat quasi semper. Notò la stessa cosa Vitet celebre prattico Lionese nella sua Mater. Med. all' Articolo Quinquina, e molto più decisamente nelle Osservazioni Meteorologiche. L' Albertini ne' Commentarj Med. di Bologna T. I. vide arrestarsi un flusso impetuoso, e quasi diabetico d' urina dietro l' uso della scorza; e Bartez, Vogel, e Mackenzio le osservazioni ci lasciarono di diabeti curati con essa. Weis, Pyretologiæ Tentam. Contin., ha il caso d' un' incontinenza d' urina fermata colla Chinachi-

na, pel qual malanno la propone anche Leake T. II.; e Dethardigg presso Haller Collect. T. VI. racconta d' un' urina sanguigna arrestata pure col mezzo della medesima. Pulteney de Cinchona officin. osservò or moderarsi, or crescere l' efflusso dell' urine sotto l' amministrazione del nostro rimedio, ed ivi lo propone ancora contro il Diabete.

Parerà forse singolar cosa, e poco credibile, che sì pochi sieno stati gli Osservatori, che abbian veduti sì fatti fenomeni, in mezzo ad un sì esteso, sì generale, sì profuso consumo della Peruviana droga. Adoperata questa, dopo alcuni contrasti che ebbe ne' primi tempi della sua introduzione, in tutte le specie delle malattie, in tutte le diverse circostanze degli infermi, quasi a gara da tutti i prattici di qualunque clima, tempo, o setta, tale ne è stato e n' è lo smercio, che non bastando le vastissime ed immense foreste di Cajanuma, Potosì, Ayavacca ec. a somministrarne la copia richiesta, han dovuto uomini illustri ed intraprendenti far estese ricerche in altri Paesi, e procurarne nuove copie alle incessanti domande; mercè le quali laboriose indagini si va giornalmente sostentando la necessaria provigione della stessa (1). Come dunque sfuggirono all' attenzion comune effetti tanto sensibili sugli organi dell' urina? Apparirà un tal fatto meno strano, e meno difficile a comprendersi, se si faccia attenzione alle seguenti cose. Primo: le mutazioni, che sono indotte negli organi accennati, o nella quantità, o qualità dell' urina dalla Peruviana corteccia, non si mostrano ad evidenza se non in que' casi, ne' quali od una dose alquanto forte, ovvero a lungo continuata della medesima si adopera, oppure s' incontrano parti dotate d' un' eccitabilità alquanto più del consueto pronta, e facile a risvegliarsi: Negli altri casi, quantunque esistano, non si presentàn però con quella forza, che basti a ferir gli occhi degli osservatori volgari, che soglion purtroppo appena scuotersi all' apparenza de' fenomeni più luminosi, e trascurano, e sprezzano tutti gli altri. 2.° Egli è da molto tempo che una gran parte de' Medici presta o

---

(1) Veggansene le notizie presso i Chiarissimi Scrittori Mallet, Poupée des-portes, Asti, Wright, Saunders, Rozier, Comparetti, Ruiz Berthollet, Giornal di Torino ec.

poca o niuna attenzione ai fenomeni perloppiù trovati incerti, insignificanti, inutili delle urine. Alle jattanze degli Impostori che sulla semplice ispezione di quelle fondavano diagnosi, prognosi, e cura delle malattie, successe una quasi universale non curanza delle medesime. In nessuno quasi degli Spedali da me frequentati nel tempo de' miei viaggi vidi tenersi conto delle urine, fuori del caso di certe malattie particolari; e se taluno nella prattica privata sembra pur anche metter nell' osservarle grand' attenzione, ciò forse è dovuto piuttosto ad un'antica costumanza, oppure ad una non ingenua ostentazione di diligenza. 3.° Egli è pur certo, che tante e sì diverse sostanze, che si è usato, e si usa tuttora mescolar colla Chinachina stessa, devono aver contribuito a nasconderne ed alterarne l'azione. Qualunque volta si è voluto vender la medesima per segreto, od accomodarla al palato d'un infermo dilicato e nauseabondo, o nasconderla a chi per pregiudizio l'odiava, se ne alterò l'attività, e se ne mascherarono la native proprietà. E' noto quanto l'abbiano col fuoco tormentata, e coi Chimici reagenti, o per correggerne immaginarj difetti, o per seguire la scorta di sistematiche idee: l'aggiunta de' purganti, e degli emetici, che presso molti è stata ed è sì comune, suol portarla fuori del corpo assai prima, che possa avere sviluppata la sua attività, e manifestati tutti i suoi effetti. Aggiungasi a tuttociò talora per parte dell' Infermo una speciale Idiosincrazìa (2), talora per parte della corteccia o l'immaturità, o la prava qualità, o l'adulterazione (3), o l'eccessivamente piccola dose, e si com-

---

(2) Non son rari gli esempj di persone, nelle quali la Chinachina riesce purgante, cosicchè sorte dal corpo prematuramente, od abbisogna, per esser trattenuta, dell'aggiunta di qualche opiato; mentre in altri succede che resti nel ventricolo a lungo senz' esser decomposta, od alterata in guisa alcuna, onde poi è stata rigettata per vomito. Così leggiam presso Friborg, Dissert. de usu Cort. peruv., che restò nello stomaco inalterata per otto giorni; ed Alston nella sua Lettura ha un caso simile di 14. giorni. Vedi anche Bousquet, de l'Abus du Quinquina.

(3) Era per esempio di prava qualità la Corteccia peruviana, che già vendeasi in Francia sotto il nome erroneo di China femmina, e che fu perciò diverse volte con pubblici editti proscritta. E quanto all' Adulterazione, questa è stata non di raro fatta mescolandovi ora la scorza d' Alizier, che è l'Aria

prenderà non difficilmente come sì pochi Prattici abbiano osservati i sopranotati fenomeni.

Questi medesimi però furono ben lontani dal rilevare dalle proprie osservazioni alcuna particolare e specifica azione della Chinachina sulle vie urinarie. Per ispiegare ciò che avevan pur veduto essi presero varie strade; ed ora all' una si appigliarono, ora all' altra delle generali già ammesse proprietà della Scorza. Alcuni di loro ebber ricorso alla corroborante facoltà della Chinachina, ed insegnarono, che accresciuto per questa il tono della fibra, e destati a più energico movimento i vasi, la natura veniva così ajutata a promovere per la regia via delle urine la sortita più copiosa di nocevoli materie. Questa spiegazione però oltre all' esser troppo generale, e non applicabile ad ogni caso, verrà eziandio rigettata se si osservi la prontezza con cui si manifestano i fenomeni delle urine; Poichè noi sappiamo che la Chinachina non è rimedio sì diffusibile, e sì pronto nella sua operazione corroborante, che agisca ad un tratto; ed una trista giornaliera sperienza ci insegna, che prima di recar con essa sufficiente vigore ad una macchina indebolita, se ne ricerca l' uso continuato per giorni, settimane, e mesi; mentre all' opposto la secrezione dell' urina, siccome è stato da me, come dagli altri, osservato, vien da quella alterata o immediatamente, ò coll' intervallo di brevissimo tempo. E' da notarsi pure, che con questa spiegazione si allontana bensì ma non si toglie la difficoltà; poichè dato ancora l' immediato rinvigoramento della fibra, che quì si suppone, riman sempre a spiegarsi perchè nelle vie urinarie se ne mostrin gli effetti anzicchè in ogni altra parte; e perchè tali effetti non veggansi aver luogo dopo l' uso di qualunque altro rinvalidante soccorso.

Altri che dalla presa Corteccia videro impallidire, o sminuirsi le urine, ne assunsero a causa la di lei forza astrin-

---

di Teofrasto, e dai nostri Alpigiani è conosciuta sotto il nome di Matallo, ora l' Eleuterio, o Cascarilla, or la Mahagonia, e diverse altre corteccie rese amare coll'Aloe, e colorate colla Curcuma ec.. V. Stisser Joh. Actorum Laboratorii Chemici in Accad. Juliana Specimen II.

gente, per cui contratti gli estremi vasellini, la sola acquosa parte ottenesse il passaggio. Ma è poi quella realmente dotata di tale forza? So che ciò sembra fuori di dubbio a molti Scrittori d'autorità, una lista de' quali può vedersi presso il Ch. Zeviani in una sua Memoria inserita nel primo volume degli Atti della Società Italiana, a' quali possono aggiungersi Saunders, Mallet, Irvine, Pulteney, Skeete, Kentish ed altri (4). Non mancano però Autori di credito a sostener anche la contraria opinione; i quali non accordano ritrovarsi qualità astringente fuorchè in qualche saggio di corteccia immatura, e sottile. Il Cel. Apino (5), e Bado, e Morton biasiman anzi tale sorta di Chinachina, e voglion che si rigetti dall'uso medico. L'A. del libro intitolato, Les admirables effets du Quinquina, che vuolsi esser il Blegny, avendo esaminato colla più minuta e diligente attenzione le impressioni successive, che fa essa sull'organo del gusto, dice che sentesi prima insipida, poi acre, indi amara, poi di sapori sempre diversi, fra' quali però non si sente l'impressione della stitticità. L'Alston nelle sue Mediche Letture non la trovò astringente, provandola colla soluzione di Vitriol verde, nè con altri Chimici criterj. Diversi di quelli Scrittori che la metton astringente, confessano che tal astringenza è d'un grado leggerissimo; e l'Alston l. c. dice, che avendone assaggiate diverse mostre, in alcune delle quali non v'era segno di stitticità, in altre poi vi trovò appena qualche senso d'asprezza, o di piccola subastringenza. Il Fourcroy ed il Marabelli nelle loro analisi recenti di varie specie di Chinachina non poterono mai ottener isolato l'Acido Gallico, cui si attribuisce la forza astringente de' vegetabili, e convengono della pochissima quantità dello stesso. Un altro argomento, che rende dubbia per alcuni la qualità astringente della Pe-

(4) E' da notarsi, che Saunders, Irvine, e gli altri Scrittori Inglesi più recenti, parlano il più sovente della Chinachina rossa, ch'io non ho mai adoperata nei miei esperimenti, e cui compete secondo la lor opinione una maggior forza astringente, che alla corteccia ordinaria, senza che perciò gli effetti di essa sulle vie urinarie sieno apparsi più evidenti.

(5) Se però Apino ha usato la vera Chinachina, del che sembra dubitare il Cel. Murray Apparat. Medic. Artic. Cascarilla.

ruviana corteccia si è, che non suol essa produrre gli effetti che altri rimedj di tal forza dotati producono, non arrestando essa la Catamenial perdita delle femmine, nè sopprimendo gli sputi, come lo avverte il Murray nel suo Apparatus Medicaminum Art. Cinchona, anzi promovendo generalmente le secrezioni. Ma concessa puranche la forza di lei astringente, potrebb' essa spiegare i fenomeni delle Urine? Non si incontrerebbero le stesse difficoltà, che ostano ad ammetter l' azion costrittiva d' altri medicamenti al di là delle prime vie? Non si chiuderebbero le stiptiche particelle le bocche delicatissime de' vasi lattei? Non verrebbero diluite, e quindi affievolite dal miscuglio de' sughi gastrici, della linfa, del sangue, in modo da perder ogni azione, massime dovendosi per mezzo del circolo ripartirsi egualmente per tutto il sistema? Quindi è che per tutte le ragioni inutile riuscir doveva l' esperimento di Keir, il quale in un infermo, che prendea la Chinachina, ne ricercò la parte stittica col mezzo d' un' infusione marziale nel siero del sangne estrattogli dalla vena. Quindi molti Scrittori, che ammettono l' astringente qualità della scorza, non ne deducono alcuno degli effetti di lei sul corpo vivente; V. Percival, Experiments on Adstringents. Il Celebre James nel suo Dizionario all' Articolo Quinquina, assume per principio certo, che la China ha una decisa stipticità, ma parlando degli effetti, che produce sull' Animale economia, nega che possan ripetersi da quella, anzi insegna che le amare e toniche parti, onde tal droga è composta, aprono e dilatano ogni emuntorio, destano ogni secrezione, e promuovono ogni evacuazione. Lo stesso insegnano Mautt, e Skeete con altri non pochi dotti scrittori. La sua azione, dice Cullen parlando della Corteccia come astringente, è assolutamente da non considerarsi, ed è pienamente bilanciata dalla di lei amarezza, che molti medici credono aver forza risolvente ed aperitiva. Aggiungasi a tutto questo, che nè il pallore, nè la soppression dell' urina nascono dall' uso anche liberale di astringenti molto più forti della Chinachina; e che in fine se l' astringente virtù di questa spiegasse anche bene questi fenomeni, non varrebbe poi a spiegare i contrarj dell' aumento e profluvio. Altri hanno preteso di trovare una migliore strada, attribuendo

al-

alla peruviana corteccia una virtù anodina, e sedativa. Linder de Venenis, Pulteney l. c., Home, Hoffmann ed altri insegnarono goder essa di tale facoltà; e Rocco Casato presso Morton, e Langio, e Taskiewitz, Pharmaca Regni Vegetab., l'annoverarono fra' Narcotici. Si suppose, che quando preesisteva alla esibizione del rimedio uno spasmo nervoso contraente i vasi estremi, e quindi capace di diminuir la copia, od il color delle urine, o quando l'irritazione stessa nervosa promovea un disordinato profluvio delle medesime, in allora la forza calmante del rimedio togliendo la condizione morbosa de' nervi cambiasse così la copia, e la qualità di quelle. Ma consultando le pure Osservazioni è facile avvedersi, che non in tutti i casi, ne' quali accade il fenomeno de' cambiamenti, è ammissibile un tale stato di previa irritazione, o spasmo. Inoltre se la cosa fosse in tal guisa, si vedrebbero accader gli stessi effetti sotto l'uso de' rimedj, a' quali si attribuisce una forza sedativa molto più forte, che alla Chinachina; eppur ciò non ha luogo se non se in qualche caso particolare. Infine molti sono i Medici, che ricuseranno d'ammetter nella Chinachina una sedativa qualità, e tra questi certo tutti i Browniani, che l' hanno totalmente bandita dalla medicina.

Non mi tratterrò a discuter l'opinione di coloro, che hanno messa in campo la così detta Diuretica virtù della peruviana corteccia. Non meno impropriamente si attribuisce ad essa una tale facoltà, che agli altri rimedj collocati volgarmente nella stessa classe, la quale dalla filosofica luce di questo secolo è stata per modo tale diminuita, che sembra non isfuggire l'annientamento, che per un certo rispetto tuttor conservato alle antiche opinioni. Confessa il Cullen candidissimo Scrittore di essere stato condotto nel tesser il Catalogo dei Diuretici dalla sua condiscendenza per altri Scrittori, anzicchè dalla propria esperienza. Mi ricordo d'aver sentito in Montpellier un celebre prattico Professore, il quale negando la forza diuretica di tutti gli altri rimedj, la conservava, quasi affinchè non se ne obliterasse la memoria, alle sole Cantaridi; le quali però io non veggo perchè debban esser eccettuate dalla proscrizion generale; imperocchè se talora aumentan le urine, ciò che nega tra gli altri il Cel. Carmichael Smith, non dipende ciò

da alcuna peculiare, e distinta forza, ma bensì dalla stimolante loro attività, per la quale sè agendo sugli organi uropojetici aumentan talvolta il flusso delle urine, ben sovente però ancora lo diminuiscono, ed anche lo arrestano, sicchè non meno loro converrebbe il nome di Antidiuretiche, che di Diuretiche. Ma non è questa la sola classe di rimedj, che meriti d'esser rigettata: molti altri conservano ancora un improprio nome desunto da facoltà o fittizie, od incerte, od accidentali, e dipendenti dalle peculiari circostanze dell'Animale, cui vengono applicati. "*Vagi*, dice l'Illustre Retz ne' suoi prolegomeni alla Farmacologia del Regno Vegetabile, *Vagi, ne dicam ficti tituli Cardiacorum, Alexipharmacorum, Cephalicorum, Emmenagogorum, Anthelminticorum, &c. totas paginas occupant, & Tyrones confundunt*." Da lungo tempo i Medici di buon senso desiderano in questo una riforma. Una generale ne ha proposto il genio perspicace di Brown, la quale benchè per la sua arditezza abbia sbigottiti coloro, che tenacemente attengonsi alle antiche idee, pure se venisse con qualche aggiunta e cambiamento, che l' osservazione ed il raziocinio indicano, attamente modificata, non parrebbe da rigettarsi. Quanto alla diuretica facoltà della Corteccia, se ne vede l'improprietà riflettendo che dalle Osservazioni altrui già da me citate, come pur dalle mie, che riporterò in appresso, risulta, che dessa tanto è atta ad aumentar la diuresi, o sia l' uscita dell' urina, come a frenarla, ed a trattenerla; onde dovrebbe credersi dotata di opposta facoltà, chiamarsi con opposti nomi, e collocarsi in due opposte classi, cosa che ognuno ben vede ripugnare alla filosofica semplicità.

Dalle cose riferite in questo Capitolo, è chiaro aver diversi Scrittori attenti e perspicaci notato gli effetti evidenti, che produce la Chinachina nelle vie orinarie: eglino però s' ingannarono credendoli derivanti dalle generali proprietà di quella, nè in alcun modo pensarono a rilevarne la vera cagione, la quale a me sembra doversi collocare in una particolare e specifica azione incitante, che la scorza esercita sugli Organi uropojetici. A meglio stabilire l' esistenza di tal azione, e a determinarne per quanto da noi si potrà la natura serviranno le seguenti osservazioni.

CAPITOLO II.

Osservazioni che provano la specifica azione della Chinachina sulle vie Urinarie.

OSSERVAZIONE I.

Un uomo di 40 anni di buona costituzione, forte, avvezzo alle fatiche, fu preso da ferocissima febbre quartana, che negli accessi lo portava sino al delirio. Gli si fece trar sangue dal medico che lo curava, indi si passò sollecitamente all' uso della Chinachina. La dose assegnatagli da prendersi in più volte fra due parossimi, fu di due once. Ma egli non bene intesa la prescrizione, tutta se la tracannò in una sola volta. Il dì dell' Accesso lo trovai in letto, fiammante in viso, con polso non molto frequente, ma forte, e duro; non si era sentito alcun freddo, sbadiglio, dolor di capo, od altro indizio di febbre.

Ma lo tormentava una fiera stranguria, non passando che pochissima urina di tratto in tratto con forti dolori, e quella d' un color rosso carico. Un salasso assieme con alcune diluenti bevande acquee rimisero in lui nel pristino stato l' importante escrezione. Nè prima aveva egli mai provata simile difficoltà di passar l' urina, nè dopo ebbe più a provarla, almeno per un anno, tempo dopo il quale nelo interrogai.

OSSERVAZIONE II.

Un Uffiziale avanzato in età, robusto però ancora, si mise in letto con una semplice terzana. Dopo alcuni accessi di questa, che molto lo travagliarono, prese la Chinachina. La febbre vinta più non si rivide; ma successe a lei una soppression pertinace d' urina, con violentissimi dolori, per cui smanioso, e semiconvulso agitavasi l' infelice. Interrogato ei narrò d' avere ne' giovanili suoi anni sofferta una lunga ed ostinata gonorrea. Erasi questa acchetata dopo l' uso di varj rimedj, lasciando però in quelle vie un guasto, che in questa occasione si manifestò. Tre volte gli

fu cavato sangue, denso sempre, nero, e di dura cotenna ricoperto. Gli furono fatte delle acquose rilascianti fomente, ed applicati de' Clisteri emollienti, dopo un lungo adoperar de' quali scorse finalmente l' urina, che depositò in breve tempo una bianca, pesante, liscia materia, affatto analoga al pus, in tanta copia, che formava un buon terzo della massa totale. (6) Questo deposito si ebbe in seguito per più giorni nell' urina, finchè continuando sempre gli stessi rimedj, ricuperò l' infermo la salute.

OSSERVAZIONE III.

Gli stessi fenomeni furono osservati in un altro infermo anche più vecchio, stato anch' esso negli anni suoi verdi soggetto a lunga e grave gonorrea. Solo le urine che questi passò dopo l' uso de' rimedj, che furono gli stessi accennati nella superior osservazione, non erano già purulente, ma limpide anzi, e chiarissime. A costui dopo otto giorni ritornò la febbre per essersi esposto imprudentemente all' aria umida d' una sera piovosa. Ripigliata la peruviana corteccia cessò la febbre, ed arrestossi di bel nuovo l' urina, la quale per altro si rimise in corso più facilmente che la prima volta. Ora non potrebb' egli pensarsi che sì nell' Infermo di questa osservazione, come in quello della precedente, qualche ulcera un poco estesa avesse devastato nel tempo della precorsa gonorrea le parti superiori del Canale dell' uretra vicino alla vesica, onde una tenue Epidermide rinata, coprendo leggermente le abrase

(6) L' espulsione d' una certa materia che pel colore, densità, ed altre esteriori apparenze ora somiglia al muco, ed ora al pus è un fenomeno assai comune nelle persone giunte all' età senile, che ebbero anteriormente gonoree lunghe, e ripetute; e si mostra qualunque volta le parti destinate ad esportar l' urina vengono aizzate da qualche stimolo non ordinario. Ponno vedersi simili osservazioni presso i prattici V. Deidier Consult. Ha un caso simile il Chiariss. Gilibert ne' suoi Avversarj Medici; ed a questa stessa, o ad un' analoga classe di malattia devon ridursi il Catarrhus Vesicae di Lieutaud, la Pyuria del Sauvages, il Glus di Linneo, la Chilaria di Vogel, la Cistirrhea di Parnham ec. e fors' anche la Tabes Chiluritica del Cel. Stollers.

parti, più sensitive le lasciasse e più esposte alle impressioni de' fluidi piccanti, che per colà passavano? Oppure questa sensitività maggiore sarebbevi stata lasciata dalle infiammazioni, che tali gonorree avranno accompagnate? (7)

---

(7) E' un' osservazione costante in prattica, che le parti, che furono occupate da flogosi conservano molte volte una squisita, incommoda, e qualche volta pericolosa sensibilità per lungo tempo, ed anche per tutto il corso della vita. Così coloro, che soffrono flogosi reumatiche, od artritiche agli Omeri, od a qualunque altra parte, cangiati quasi in ambulanti barometri, risentono in quelle stesse parti la forza de' cambiamenti delle stagioni, e sono tormentati da quelle impressioni, che neppur sentivan dapprima. La Pleuritide, e la Peripneumonia lascian una somma sensibilità al petto, ed una proclività grandissima alle recidive. Il Chiariss. Panzani nel Giornal di Medicina di Venezia notò che dopo le Enteritidi rimaneva un certo grado di irritabilità nelle tonache intestinali, per cui ad ogni più leggera cagione, sovente neppur riconoscibile, ritornano i dolori, i tormini, i borborigmi. E' pur da vedersi ciò che il Chiariss. Kirkland scrisse ottimamente sulla somma sensibilità che succede all' infiammazione delle parti esterne. Io non so, che sia stata finora proposta una plausibile spiegazione di questo fenomeno. Huxam con qualche altro ha cercato, parlando di Casi di pleuritidi, e di peripneumonie, d' intenderlo ricorrendo alle adesioni che nelle infiammazioni nascevano, ed al coartamento de' vasi. Ma le adesioni non han luogo in tutti i casi; e sono ben sovente affatto innocue, come lo ha provato fra gli altri il De Haen; e tanto è lungi, che si coartino i vasi nelle infiammate parti, che anzi per certissime osservazioni, come vedremo in appresso, è provato ch' essi si dilatano. Io sarei portato a pensare, che durante il corso della flogosi avesse luogo un considerevol cangiamento nella tessitura, ed organizzazione de' nervi della parte affetta, dal quale origin traesse l' accennato fenomeno. Egli è provato dalle osservazioni di Mascagni, Hunter, Rezia', Testa, Cruiskank, Pratolongo, Moore ec., che i vasi Sanguigni, i Linfatici, la Cellulare, le Cartilagini, la stessa Ossea tessitura sotto l'energia, ed il bollor della infiammazione sviluppansi, estendonsi, crescon di mole. Tale si è fa forza dell' aumentata azion della vita in tale circostanza, che veggiam non di rado nuove organiche produzioni formarsi, quali son per esempio alcune Cellulari tele, che nella pleuroperipneumonia si sviluppano (che distinguer devonsi, come nota il Maincourt, dalle gelatine trasudanti, che ivi talvolta trovansi rappigliate) che a guisa di molli membrane attaccan la pleura al polmone, e su per le quali si ramificano numerose propagini di rossi vasellini, pure di nuova formazione, che osservò il primo, se non erro, il Dott. Hunter, e che il Cel. Kline Professor d' Anatomia in Londra riempì, spingendo l' injezione pe' vasi bronchiali. L' Analogìa per-

OSSERVAZIONE IV.

Una donna d' anni trentaquattro, soggetta alla discrazia scorbutica, e ad altre croniche affezioni, essendo gravida d'otto mesi, presa un giorno da collera vivissima, ed avendo fatto qualche movimento impetuoso, si sentì premature le doglie del parto; uscì di lì a poco quantità d'acqua, e dopo l'intervallo di due interi giorni uscì vivo il fanciullo. Non sortendo spontanea la placenta, l' ostetricante imperito pensò di doverla strappare a forza, ed accintosi all' opera già ne avea crudelmente svelta una porzione, allorchè essendo io colà sopraggiunto, e conoscendo dalle di lei strida, e divincolamenti l' enorme violenza, che faceasi all' utero, impedii che più oltre fosse tormentata, e la feci riporre in letto, ove il dì seguente sgravossi da per se stessa con somma facilità della rimasta porzione di placenta, tuttochè l' irritazione sofferta dall' utero vi avesse messo qualche ostacolo. Calmata l' infiammazione, la febbre che v' era unita, andò man mano decrescendo sinchè giunse a non aver più se non la forza d' una ordinaria cotidiana, di cui assunse anche il regolar tipo: Fissatasi a questo punto vi si

---

tanto ci persuade, che anche nei nervi possa aver luogo in simili circostanze qualche simile espansione, sviluppo, o vegetazione. Nè mancano alcuni fatti proprj a confermar quest' idea. Il Cel. Cruishank vide nelle parti morbosamente sviluppate essersi di mole aumentati anche i filamenti nervosi, che per esse scorreano. Noi leggiamo nelle Medical Observations and Inquiries, che la stessa midolla oblongata si trovò mirabilmente espansa di volume dopo una concussione ricevuta in una caduta, circostanza, che va sempre accompagnata dall' infiammazione della stessa midolla, e delle sue membrane, come mi è accaduto di verificare con diverse sezioni di Cadaveri. Altri fatti ponno vedersi presso gli autori, che si occuparono delle riproduzioni Animali, comprovanti che la recisione, l' irritazione, e la flogosi quindi risultante hanno sviluppati talora nuovi nervei filamenti. Ora non è egli ragionevole il pensare, che fibre di fresco sviluppo, e per così dire di novella organizzazione, abbiano anche, e conservino per qualche tempo un grado maggiore di sensibilità, ed un' eccitabilità più squisita di quella, che si compete a stami di più antica formazione già alterati, ed intormentiti da stimoli ripetuti?

arrestò qualche tempo, finchè si decise d' interromperne il corso dannoso mediante la peruviana corteccia. Alla forza di questa cedette tosto la febbre, ed eccoti immediatamente gravi dolori alla vesica, coll' orina ardente, resa in pochissima quantità per volta; i quali effetti narrommi essa d' aver altre volte provati, quando avea presa per altri suoi incomodi la stessa droga, di cui era amicissima. Le fomentazioni, e gli altri soliti mezzi la guarirono.

OSSERVAZIONE V.

Un giovine robusto avvezzo alla fatica, d' età d' anni venticinque circa, fu preso a un tratto da un violente dolor alle reni con febbre ardita, polso duro e forte, volto acceso, pelle arida, e sete gagliarda. Passava un' urina un po' rossa, con sedimento bianco, arenoso, terreo. Sentiva eziandio un dolor cupo ed ottuso, che si estendeva lungo le cosce, ed aveva un senso come di retrazione ai testicoli. La malattia fu giudicata una Nefritide calcolosa dal Medico che la vide. Gli fu tratto sangue, e gli si fecero ingollare copiose bevande. Dopo il corso di ventiquattr' ore sentì egli gradatamente mitigarsi i suoi dolori, che di lì a poco svanirono quasi affatto. Ma poco tempo dopo rinnovaronsi ferocemente collo stesso apparato de' sintomi di prima. Allora fu, ch' io lo vidi per la prima volta. Questo ritorno di parosismo, che malgrado gli usati rimedj non era men violento del primo, unitamente ad un riflesso fatto alla Costituzione in allora regnante di febbri intermittenti, mi fecero sospettare subito, che questa supposta Nefritide altro non fosse, che una mascherata perniciosa intermittente. Varie cose però si opponevano al mio giudizio; fra le quali la continuità del dolore, che quantunque al cessar della febbre rimettesse di molto, pur languidamente, e quasi direi in lontananza, si facea sentire perpetuamente; il polso che perdeva sì la frequenza febbrile, ma rimaneva duro, e vibrato; il passaggio delle arenule, che non pareva già un nervoso accidentale sintoma, ma sembrava supporre un organico vizio già da qualche tempo esistente; ed il sentimento infine del Medico rispettabile, che prima di me visto aveva il malato. I rimedj per-

tanto, che sembravano avergli giovato l' altra volta furono replicati, ed apparentemente con successo, giacchè scemati in considerabil maniera i dolori, la febbre pure cessò, si umettò la pelle, e l' urina comparve naturale, e senza deposizione. Ma poco durò sì fatto miglioramento, ed il terzo accesso comparve non meno violento de' primi. Il periodo troppo rimarchevole del male non mi lasciò luogo a dubitare, che tentar non si dovesse d' impedire colla scorza del Perù il formidabile ritorno del fiero dolore, e della febbre. Ne prese di fatti l' infermo coraggiosamente un' oncia e mezzo entro dodici ore, e così tagliò benissimo il corso alla febbre, ed al dolore. Ma che? un forte, e doloroso spasimo si fece sentire alla region della vesica, ed impossibile fu all' infermo di passare pur una gocciola d' urina. Se gli fecero immediatamente delle calde fomentazioni, e prese dell' Emulsioni in considerevole copia, medianti i quali ajuti passò infine l' urina raccolta, che apparve bensì rossa, ma senza sedimento. In seguito egli stette bene, nè sentì dolori, febbre, od altro incommodo per lo spazio d' otto giorni; dopo i quali non avendo egli voluto prender altra dose del rimedio, o riguardarsi dall' impressioni della stagione piovosa, rinnovossi la febbre col dolore stesso di prima. Troncossi questa volta pure il progresso di tutti i sintomi col mezzo della Chinachina, e questa volta pure l' urina si soppresse, che però si rimise facilmente in corso cogli stessi ajuti, dopo di che restò il giovine affatto libero e sano.

OSSERVAZIONE VI.

Una femmina di trent'anni, di debole tempra, e d' un sistema di nervi assai infiacchito per ragione di travagli passati, e di sofferti patemi d' animo, divenne gravida. Tale fu lo sconcerto, che questo novello stato portò a quell' atona macchina, che oltre un colore cachetico, una nausea quasi continua, ed una somma prostrazione di forze, le indusse anche nel quarto mese una lenta cotidiana febbretta. Invano si usarono i più possenti rimedj roboranti, fra' quali anche qualche piccola dose di Chinachina, che si dovette presto lasciare, perchè lo stomaco non la soffriva.

Con-

Continuando senza tregua la febbre, e tutte pervertendosi le funzioni, fra l' altre cose si indebolì talmente il sistema urinario, che scorreanle pel letto involontarie, e senza che se ne accorgesse, le urine copiose al segno, che superavano d' assai la copia della bevanda, massime negli ultimi tempi, ne' quali ella desiosa di fermar quest' incomodo flusso, si mise in capo di soffrir la sete. Avendo io di già formata qualche idea dell' azione della Corteccia su quelle vie, pensai di ricorrer ad essa. Siccome però lo stomaco non la soffriva, pensai di servirmene in Clisteri. Cominciai dunque a fargli applicare copiosi Clisteri di Chinachina; e nel termine di due, o tre giorni l' inferma non passò più che una copia d' urine discretissima, ed affatto proporzionata alla quantità delle bevande, delle quali ripigliò l' uso. Continuò però la debolezza universale e la febbre, per cui sgravatasi nell' ottavo mese d' un languido feto, ed indebolita di più per una copiosa perdita di acquoso sangue, non sopravvisse al parto che una sola giornata.

OSSERVAZIONE VII.

Un vecchio settuagenario era ormai ridotto dall' età e dai disordini a quel grave senile spossamento, per cui le forze animali agli impulsi della volontà languidamente rispondono, perdesi il vigore de' sensi, e tutto spira inerzia e torpore. Cominciò a sentire in un braccio de' leggeri attacchi di paralisia, per cui ora questo, ora quel movimento gli si rendea difficile ad eseguire. Indi quasi facesse la malattia passaggio alla vessica, cominciò a non essere più padrone di ritenere l' urina, che a stilla a stilla involontariamente gli esciva senza alcun dolore. In fine per un ultima metamorfosi della malattia l' urina gli si soppresse del tutto, perlocchè ricorrere si dovette alla Sciringa, e farne un uso giornaliero. Da tali antecedenti, dal non sentirsi col tatto alla regione della vessica alcuna durezza o resistenza, fuori di quella, che presentava talora la vessica stessa rigonfiata d' urina, infine dal non sentire l' infermo alcun dolore nell' atto che gli introducean la Sciringa, parve credibile, che non d' altronde avesse origine questo disordine, che da una cominciante paralisi della vessica. Era per-

ciò indicato qualche rimedio, che portando l' azion sua principalmente sulla parte affetta, la stimolasse, l'incitasse, e la ridestasse al suo perduto uffizio. A tal fine fu messa in uso la Chinachina alla dose leggera di due dramme al giorno, oltre qualche Clistere di essa. Continuatone l' uso per pochi giorni, cominciarono a sgorgare spontanee, ed in copia le urine, dense, e deponenti un sedimento bianco, pesante, simile al pus. Infine il vecchio fu felicemente ridotto a non aver più bisogno della Sciringa.

OSSERVAZIONE VIII.

Un vecchio settuagenario si mise in letto per una febbre terzana. Egli aveva oltracciò da lungo tempo un' incontinenza d' urina, per cui era costretto a tenere continuamente davanti fra le coscie con sommo incomodo un vaso, che le stillanti gocce ne ricevea. Essendo egli stato messo all' uso della Corteccia colla veduta di troncare la febbre, ebbe nello stesso tempo un sensibile vantaggio anche per l' altra sua malattia, onde nascendo qualche speranza, proseguì a prender il rimedio alla dose di sei dramme il giorno per tre settimane circa, dopo le quali ei si trovò guarito perfettamente e dalla febbre, e dalla incomoda incontinenza d' urina.

OSSERVAZIONE IX.

Un uomo di quarant' anni circa, altronde assai robusto, cominciò a sentire tutti i giorni tre, o quattr' ore circa dopo il pranzo un violento dolor di testa, che ora gli toglieva i sentimenti, ora lo trasportava delirante, e lo agitava smanioso. A por fine al ricorrente malore sì adoperò la Chinachina, della quale ei ne prese un' oncia e mezza in dodici ore. L' uso di essa fu seguito da una difficoltà tale d' urina, che gli era d' uopo, qualora ne sentiva gli stimoli, alzarsi in piedi, indi far forza, e premito considerabile ogni volta per espellerne porzione. Vinta però la Cefalea, e quindi intermesso l' uso della Chinachina, un tale incomodo andò man mano diminuendosi, ed in poco tempo finì.

OSSERVAZIONE X.

Un uomo robusto, d' anni 40 circa, barbiere di professione, fu assalito da una fiera terzana, di cui non accusava altra causa, che le vicende d' una piovosa e fredda stagione. Ammesso nella mia Clinica Scuola cominciò a prendere la peruviana corteccia alla dose di mezz' oncia al dì, due dramme cioè la mattina, e due la sera. Prese appena le prime dosi del rimedio, ecco rendersi difficile la escrezione delle urine, passandone poche, e queste con molto bruciore e molta pena. Finchè continuò l' uso dello stesso continuarono il bruciore, e la difficoltà; ommesso quello, giacchè la febbre fu presto troncata, si rese pur naturale il corso dell' urine. Egli non avea mai sofferto simile incomodo in vita sua; e fu nell' urine di quest' uomo, che da noi si istituirono alcuni de' Chimici sperimenti, che riferiremo nel Capitolo seguente.

OSSERVAZIONE XI.

Ad aggiungere forza alle antecedenti potrà servire un' altra mia, benchè imperfetta osservazione. Un vecchio quasi ottuagenario avea da molto tempo una incomodissima incontinenza d' urina, per cui era sforzato, come l' infermo dell' osservaz. VIII. a tener sempre dinanzi un vaso. Cominciai a dargli in piccola dose la scorza, tuttocchè poco sperassi di guadagnare in una sì invecchiata malattia. Ebbi però motivo di rimaner contento dell' attività del rimedio, giacchè in meno d' un mese era egli in istato di restar qualche tempo senza che gocciola d' orina sortisse, quantunque poi, allorchè erasi accumulata in certa copia, involontaria alfine sortisse. Ma fu interrotto da uno sgraziatissimo accidente il corso dell' osservazione; poichè all' accostarsi dell' inverno, preso l' infermo da una grave peripneumonia di quelle, che sono sì fatali alla vecchiaja, dovette miseramente soccombere.

OSSERVAZIONE XII.

Alle fin quì esposte osservazioni mie proprie, io quì ne aggiugnerò alcune altre, che alcuni miei amici Professori di Medicina, co' quali io avea tenuto discorso della specifica azione della Chinachina, gentilmente con loro lettere mi comunicarono. La prima di queste, fatta in se medesimo, così mi espose in iscritto l' ingegnossimo giovine Dott. Rota, Medico Parmigiano. „ Fui sorpreso da una terzana.
„ Alcuni giorni prima era tormentato da un forte raffred-
„ dore. Entrava la febbre con brividi di freddo, gagliarda
„ tosse ma secca, dolor di capo, fitte alle gambe ed ai
„ piedi. Al freddo, che per ben quattr' ore mi tormenta-
„ va, succedeva un caldo insopportabile, ed in questo
„ tempo manifestavasi un subdelirio; ed in meno di dodici
„ ore terminava l' accesso senza alcun sudore. Dopo il ter-
„ zo periodo, premesse le necessarie purghe, coll' uso del-
„ la Chinachina fu troncata la febbre. Alla dose di due,
„ indi d' una dramma per giorno, o alternando, continuai
„ l' uso di questa salutare Corteccia sino ai venti giorni.
„ Quando inaspettatamente il ventunesimo dì fui di nuovo
„ assalito dalla stessa terzana, accompagnata dalli stessi
„ Sintomi, ma di maggiore intensità. Sette accessi soffersi
„ di questa febbre; indi di nuovo per mezzo della Cor-
„ teccia fu questa scacciata. Variato il metodo di prender-
„ la, ne pigliai un' oncia in un giorno; indi ogni sette-
„ nario, in due dì ne trangugiavo un' altr' oncia, sino a
„ compiere la somma di cinque oncie. In questa ricaduta
„ sotto l' uso della China osservai un fenomeno non pria
„ atteso. Presa la prima oncia di China provai un senso
„ d' ardore nell' urinare, di cui incolpai il calor del letto;
„ il che mi accadde pure la prima volta, quando per fu-
„ gar la febbre pigliai la stessa dose dell' anzidetto rimedio
„ in egual tempo. Questo in pochi giorni spontaneamente
„ si dileguò. Prendendo la seconda oncia di China, ecco,
„ di nuovo presentarsi lo stesso incomodo, congiunto con
„ un dolore acuto intermittente nel Canale dell' uretra, cor-
„ rispondente alla base del glande dalla parte sinistra, e
„ tratto tratto sentiva come un corpo, che per esso Ca-

,, nale discendeva, e null' altro era, che un umore denso,
,, e viscoso, come appariva dai segni, che lasciava impres-
,, si sulle biancherie asciugandosi. In allora solo avvertii
,, tale cosa, sebbene forse poteva essermi accaduto lo stes-
,, so altre volte. Ogni dì più andava mitigandosi quest' in-
,, comodo, sinchè quasi estinto risorgeva di nuovo ripi-
,, gliando la China. Una mattina, mentre mi alzavo dalla
,, seggetta, a cui mi avea obbligato sedere il febbrifugo
,, preso il giorno avanti, e nella stessa mattina, dopo di
,, aver provati i soliti dolori, vidi con mio batticuore
,, aderente al bordo anteriore di detta seggia una materia
,, bianca, e glutinosa. Questa non aveva odore alcuno, e
,, sembrava un vero moccio. In tutto questo tempo le uri-
,, ne erano ora dense, ed ora chiare, senza osservarvi pe-
,, riodo alcuno. Per quanto tempo continuai l' uso di det-
,, ta scorza, per altrettanto mi si presentarono gli stessi
,, fenomeni, e cessato l' uso di essa, cessaron pur essi per
,, non ricomparire mai più. ,,

OSSERVAZIONE XIII.

La presente osservazione così fummi comunicata dal Chiariss. Dottor Ghizzoni, che con massima lode esercita la Medicina in Piacenza.

La Teresa Botti nubile Piacentina, dotata di un abito di corpo umido, pieno, e rilassato, soggetta quasi ogni mattino da molto tempo a vomiti pituitosi, ad una Leucorrea continua, facile alle infreddature, arrivata alla età di anni quarantotto circa, restò priva dello Scolo Mestruale. Si mantenne per qualche anno senza maggior alterazione della salute: incominciò impoi poco a poco a soggiacere ad una Anoressia che divenne invincibile, a qualche languore, a somma pallidezza di volto, ad una febbre lenta, ad una universal debolezza. Le si fecero edematosi i piedi, tumide le palpebre inferiori, e al di sotto da fosca lividezza circoscritte. Avea l' inferma giorno, e notte un molesto bisogno di sputare una saliva acquosa, che le inondava la bocca; passava una discreta quantità di urine poco colorite; le palpitava il cuore qualche rara volta; pativa di stitichezza al ventre; col tatto per altro non fu giammai

scoperto il menomo intasamento ne' visceri Chilopojetici. Andava l' infelice di giorno in giorno sempre più smagrendo e snervandosi, essendo anche stata consigliata a far uso smodato di copiosi brodi, e di tepide bevande, a vivere in una Cella piena di un' aria mai rinnovata, ed a poltrire nel letto notte, e giorno. In questa foggia divenne cachetica la povera donna, ed io fui cercato a darle soccorso. Proposi qualche tenue presa di Ippecacuana da ripetersi di quando in quando, l' uso metodico de' Tonici, il moto del Cocchio, un' aria aperta, un bando dal letto in tempo di giorno, qualche lavativo in caso di stitichezza, un vitto eupepto, insomma una totale riforma del regime di vita. Passati diversi giorni trovai l' ammalata in uno stato niente migliore del primo, e per essere stati trascurati alcuni de' miei consiglj, e per l' indole della malattia di soverchio inoltrata. Fu in quel tempo consultato anche l' ottimo nostro comune amico il Sig. Dottor Ruggero, il quale meco convenne nell' idea del male, e nel metodo di cura. Ma ad onta pure del consiglio del medico sovracchiamato, non furono tutti praticati i proposti mezzi, e lentamente diventò Anasarcatica la donna ammalata. Qualche tempo dopo fui dalla stessa chiamato di nuovo, nè mi si cercò allora il rimedio dell' Anasarca, ma un pronto sollievo ad una crudele Emicrania, che le sopravenne, e trattone poche ore notturne, la tormentava ogni giorno. Le prescrissi tosto un' oncia e mezzo di scorza, della quale fu presa la sesta parte ogni spazio di tre ore. Trovai nel giorno prossimo sollevata la donna, la quale spontaneamente mi disse d' essere stata obbligata dal frequente bisogno d' urinare a svegliarsi tratto tratto nella notte. Non feci, lo confesso, gran caso di questo accidente, ma persuasi l' ammalata di continuare l' uso della Chinachina alla dose di due dramme ogni mattina, ed altrettante ogni sera. Lo scolo frattanto delle urine si manteneva copioso più del solito. Guarita in pochi giorni del tutto dall' Emicrania la donna, fu tralasciata la scorza, e allora cessò pure la copia delle urine. Fu riassunto lo stesso rimedio, e se ne vide lo stesso effetto. Passato qualche tempo feci la stessa prova per convincermi della forza diuretica della Chinachina, e lo stesso osservai. L' Anasarcatica intanto andava miglio-

rando, e migliorò al segno, che non vi restò il menomo stravaso, quantunque mantengasi tuttora la Cachessìa, la quale ha fatto tali progressi, che non ammette riparo di sorte alcuna.

OSSERVAZIONE XIV.

Nobilis vir (così a me scrivea il Ch. Onofrio Scassi, Autore dell' Opera intitolata De fœtu humano, Dissertatio Anatomico phisiologica, Edimburgi 1792.) boni corporis habitus, ætatis suæ annum septuagesimum attingens, cæteris corporis partibus adhuc bene valentibus, sola vesica senectutem persensit. Ejusdem fibræ laxitate laborant eidem prætermodum incommoda: Voluntatis nutui non amplius auscultant, & nullo prævio monitu involuntarie urinæ labuntur, unde sociali vitæ invitus renunciat, tristi domesticæ solitudini adstringitur. Plurimis irritis in hunc finem suggestis remediis, meum quoque optatur consilium. Lubens ægroto satisfacio, & Corticis Peruviani usum felicem in simili affectione pluries a Patre meo expertum consulo. Gratissimum profecto mihi est testari post mensem ægrotum asserere hujusce excretionis officium esse voluntati, ut antea, penitus addictum. Vesica hujusce remedii vires illico persensit, eoque ita aucta sub finem fuit ejusdem sensibilitas, ut infra quindecim dierum spatium ob nimios, quos patiebatur in mingendo stimulos, coactus fuerit ab ulteriori remedii usu abstinere.

Non mi sarebbe difficile l'aggiugner un maggior numero d' osservazioni, se non credessi che le sin quì riferite bastanti fossero a comprovare il mio assunto. D' altronde io son pressocchè sicuro che ogni Medico che abbia con una certa attenzione visitato un sufficiente numero d' infermi, se richiamerà alla sua memoria i fenomeni succeduti all' uso della Chinachina, si risovverrà di qualche osservazione analoga alle antecedenti. La natura è sempre a se stessa costante, ed immutabili sono le sue leggi.

Che se noi aggiungeremo le osservazioni esposte nel presente Capitolo a quelle che furono citate nell' antecedente, prese da altri Scrittori, io credo provato con esse abbastanza, aver la Peruviana Corteccia un' azione tale sul-

le vie dell' urina, che or più, or meno, or in un modo, ora nell' altro, qualche cangiamento in esse produce. Noi abbiamo in medicina numerosi esempj di stimoli somiglianti, i quali oltre l' azion loro generale su tutta l' animale economia, hanno eziandio un' azione elettiva e specifica su qualche dato organo, o parte. Le particelle eccitatrici de' diversi sapori titillano elettivamente diverse papille. Varii purganti fanno la loro impressione su diversi tratti del Canale, che dalle fauci scorre sino al termine degli intestini, giusta le osservazioni di Hoffman, Fuller, Sauvages, Adánson. V. Barthez Nouveaux Elemens de la Science de l'homme. Anzi il Fabrizio, Smith nel Giornal d'Inghilterra 1668, Sachsio Ocean: Macro- microcosm, Golfincio Med. Conc., Borelli Cent. IV., Willis, Hunter, ed altri insegnarono fondandosi su particolari sperimenti, che gli stessi purganti injettati anche nelle vene non avean mancato di esercitare la loro azione consueta sul tubo intestinale. Il veleno Idrofobico, ed il Mercurio, e fors' anche giusta il pensiero del Celebre Tissot, il veleno vajoloso portansi ad urtar principalmente le glandule salivali. Le Cantaridi, benchè stimolar sogliano la macchina in generale, pure non destano d' ordinario nel delicatissimo Cervello, o nell' irritabil polmone od in altra parte que' fenomeni d' irritamento, che danno prontamente nelle vie urinarie; e lo stesso fa il Meloe Majalis al dir di Romme Obs. Sing., e Trawgott Schwarts Dissert. sur l' Idrofobie. La Trementina al dir del Chiariss. Home agisce topicamente sulla regione Ischiadica; il Solano Belladonna muove la pupilla ec. Qnesti, e simili fatti sono certissimi, benchè per altro ignota sia, e da fortissime tenebre velata la loro cagione. Gli sforzi, ed i tentativi fatti sinora da' più chiari ingegni per penetrar l' arcano di queste singolari affinità, sono riusciti infelici, e siamo tuttora, siccome da principio, nel regno incerto delle Ipotesi.

Siccome però non di rado è accaduto, che seguendo con cauto passo e prudente la via delle Congetture, è taluno arrivato a scoprire la verità; quindi è ch' io azzarderò di proporre qualche Teorica idea, affine di rischiarare per quanto da me si potrà, sì difficile Argomento. Dichiarando queste liberamente, siccome io fo, congetturali,

ed

ed ipotetiche, io non correrò rischio d'offuscare l'intatta candidissima verità. Amo, piacemi di ripeter col dotto Werlhoff, Amo adminicula, & delectationes Theoriæ, modo hæc communem mecum dominam pedissequa venerentur, sinceram experientiam. Veritates certas a conjecturis dubiis, & quæ certi speciem habent exquisite dirimere conor.

CAPITOLO III.

Congetture sulla specifica azione della Peruviana Corteccia nelle vie urinarie.

Le diverse Analisi fatte della Chinachina da molti Autori, tralle quali meritano particolar menzione le più recenti, istituite dagli Eccellenti Chimici Berthollet, Fourcroy, Marabelli, ci insegnano esser questa una sostanza risultante dalla combinazione di molti e diversi principj, tra di loro in varie proporzioni, e con diverse affinità riuniti. Tra questi però esiger mi sembra una maggior attenzione relativamente al nostro argomento l'attivo principio conosciuto già sotto i nomi d'acido aereo, d'aria fissa, e simili, ora chiamato comunemente Gas acido carbonico, il quale è stato nella Chinachina ritrovato in una copia molto rimarchevole. Io non avrei giammai potuto, così esprimesi il chiarissimo Irvine, concepire, che alcuna specie di scorza potesse somministrare una sì immensa quantità di aria fissa. Il Cel. Fourcroy nella sua Analisi della Chinachina di S. Domingo estrasse da una libbra della medesima 77 pollici cubici di gas acido carbonico; copia che non è certo da disprezzarsi. Ora varj dati ci conducono a credere, che l'acido carbonico introdotto co' cibi, colle bevande, o co' rimedj nel corpo animale abbia una decisa tendenza a portarsi in copia immutato alle vie dell'urina. Molti Scrittori hanno insegnato che esso affetta una tale strada. Saunders, Percival, Hulme ed altri hanno insegnato, che desso portavasi alla vessica a sciogiier i calcoli ivi esistenti; ed il chiariss. Duhaume, Mem. sur les dissolvans de la pierre, lo novera pure fra' così detti Litontriptici. Colborne Ingenhouse, Falconer, Bentley, Cowper ed altri addussero spe-

rimenti numerosi, ne' quali i calcoli urinarj furono disciolti dall' uso dell' acqua da essi detta Alkalino-mefitica, o sia dalla soluzione del Carbonato Acidulo di potassa, nel quale cioè l' acido carbonico trovasi in una maggior proporzione di quella, che si richièderebbe per saturar la potassa. Analoga era la dottrina di Macbride, il quale affondendo dell' acqua di Calce nell' urina, e nascer vedendone un precipitato, lo ripetè dall' aria fissa ivi ospitante; ed il Cel. Brogniard osservò in un infermo farsi un' effervescenza maggiore per l' affusione di un acido sul sedimento della di lui urina, allorchè facea uso dell' Acqua Gaseosa. Aggiungasi esser cosa comprovata per molti sperimenti, che molto gas acido carbonico suol ritrovarsi d' ordinario nello stomaco, e nelle vicine porzioni d' intestini, e che la proporzione dello stesso va continuamente scemando ne' tratti ulteriori degli stessi; onde par ragionevole il credere che questo gas solubilissimo in tutti i liquidi acquei, e sierosi possa introdursi assieme col chilo, e passare nel siero del sangue, ed esser seco portato agli emuntorj proprj, quali sono appunto gli organi dell' urina.

Per l' altra parte il Gas acido carbonico è dotato della facoltà di stimolare in una maniera assai sensibile la fibra animale. Da questa facoltà molti Medici sono soliti di ripetere gli effetti salutari del noto Antiemetico del Riviere, nel quale l' acido del Limone sviluppa molto gas carbonico dal Carbonato di potassa, sul quale suol affondersi al letto dell' infermo. Lo han guardato come un ottimo stimolante Emmet, De Aere fixo, il quale lo commenda assai per corroborare il ventricolo, e correggerne l' Artritica Atonia; e Selle, il quale lo propone per destare le forze della vita, e se ne servì utilmente sotto forma di Clisteri per evacuar le feci, e promover il flusso delle Emorroidi. „ L'Air „ fixe, dice il Chiariss. Bucquet, que j'avois produit par „ ce moyen (nel vuoto cioè, affine d' averlo più puro) „ avoit une odeur très-vive, qui affectait désagréablement „ les yeux, & excitait vivement la toux. „ L' Acqua gaseosa, ossia impregnata d' acido carbonico è considerata come irritante dal Chiarissimo Cristianopoli. Varj Scrittori, che trattaron l' Argomento delle Asfissie, notarono, che i polmoni di coloro, che periron nella Mofeta d' Aci-

do Carbonico furono trovati in uno stato di violenta contrazione.

I vantaggi riportati dall' uso dell' acido carbonico ne' Tifi, nelle così dette febbri e diarree putride, nelle putride piaghe, nello scorbuto ec. che possono vedersi attestati da Magellan, Mare, Percival, Crell, Hey, Rotheram, Warren, Rush, Cook ec. che soleano attribuirsi alla di lui proprietà antisettica, dipendono, secondo i moderni principj, dalla di lui forza eccitante.

Provan ulteriormente la stessa varietà le sperienze istituite dal Chiariss. Lalouette per commissione della R. Accademia di Medicina di Parigi. Vide quest' attento Osservatore, che l' applicazione esterna dell' acido carbonico sulle ferite facea contrarre, e chiuder in modo i lacerati vasellini, che cessava prestissimo ogni trasudamento d' umori; anzi protraendo di più l' azione dello stesso, tal irritamento nasceva, da formare una vera infiammazione.

Non sembra egli pertanto assai plausibile il dedurre da tutto questo, che il principio acido carbonico contenuto in tanta copia nella Chinachina, sviluppato nello stomaco, e sciolto nel Chilo, indi nel siero animale, e quindi recato in maggior abbondanza del solito alle vie urinarie, esercitando colà l' azione sua stimolante, produca i varj fenomeni, de' quali abbiamo fatta superiormente parola?

Questo pensiero pare confermato da una moltiplice Analogia. Molte sostanze o per loro natura, o per artificial combinazione ricche e ridondanti di Gas acido carbonico presentano fenomeni di azione sulle vie urinarie affatto simili a quelli che abbiam veduti della Peruviana Corteccia. Le Acque Acidule Minerali aumentano in tal maniera la copia delle urine, che comunemente fu loro attribuita la forza diuretica, e questa secondo Milman, Horne ed altri dipende appunto dal Gas acido di cui sono soprasaturate. Il Dobson osservò prodursi copiosa Diuresi dall' uso dell' Antiemetico sopra citato del Riviere; e lo stesso notò Christianopoli dall' uso dell'Acqua Gaseosa. Hagstroem, Cullen, Selle, Kaempff, e Pietro Frank han veduto nascer delle considerevoli difficoltà d' urina dall' uso di bevande fermentanti, come il vino nuovo, la birra ec. ed il Viga-

rous, e Bru han veduto prodursi dalle stesse un flusso quasi gonorroico di materie dense, e biancastre.

Alcune idee del Celebre Guyton potrebbero quì far insorger qualche dubitazione. Egli ha avanzato, che l'acido carbonico in simili casi non si porta già esso stesso alle vie dell' urina, ma piottosto vi determina una maggior secrezione d' acido fosforico. Potrebbe dunque sospettarsi, che la Chinachina producesse anch' essa i suoi effetti coll' aumentare la secrezione del fosforico principio in quegli organi. All' oggetto però di riconoscer con qualche fondamento a quale dei due Acidi, al carbonico cioè, od al fosforico fossero dovuti i fenomeni in questione, io pensai doversi interrogar la natura, consultando l' osservazione. Ecco pertanto alcuni sperimenti, istituiti ad istanza mia dall' espertissimo Chimico Sig. Guidotti, già conosciuto alla Letteraria Repubblica per la sua soluzione mercuriale.

Esperimento I.

Furono poste libbre quattro d' urina di due giovani sani in una Caraffa lutata, che ne veniva così quasi del tutto riempita. Si adattò a questa un siffone, di cui l' altra estremità immersa nell'acqua andandosi ad aprire sotto un altro vaso di vetro capovolto, e ripieno d' acqua, si formò così l' apparato pneumato-chimico. Avuta prima la precauzione di espeller col metodo ordinario quel poco d' aria Atmosferica, che conteneasi nel collo della Caraffa, e nel Sifone, fu applicato all' urina un legger grado di calore, sotto del quale cominciò qualche gallozzola d' aria a svilupparsi, che passando pel Sifone al vaso capovolto raccoglieasi alla sommità di questo. Fu aumentato per gradi il calore sino alla bollitura del fluido stesso, scorrendo sempre più frequenti le bolle d' aria, e seco qualche particella d' urina formante una lievissima spuma, che sormontata nella fiasca rompeasi, e si dileguava. Dopo varie ore di fuoco seguitando a bollir l' urina, nè sortendo più bolla alcuna, si levò l' apparato. L' aria raccoltasi alla sommità del vaso capovolto, misurata accuratamente trovossi del volume di 4 pollici cubici e $\frac{1}{4}$. Diguazzata quest' aria coll'

acqua di Calce, ne restarono assorbiti 2 pollici cubici; il restante poi esaminato coll' aria nitrosa, e con altri conosciuti mezzi fu trovato esser aria Atmosferica, consistente cioè nel miscuglio di Ossigeno, e di Azoto.

Questo sperimento ci dimostra l' esistenza del Gas acido carbonico nell' urina delle persone anche costituite nello stato di salute, e ne fissa la proporzione à due pollici in libbre quattro di fluido urinoso.

Esperimento 2.

Quattro libbre d' urina d' un giovine che recossi alla mia Clinica Scuola attaccato da febbre terzana, raccolte prima, ch' ei facesse uso d' alcun medicamento, furono assoggettate collo stesso apparato ad un eguale sperimento. Non se ne ricavarono in tutto che pollici cubici $3\frac{1}{2}$ di fluidi aeriformi, de' quali col diguazzamento consueto nell' acqua di calce si trovò non esservi che un solo mezzo pollice cubico di Gas acido carbonico. Il resto esaminato cogli opportuni reagenti trovossi esser Ossigeno, ed Azoto.

Come mai era di tanto diminuita in questo caso la proporzione del Gas acido carbonico ospitante nell' urine? Avrebbe forse la febbre col suo movimento, e pertusbazion generale la proprietà di decomporre l' acido carbonico, o di impedirne lo sviluppo, o di dirigerlo ad Emuntorj diversi? Oppure essendo forse diversa naturalmente la proporzion dello stesso nella secrezione de' diversi soggetti, trovossi accidentalmente il nostro giovine esser uno di quelli, che ne hanno una dose minore? La soluzione di questo problema ricercherebbe altre indagini, che noi quì ommetteremo come straniere al presente Argomento.

Esperimento 3.

Il giovine dell' esperimento precedente fu sottomesso all' uso della peruviana corteccia affine di debellar la sua febbre, ciocchè in fatti si ottenne. Nel tempo in cui egli usava il rimedio, continuando ancora la febbre, furono raccolte 4 libbre della di lui urina, ed alla foggia delle an-

tecedenti esaminate. Col consueto grado e tempo di calore diedero esse 5 pollici cubici di Gas aeriformi; si vide quindi sotto l' azione della Chinachina essersi aumentata la proporzione de' fluidi aeriformi d' un pollice e mezzo di più: e siccome col criterio dell' Acqua di calce si trovò in questi esservi due interi pollici cubici di Gas acido carbonico, così è chiaro, che l' aumento ritrovato dipendeva da un pollice e mezzo di Gas acido carbonico di più che per l' azione della peruviana corteccia era stato spinto a' colatoj dell' urina. Così o fosse naturale la differenza tra la quantità di Gas contenuta nell' urina del giovine del 2. esperimento, e quella contenuta nell' urina de' giovani dell' esperimento primo, o fosse dessa il prodotto dell' azione febbrile, certo si è, che l' uso della Chinachina la fece svanire, aumentando nell' urina del 2. la secrezione del Gas acido carbonico.

Esperimento 4.

Una favorevol combinazione fece sì, che contemporaneamente si trovasse nella Clinica stessa un altro terzanario, che prese egualmente per tale sua infermità la Chinachina, e cui dopo la presa d' un' oncia di questa sopraggiunse una grave Disuria con forte brucior, e dolore, incomodi da lui non mai sofferti anteriormente. Raccolte le urine, ch' egli passava poco per volta e stentatamente sino ad empirne la Caraffa di libbre quattro, furono poste alle solite prove, e col mezzo del calore consueto se ne ottennero pollici cubici $7\frac{1}{2}$ di fluidi elastici aeriformi, de' quali l'Acqua di calce col suo assorbimento mostrò esservene $4\frac{1}{2}$ d' acido carbonico, essendo il resto Azoto, ed Ossigeno.

Io aggiugnerò quì, che per un' ulterior conoscenza del fatto si presero altre porzioni d' urina passata dalle stesse persone, e si sottoposero ad Analisi con varj Chimici reattivi, come coll' Acqua di Calce, coll' acido Ossalico, col liquore di Muriato di Barite, colla soluzione nitrosa Mercuriale ec., col mezzo de' quali si scoprirono in

tutte egualmente le dette urine nella convenevol proporzione gli altri sali, e principj diversi, che vi erano stati riscontrati nelle diverse analisi fatte dai varj Scrittori; onde sembra doversi conchiudere, che l' uso della peruviana corteccia non altera in verun modo gli altri componenti dell' urina, e che solo aumenta notabilmente la proporzione dell' acido carbonico, non già del fosforico, come l' accennato celebre Scrittore avea pensato. Questi sperimenti sembran pur anco aggiunger peso alla congettura da noi avanzata, che cioè gli effetti della peruviana scorza sulle vie urinarie si dovessero all' azione dell' acido carbonico da essa sviluppato, mostrando essi chiaramente, che dall' uso di quella si aumenta la secrezione di questo, e che arriva quella a produrre dolori, difficoltà, ed incomodi d' urina appunto allora che s' accresce la proporzione del Gas acido carbonico in questo fluido escrementizio.

CAPITOLO IV.

Corollarj pratici.

Mi sembra che la conoscenza di questa azione specifica della Chinachina sulle vie urinarie possa produrre non poco bene nell' uso pratico della Medicina. Essa può condurci ad ottenere in certi determinati casi dei considerabili vantaggi dall' uso appropriato del rimedio stesso, ed a sfuggire in certi altri casi dei gravi inconvenienti.

Il sistema uropojetico può dividersi relativamente alle sue funzioni in tre porzioni distinte. La prima di queste è quella che serve a separare dal sangue il fluido urinoso. La seconda serve a contenerlo finchè sia raccolto in quantità sufficiente, onde non sorta a gocce a gocce qual si separa, il che sarebbe di tedio ed incomodo infinito. La 3. infine, quand' esso fluido e per la sua copia, e per la sua dimora divenne abbastanza stimolante, serve ad espellerlo (8). Ognuna di queste tre parti è soggetta, come qua-

(8) Alle tre accennate parti dell' uropojetico sistema sarebbe forse da aggiuguersi la quarta, benchè questa non serva che passivamente, dirò così, ad esportare le urine. Questa si è il Canale dell' Uretra.

qualunque altra porzione dal sistema vivente a delle morbose alterazioni.

Può ciascuna di esse esser affetta da tale indebolimento e languore, per cui s' introduca il disordine nelle rispettive funzioni, o rese difettose, od interrotte e sospese, od anche con finto rigore a più violento moto eccitate. Se questo ha luogo nella porzion prima, la secrezione delle urine si vizia: o mancano queste, o scarseggiano, sicchè l' escrementizio fluido non eliminato resta ospite malaugurato a turbar altre funzioni generali, a produrre le Cachessie, le Leucoflegmazie, le Idropi; oppure scorrono traboccanti, ed esportano la sostanza nutritizia, esauriscono l' umidità animale, e formano i Diabeti diversi. Se poi la preponderante debolezza ha luogo o nella seconda parte del Sistema, che ritener deve l' urina, o nella terza che deve espellerla, alterandosi pure le Antagonistiche loro funzioni, o nasce l' Enuresi ossia incontinenza d'urina, malattia piena di incomodi, o producesi la Disuria, e l' urina, o non sorte che a stento ed a gocce con bruciore e dolore, oppure si arresta totalmente, ed esigge l' uso della Sciringa.

In tutti questi casi l' indicazione medica principale essendo di roborare, ed incitare bensì tutta la macchina in pro-

Benchè io non abbia riscontrato nelle mie osservazioni alcun esempio d' un' azione evidente della Corteccia Peruviana su di essa, pure non dubiterei d' asserire, che deve quivi pur aver luogo. Primieramente egli è ragionevole il credere, che passando di là l' urina soprasatura di principio stimolante, debba anch' essa sentirne l' azione. In secondo luogo non mancano le osservazioni degli altri a persuaderlo. I fenomeni osservati nel caso del Dott. Rota da me riportato al Num. XII. sembrano appartenere all' irritazione dell' uretra. Percival, Experiments ec. notò, con altri, la Gonorrea, che tutti sanno esser un alterata secrezione del Muco Uretrale, esser abbondantemente promossa dall' uso della Chinachina. Il Cel. Duncan, ne' suoi Medical Cases and Observations, ha il seguente rimarco. Egli avendo per pratica conosciuto che negli infermi Gonorroici, che ricusan le injezioni, è giovevole la Corteccia peruviana presa per bocca, ci avvisa di esser sommamente cauti nell' amministrarla, poichè egli osservò in un caso, che questo rimedio, benchè usato con cautela, produsse una grave gonfiezza di testicolo. Ora ognun sa, che un tal tumore nasce generalmente da uno stimolo un po' vivo applicato alla superficie interna dell' uretra.

porzione della debolezza, che può regnarvi, ma più particolarmente gli Organi urinarj, ne' quali la debolezza è d'un grado maggiore; quindi è, che la Chinachina possedendo, siccome abbiam veduto, la proprietà di recare a quelli uno stimolo più attivo, ci porgerà un ottimo soccorso, e sarà preferibile a tanti altri rimedj, i quali quantunque dotati di forza tonica eguale, o fors' anche superiore alla medesima, pure non prendon la stessa specifica direzione alle parti più inferme. Essa dovrà pur anche preferirsi, almeno nella pratica comune e nel maggior numero de' casi ordinarj, alle Cantaridi, altra sostanza, che ha pur della tendenza a portare uno stimolo vivo alle vie urinarie, giacchè se la forza de' rimedj deve proporzionarsi alla grandezza de' bisogni, l' attività violenta di queste dovrà riservarsi a' casi più ardui ed ostinati, per non urtar in que' terribili sconcerti, che diversi Osservatori videro nascer dall' uso delle medesime anche più cauto.

Gli stessi inconvenienti, e lo stesso disordine di funzioni, che abbiam veduto aver luogo qualora le diverse parti dell' urinario sistema peccano di debolezza, hanno pur luogo talora se in esse prevalga un grado eccessivo di irritabilità, e di irritamento. Qualunque volta precedute flogosi, od ulceri, od altri mali locali di quegli organi possano farci sospettar e temere, che siavi rimasto un eccessivo grado di mobilità, oppure regni una irritabilità straordinaria generale nel Soggetto, dovremo con passo ben misurato proceder all' uso della peruviana corteccia, massime nelle prime dosi, onde non urtare in soppressioni d' urina, od in altri di que' gravi incomodi, che abbiam veduto superiormente poter succedere all' uso non congruo del rimedio. Che se o per mancanza delle necessarie cautele, od in ragione di circostanze non possibili a prevedersi, i detti guai ebbero già cominciamento sotto l' uso della scorza, noi ben sapendo da qual cagione dipendono, potremo col sospendere, o modificar l' uso della Chinachina andar loro incontro. Fors' anche, secondo i principj da noi sopra esposti, sperar dovrebbesi qualche vantaggio in tali circostanze da una copiosa bevanda d' Acqua di Calce, o d' una soluzione di Magnesia calcinata, la quale neutralizzar po-

trebbe il Gas acido carbonico, che dalla Chinachina restata nello stomaco potesse seguitare a svilupparsi.

Trai casi poi, ne' quali l'alterazione delle funzioni urinarie dipende da locali cagioni, altri ven' hanno, ne' quali qualche utile sperar si può dall' uso della Corteccia, altri ne' quali inutile essa riuscir deve, od anche dannosa. Utile p. e. può sperarsi ne' mali dipendenti da ulceri, la cui superfizie poco irritabile ricercasse per esser detersa uno stimolo un po' più energico; in quelli dipendenti da un Calcolo, da un trombo, da un verme, da altra egualmente mobil cagione, che potess' essere oltre spinta, ed espulsa dalla più vivida azione delle fibre a maggior moto destate da uno stimolo un po' più incitante, e simili. Ma sarebbe inutile per lo contrario dove un' irremovibil cagione fosse la sorgente del vizio, come un induramento, una coalizion de' condótti, un calcolo voluminoso, oppur adeso, e simili; e forse portando un inopportuno stimolo a quelle parti, già forse di troppo irritate potrebbe la Corteccia concorrer ad un aumento ulteriore di guai.

Io credo queste avvertenze tanto più necessarie, quanto che il retto e proficuo uso di questo, siccome d'ogni altro medicamento, dipende dalla giusta scielta del tempo, e dalla appropriata determinazione delle circostanze. Appena l' utilità di qualche rimedio fu riconosciuta in qualche caso particolare, nulla v' ha di più facile, che l' estenderne con lusinga illimitata l' uso al di là del dovere, e raccomandarne una troppo generale applicazione; ma nulla v' ha nello stesso tempo di più comune che il restare nella concepita espettazione deluso, ed anche il ritrarne talvolta qualche svantaggio.

Le nozioni da me finora esposte sarebbero forse state suscettibili di maggior estensione, o dalla penna di Scrittor più dotto e più ingegnoso avrebbero forse acquistato maggior lustro, e vivezza. Per me son pago, se nell' immenso quadro della Medicina avrò potuto tirare un' util linea, o segnare un punto interessante.

INDAGINE FISICA SUI COLORI

Di Giambatista Venturi

Data li 15. Dicembre 1799.

INTRODUZIONE.

QUella profonda sagacità e forza d' Ingegno, con che Newton penetrò gli Arcani della Fisica Celeste, quella medesima il sostenne, allor quando le sue speculazioni restrinse al più angusto Campo dell' Ottica. Divise Egli, com' è noto, la Luce del Sole in sette Raggj di natura e colore diversi fra loro, ognuno dei quali passa nel suo vicino per mille e mille sfumatezze intermedie; dimostrò, che ciascuno di essi Raggj così decomposti conserva costante e inalterabile la Rifrangibilità, la Riflessibilità, e la Tinta sua propria: e concluse quindi, che intanto i Corpi appariscono a noi di un Colore piuttosto che d' un altro, in quanto che mandano all' occhio un Genere di raggj piuttosto che un altro. Poscia con Investigazione più fina eziandio e men divolgata si fece a ricercare, qual sia nei Corpi la Forza, che divide in essi il Lume del Sole cadutovi sopra, e che scegliendone i raggj d' un dato Genere o d' una data Tinta, questi soli rimanda alla vista a preferenza degli altri. Trovò che i Corpi diafani e scolorati, se vengano divisi o attenuati in Lamine d' una estrema esilità, valgono con ciò solo a riflettere certe Classi di colori trasmettendo le rimanenti, e così presentano allo sguardo Iridi analoghe a quelle del Prisma; sul quale Fenomeno fondò egli la spiegazione dei Colori *permanenti* dei Corpi; imperciocchè i Corpi tutti possono considerarsi come un aggregato di fragmenti nati dallo spezzamento di Lamine d' una data sottigliezza, e per conseguenza di un dato colore. Tutta questa Teoria della Luce e dei colori dataci da Newton è un lavoro sì eccellente, e per finezza d' Invenzione, e per esattezza di Deduzioni, che non senza ragione fu detto bastare quest' Opera sola a far celebre ed onorato l' Autore, la Patria, il Se-

colo in cui visse, quand' anche de' suoi studj non avesse Egli lasciato altro monumento che questo.

Il Poter chimico della Luce sui Corpi, la Misura della medesima, il principio delle lenti acromatiche di Dollond, e poc' altre nuove Osservazioni, formano tutto il corredo delle Scoperte del cadente Secolo, che possano aggiungersi a quelle prime di Newton. Non si è fatto più, perchè molti, o ingannati dalla imperfezione dei loro prismi o incapaci di comprendere ben tutta per esteso la Teoria, si sono per disavventura perduti a combattere con equivoche o sbagliate esperienze i Fatti vittoriosamente stabiliti da Newton; i quali dovranno pure sussistere, finchè le Leggi della natura non cambiino: Altri abbandonandosi agli sforzi del solo Ingegno hanno voluto sul proposito fabbricare Sistemi, che si rimangono vacillanti mai sempre ed oscuri, ove le Esperienze e le Osservazioni immediate non concorrono a sostenerli. E sì battendo pur solamente le vie aperte o indicate dall' Ottico Inglese, v' è pure in questa parte di Fisica tanto Mondo ancora da soggiogare! Non deve perciò riuscire inutile ai progressi dell' Ottica, non meno che dell' Arte tintoria, e di tutta la Scienza naturale, il tentare nuove Esperienze relative ai Colori, combinarle colle già note, e vedere quali conseguenze trar se ne possano a perfezionare vieppiù la Teoria e la Pratica insieme.

CAPITOLO PRIMO.

Che i Colori delle Lamine sottili non sono effetto di semplice Rifrazione, quantunque dipendano forse da una medesima Legge. Se il Raggio violetto sia veramente il più facile di tutti ad essere riflettuto.

Quei varj Colori, i quali si veggono a diletto nascere sulle bolle d' un' Acqua saponata e schiumosa, il Newton li imitò ed esaminò in una Lamina d' aria compresa fra due vetri. Questa Esperienza capitale nella Teoria che Esso ci à data sui Colori naturali dei Corpi, vuol esser qui riferita in compendio, perchè necessaria troppo all' oggetto di recar lume ed intelligenza in ciò che siamo per dire.

Se la Superficie assai poco incurvata d' una Lente piano-convessa MAN (Fig. 1) si ponga a contatto d' un Vetro piano PQ, e si congiungano strettamente i due Vetri fra loro; non si riuscirà tuttavia a far che si tocchino se non nel punto centrale A. Tutto il rimanente spazio MAP, NAQ comprenderà una Lamina d' Aria; la quale se venga illuminata da una luce bianca proveniente da B, e l' occhio dell' Osservatore pongasi in C, vede questi sulla Lamina d' Aria MPQN fiorire una quantità d' Iridi, ossia di Annella colorate concentriche intorno al punto del Contatto A. Ora siccome la Lamina d' Aria incomincia dall' essere sommamente sottile presso al Centro A, e quindi allontanandosi poi verso gli orli MP, NQ dei due Vetri essa aumenta in Grossezza; così misurando il Diametro d' alcuna delle Iridi suddette, quando sia nota altronde la Curvatura della Lente, si può calcolare la Grossezza della Lamina corrispondente all' Iride stessa. Calcolata questa Grossezza per le diverse Annella colorate, secondo il Metodo di Newton (*a*), e diviso il pollice di Parigi in dieci milioni di parti, si trova, che i Raggj violetti prismatici puri sono ripercossi dalla Lamina d' Aria, quando questa è grossa press' a poco 40, o 120, o 200, o 280, &c. delle parti decimilionesime d' un pollice. I Raggj rossi poi sono riflettuti dalla Lamina stessa nelle Grossezze poco minori di 60, 180, 300, 420 &c. parti suddette. Gli altri Colori intermedj sono riflettuti da Serie di grossezze intermedie alle due precedenti; ognuna delle quali Serie procede secondo l' ordine dei numeri dispari 1, 3, 5, 7 &c.

Ma che avvien egli dei Raggj, che cadono sulle Grossezze interposte a quelle dei numeri sovraenunziati, e che corrispondono in ciascuna Serie all' ordine dei numeri pari 0, 2, 4, 6 &c.? Basta portar l' occhio dalla parte posteriore dei Vetri, per es. in D. Si veggono qui pure le Annella colorate, ma in ordine rovescio ed interpolato colle Iridi vedute da C. Donde è forza conchiudere, che i Raggj vario-colorati ed incidenti da B sulla Lamina aerea MPAQN passano per essa Lamina alternativamente e non passano: passano nelle Grossezze 0, 2, 4, &c., e sono ripercossi

(*a*) Optic. lib. 2. part. 2.

nelle Grossezze 1, 3, 5, 7, &c.; ciascun d' essi secondo la Regola enunziata poc' anzi.

Hanno dunque i Raggj della luce un tale rapporto colla Grossezza di una Lamina trasparente, che essi la penetrano sottile, non la penetrano ingrossata un poco, la penetrano poi più grossa, e poi non la penetrano vieppiù grossa ancora, e così sempre. Una tale alternata corrispondenza di successivi passaggj e ripercotimenti colle Grossezze successivamente aumentate è dessa, che il Newton chiamò *Accessi di facile e di difficile trasmissione*: e non è già questo un ritrovato ipotetico di Teoria, come taluni opinarono senza averlo forse considerato bene, ma è l' espressione di un mero Fatto; esso è l' Esperienza precedente compendiosamente enunziata.

Alcuni Fisici si sono studiati di assoggettare un tale Fenomeno all' altro già noto del Coloramento dei Raggj per semplice Rifrazione: Du-tour fra gli altri (*a*) à raccolto quanto potevasi meglio a persuaderne di ciò. Ma nè, come sono per dimostrare, à Egli potuto riuscir nell' intento, nè le Lamine sottili si colorano per motivo di semplice Rifrazione prismatica.

Quanto è diffusamente esposto nella Memoria di Du-tour, tutto può con maggior brevità e rigor geometrico enunziarsi col Raziocinio seguente. Sieno (Fig. 2.). AD, BE, CF tre facce parallele fra loro di due Vetri, i quali si tocchino in B; ma la quarta faccia, BD sia inclinata alle altre, in guisa di formare un Vetro piano-convesso, od un Prisma ADB. Cada un Raggio bianco sui due Vetri, e formi acuto l' angolo MNA verso il punto del Contatto B: rifratto questo Raggio dal Prisma ADB si dividerà nel Violetto NQ, e nel Rosso NP. Sia N il punto, a cui, come a Foco d' incidenza per riguardo alla Faccia BE, appartengono i due Raggj NQ, NP; si tiri NXZ perpendicolare a BE, e si prenda XZ = XN: sarà Z il punto, al quale come a Foco di riflessione appartengono il Violetto QS e il Rosso PR ripercossi dalla Faccia BE. Se il Raggio ZPR fosse bianco, rifrangendosi in R sul Prisma ADB manderebbe la sua parte Rossa per es. in RO, e la

(*a*) Journal de Physique de Rozier An. 1773. pag. 339. & suiv.

Violetta in RV, divergenti fra loro. Ora il Violetto ZS dopo la Rifrazione andando per ST debbe divergere dal suo pur ora supposto omogeneo RV (*Newton Lect. Opt. Sect.* 3. *prop.* 20.). Dunque il Violetto ST molto più dovrà divergere dal Rosso RO. Quindi se in TO si esponga una Carta, il Raggio bianco MN, dopo aver sofferto due Rifrazioni in N, una Riflessione in Q....P, e due altre Rifrazioni in S....R, dipingerà sulla Carta TO un'Immagine colorata, di cui la parte Violetta resterà in T, dalla banda che guarda il punto d' unione dei due Vetri in B.

Se l' Angolo MNA fosse ottuso, il Violetto cadrebbe ancora sulla Carta dalla banda di B. Perchè supponiamo ora, che OR sia un Raggio bianco incidente da O in R, coll' Angolo ORA ottuso. La parte Rossa di OR rifratta e ripercossa per la stessa via ma rovescia di prima uscirà in tal Caso per NM; e ciò in forza del noto principio, che il Raggio incidente ed il riflettuto o rifratto si reciprocan fra loro. Ritornerebbe pure ad uscire per la medesima direzione NM il Violetto TS, se rivolgesse il suo viaggio da T verso S. Ma la parte Violetta del Raggio OR, che ora supponesi bianco cade sulle facce dei Vetri piegando verso D più del suo omogeneo TS. Dunque essa parte Violetta di OR nell' uscire da N dovrà piegare da NM verso B.

Il Discorso precedente costituisce tutto il forte dei Raziocinj del Du-tour. Il Fatto a cui conclude un tale Discorso è vero, ma Esso è tutt' altra cosa dal Coloramento delle Lamine sottili di Newton. Imperciocchè 1.° Stando al Caso sovraesposto, un Occhio situato in O non vedrebbe già la tinta Violetta in S, ma bensì (tirata OK parallela a TS) la vedrebbe in K (*Newton*, *Lib. sovracit. prop.* 22); cioè vedrebbe il Violetto più discosto dalla macchia centrale B, che non il Rosso; mentre per l' opposto nella Lamina aerea stretta fra i due Vetri di Newton, il Violetto è sempre il primo dalla banda del centro. 2.° I Colori di Du-tour si mostrano solamente sul confine d' un Corpo opaco, il quale posto sul vetro in RN termini in N l' irradiazione MN; altrimenti le Iridi successive sovraponendosi in serie continua successiva distruggono ogni Colore parziale, e riproducono il Bianco; dove al contrario i Co-

lori delle Lamine di Newton sussistono ben distinti, illuminando anche uniformemente ed interamente la superficie AD. 3.° Nel Caso di Du-Tour, quanto è maggiore l' Angolo rifrangente D = DBE, tanto più ampia e distinta apparisce la colorazione in O; ma nel caso di Newton, quanto è maggiore il detto Angolo, tanto più ristrette divengono e più confuse tra loro le Annella colorate. 4.° Se si cambj la positura dei due Vetri, in modo che il Vetro parallelepipedo BEFC sia l' anteriore verso M, e il prismatico ADB sia il posteriore, tutto il Raziocinio sovraesposto svanisce, la division de' Colori *per Rifrazione* non à più luogo, e il Raggio MN allora dovrebbe ritornarsene bianco in RO; eppure anche in tale cambiata positura dei Vetri le Iridi moltiplicate delle Lamine sottili si fanno veder come prima. 5.° Tutto l' Argomento di Du-tour perde sua forza, quando il Raggio MN sia d' una sola tinta omogenea; dovrebbe in tale circostanza l' occhio situato in O vedere un solo Color uniforme diffuso per tutta la parte illuminata della faccia AD: Ma nell' Esperienza di Newton non una Tinta continuata si osserva sui due Vetri, ma bensì molte Annella alternamente nere e colorate. La Lente, di cui soglio far uso nel ripetere questa Esperienza, è lavoro del Campana celebre Ottico del Secolo XVII, tornita da lui sopra una sfera di 21. piedi di diametro. Sovrapposta essa Lente ad un Vetro piano, espongo i due Vetri stretti insieme al Raggio rosso puro ricavato coi mezzi che indicherò in seguito; e sui Vetri medesimi riesco a numerare fino a venti annella alternativamente rosse e nere per riflessione, ed altrettante nere e rosse per trasparenza.

Le Leggi della Rifrazione prismatica dei Raggj eterogenei della luce non bastano dunque per se sole a render ragione del coloramento delle Lamine sia d' aria, sia di qualunque altra materia ridottasi a un grado notabile di sottigliezza.

Altra Classe abbiamo di Fenomeni, i quali possono forse aprirci la via per legare ad un solo ma più generale Fondamento ambedue le sopracitate maniere di colorazion della Luce, quella cioè della Rifrazione prismatica, e quella di un dato assottigliamento delle molecole componen-

ti

tì un Corpo. Grimaldi, Newton, Comparetti (*a*), Brougham (*b*) hanno osservato, che un Raggio di Luce, allorchè passa fuori e vicino alle estreme parti di un Corpo, torce in quel passaggio la sua direzione, ed ora piega per *Inflessione* verso il Corpo medesimo, ora se ne allontana per *Deflessione*, e tal altra volta ripercotesi per *Riflessione*. Prende il Lume or l' una or l' altra di queste tre fogge diverse di torcimento, secondo che esso rade più vicino o più lontano il Corpo che lo smove, tutto per altro entro una distanza non maggiore d' un centesimo di pollice. Il Raggio che accostasi al Corpo entro questo limite, comincia dall' esser come respinto, e *deflettesi*; se procede oltre e più presso al Corpo, è attratto, e si *inflette*; più presso ancora è respinto di nuovo, e si *riflette*; anche più vicino è attratto: nè noi sappiamo bene ancora, quanto sia il numero delle veci alternate di attrazione e di rispingimento dei Raggj, nel mentre che questi si accostano al Corpo. Bensì veggiamo che i Raggj diversamente colorati hanno Scale diverse di distanza, non meno che di attrazione e di rispingimento: di modo che si dividono qui pure in altrettante Iridi o fimbrie vario-pinte, non altrimenti che nelle Lamine sottili e nella Rifrazione del Prisma. Io assumo qui le parole di *Attrazione* e di *Ripulsione*, unicamente per indicare il puro Fatto dei nuovi e varj Moti di avvicinamento e di allontanamento, che prendono i Raggj, rispetto al Corpo a cui sono prossimi; nè mi arrogo decidere qual sia la natura della Luce, nè molto meno qual sia la Cagione di tale approssimazione o discostamento. Ma stando al puro Fatto, egli è chiaro, che queste *Veci alterne di attrazione e di ripulsione* han troppa analogia cogli *Accessi di facile e difficile trasmissione*, perchè non possano considerarsi come due Fenomeni dipendenti da una sola e medesima Legge: e questo fu eziandio il sospetto di Newton. Che se esprimer volessimo le *Forze* alternativamente attraenti e ripellenti la Luce con una Curva, la quale in più luoghi intersechi l' Asse secondo il divisamento di Boscovich, non sarebbe difficile determinare la natura di questa Curva in modo tale che, contemperate insieme le Azio-

(*a*) De Luce inflexa & Color. Patav. 1787. (*b*) Transact. An. 1796. n. 10.

ni delle due superficie, che chiudono una sottil Lamina, sul Raggio entrato in essa Lamina, debba questo or continuare il cammino e passar oltre, or rivolgersi indietro e retrocedere ripercosso. Solo converrebbe in tale Inmaginazione variare o il Parametro, o fors' anche l' Andamento totale di essa Curva per le varie Classi dei Raggj diversamente colorati. Ma non giova istituire qui nuovi Calcoli ipotetici, molti dei quali nella loro intemperanza potrebbono divenire inutili, se non fors' anche dannosi al progresso delle Fisiche Discipline.

Piuttosto prendiamo qui, nel torcimento dei Raggj presso le minute parti sporgenti di un Corpo, ad esaminare un Caso, il quale sembra di prima vista contrario alle note Leggi risguardanti la diversa Rifrangibilità e Riflessibilità dei Raggj eterogenei. Si sa, che negli Esperimenti del Prisma, il Raggio violetto costantemente rifrangesi più di ogn' altro; e girando il Prisma sul proprio asse, il Violetto medesimo si vede in fine anche riflettersi più presto d' ogn' altro. Ma nelle strisce colorate che nascono dalla Luce o diffratta o riflettuta dalla costa di un ago, si osserva anzi il Raggio rosso piegare e rompersi con deviazione maggiore d' ogn' altro; talchè nelle Immagini colorate dalla Difrazione e dalla Riflessione di un ago i Colori tengono un ordine rovescio a quello che serbano nella Rifrazione e nella Riflessione della faccia posteriore d' un Prisma. Quindi Brougham opina doversi in questa parte correggere la Dottrina di Newton, e stabilire per regola, che il Raggio rosso sia il più, ed il violetto il men riflessibile. Nel Caso del Prisma crede Egli, che intanto i Raggj violetti rimbalzino i primi dalla faccia posteriore, in quanto che i medesimi sono stati rifratti già prima nella faccia anteriore del Prisma stesso, in modo che arrivano poi alla posteriore con inclinazione più obbliqua dei rimanenti. Perchè svanisca questo nuovo Inciampo dall' Ottica, mi è uopo dimostrare 1.° Che i Raggj violetti nel Prisma sono i primi a riflettersi, quand' anche non abbiano sofferto alcuna Rifrazion precedente. 2.° Che la contraddizione fra i due Fenomeni anzidetti è una mera apparenza, la quale propriamente risolvesi in una sola ed unica Legge.

Per comprovare il primo assunto fo uso d' una Casset-

ta, il Fondo della quale ho delineato nella Fig. 3., perchè la ho riscontrata in prova essere il Prisma ad angolo mobile il più opportuno d'ogn'altro per le ottiche Esperienze. Le tre facce AE, AB, BC sono lamine piane e ben pulite di Cristallo, le quali vengono sostenute negli angoli da Colonnette d'ottone. Una lamina simile di Cristallo è incastrata nel Telaro d'ottone EF, mobile questo a mo' di Portina sulla Colonna E, la quale diviene perno o centro del movimento circolare di EF. In questo movimento angolare della Portina, essa rade il Fondo della Cassetta, e la Concavità cilindrica pur di metallo CD con sì esatto combaciamento di parti, che la Cassetta non sparge l'acqua ripostavi entro, a qualunque inclinazione od Angolo AEF si ponga la Portina EF. Dentro a questa Cassetta già piena d'acqua mando un Raggio bianco MN perpendicolare alla prima faccia AB, sicchè non soffre ivi nè deviazione nè separazion de' Colori. Movo poscia la portina FE da D verso C, finchè l'Angolo AEF, ossia MNF vada a farsi poco minore di gradi 42; e il Raggio violetto solo e prima d'ogn'altro si vede comparire in P; indi rimbalzano successivamente ad angolo sempre minore l'Indaco, l'Azzurro &c. secondo l'ordine solito. I Raggi violetti son dunque assolutamente i più *Riflessibili* dalla superficie posteriore del Corpo diafano denso.

Trovandomi avere un prisma di Flint destinato a formare una combinazione Acromatica, nel quale l'Angolo rifrangente Q (Fig. 4) era di 38°; ho fatto cader sulla faccia EQ un Raggio bianco ABC; ed ho girato il Prisma, sinchè l'Angolo BCQ andasse divenendo minore di 51°; che è il punto, dopo cui in questa specie di Vetro i Raggj non passano più in CF, ma tutti son ripercossi in CD, Ed anche in questo Caso, nel girare del Prisma, il primo a perdersi in F, ed a riflettersi in D si vide esser sempre il Violetto, e l' ultimo il Rosso. Or poichè l'Angolo BCQ era $< 51^\circ$, e $P = 38$, l'Angolo ABQ era dunque un po' meno d' 89°; onde insensibile dovea essere la distrazione dei Raggj nel tragitto BC; o se pur v'era, il Violetto per tale Distrazione sarebbe venuto allora a cader sulla faccia EQ con un Angolo maggiore del Rosso, e però tanto più tardi avrebbe do-

vuto riflettersi in CD. Del che essendo avvenuto costantemente l' opposto, ne segue che il Violetto sia, di dentro la faccia posteriore EQ, realmente il più riflessibile.

Ma i Violetti medesimi son poscia i men *Riflessibili* ed inoltre i men *Deflessibili* dalla superficie anteriore del medesimo Corpo. E che perciò? E' forse questo un Fatto contrario e discordante dal superiore? Non per vero. Una sola, come abbiamo veduto, è probabilmente la Cagion che produce i quattro Fenomeni della Riflessione, Deflessione, Inflessione, e Rifrazion della Luce. Fa uopo dire, che questa Cagione, qualunque siasi, agisce sempre e in ogni caso con maggior forza ad allontanare dal Corpo i Raggj Rossi, di quello che la medesima agisca ad allontanare i Violetti: ovvero che Essa opera con più vigore in ravvicinare al Corpo i Violetti che i Rossi. Adottando per semplicità di espressione il Linguaggio de' Geometri, diremo che il Corpo in tutti i sopradetti casi esercita o più ripulsione o meno attrazione sul Raggio Rosso, che non sul Violetto. I Raggj Rossi tendono sempre ad allontanarsi, con più forza e prontezza degli altri, dal Corpo, ed a stare o mettersi fuori di quella Superficie di esso Corpo, alla quale si trovan d'appresso. Quindi finchè son fuori della anterior Superficie, ne sono più vivamente o ripercossi o deflettuti; e quando pure sien costretti d'entrarvi, si stanno più lontani degli altri dalla perpendicolare, che è la strada della più sollecita introduzione; e giunti al momento d' uscire dalla posterior Superficie, con maggior difficoltà si volgono indietro per rientrare nel Corpo; ed esciti poi finalmente sen fuggono per una Linea meno divergente degli altri, che è ora la via più breve per discostarsi dall' ultima Superficie. In contrario i Violetti all'atto d' entrare nel Corpo ne sono meno ributtati dei Rossi, e quando son per uscirne con maggior facilità e prontezza si ripiegano per rientrarvi. La Natura per tal modo qui pure è semplice, e concordante con se medesima.

Bensì cader ora si veggono a terra tutti i Calcoli di que' Valentuomini, i quali s' immaginarono che i Raggj Rossi aver debbano più massa o maggior vèlocità dei Violetti, e che però debbano quelli ceder meno all' Azione del Corpo su d' essi. Se ciò fosse, il Raggio Rosso tor-

cerebbe meno eziandio nell' approssimarsi alla parte anteriore del Corpo; del che abbiamo osservato nella Deflessione e Riflessione accadere precisamente il contrario.

CAPITOLO SECONDO

Qual genere di Raggj trasmettano le diverse sostanze trasparenti colorate.

E' noto che il Colore impresso nell' Occhio per l' effetto immediato della Luce (il verde per es. di una Foglia) può venire eccitato da due cagioni diverse fra loro. Esso può nascere primieramente da quella sola Classe di Raggj, ai quali nell' Immagine prismatica del Sole corrisponde la situazion media fra il Giallo e l' Azzurro, da una Classe di Raggj tutti omogenei fra loro di tinta; i quali perciò si dicono *puri*, e serbano, finchè son soli e non troppo addensati, indestruttibile l' occhio del Verde. In secondo luogo può la medesima sensazione del verde nascere da una proporzionata mescolanza di varie sorte di Raggj aventi ciascuno tinte diverse fra loro, ma che poi confusi insieme si contemperano scambievolmente in un terzo color medio e diverso dai proprj e primitivi di ciascuno dei Raggj che entrano a comporre la mescolanza (*a*). Or noi non potremo discorrer mai con fondamento della tinta di verun Corpo in particolare, quando non sappiamo innanzi, se il suo colore sia *puro* e nato da una sola Classe di Raggj omogenei, o se sia piuttosto un colore *di composizione*, prodotto da una mistura di Luce eterogenea; e quali nel caso di codesta mistura ne sieno gli Ingredienti.

Per venire in cognizione di questo, mi accinsi da prima, sull' esempio d' altri, a distendere varj Colori, a tempera e ad olio, sopra altrettante tavolette non più larghe di mezzo pollice; e queste guardando poscia col Prisma cercava quali generi di Raggj venissero riflettuti da ciascuna di esse; ma non tardai ad accorgermi, che un tal me-

---

(*a*) Newton à prescritto la regola di tali mescolanze per ciascun colore composto. Lib. 1. part. 2. prop. 6.

todo applicato ai Colori di Riflessione riesce mal fedele e infruttuoso all' intento. Perchè una quantità di Raggj bianchi ripercossi dalla prima Superficie del Corpo si mescolano sempre coi Raggj proprj del Colore di esso Corpo, e turbano e confondono le conseguenze del Tentativo.

Mi sono dunque rivolto piuttosto ad esaminare le Sostanze che appariscono colorate per trasparenza; ne ho scelto alcune di maggior uso; e affine d' assicurarmi che queste fossero genuine e pure, ne ho fatta io medesimo la preparazione coi materiali più purgati e più scelti, rendendole inoltre limpide e trasparenti al possibile col mezzo delle opportune soluzioni, filtrazioni, deposizioni. I Liquori colorati erano contenuti entro piccole Cassette rettangole, colle facce opposte di Cristallo piane pulite e parallele fra loro.

Un Raggio di Sole introdotto, per un rotondo e piccol foro, entro una Camera altronde ben oscurata, era la Luce che dovea dividersi e colorarsi in passando per le diverse sostanze destinate all' esame. E con tre diversi metodi mi riusciva di determinare quali e quanti generi de' Raggj puri prismatici penetrassero oltre le Sostanze preparate come sopra. Il primo metodo era d' aprire nella Finestra non uno ma due piccoli Fori eguali, prossimi fra loro ed egualmente alti sull' Orizzonte; uno di questi rimanevasi libero e sgombro; all' altro apponevasi la Sostanza che volevo mettere a prova, ed apponevasi in maniera di chiuderlo. Indi lontano dai Fori e in faccia loro li guardava in un tempo coll' Occhio armato di Prisma parallelo esso pure all' Orizzonte. Per tal modo vedeva il mio Occhio due Immagini corrispondenti ai due Fori: Quella del Foro libero ed aperto allungavasi e dividevasi ne' suoi sette colori compiutamente; l' altra Immagine del Foro occupato dal Corpo trasparente, confrontata colla prima intera parallela e prossima a leï, mi dimostrava chiaro, quali nella Serie prismatica fossero i Raggj trasmessi dalla Sostanza colorata e quali fossero gli intercetti. Per il secondo metodo un sol Foro aprivasi nella finestra: il Raggio bianco del Sole introdotto per esso Foro cadeva alla distanza di otto piedi in una Lente, e dietro questa immediatamente in un Prisma; l' Immagine prismatica si di-

stendeva sopra una Tavola bianca alla distanza di altri otto piedi e nel Foco rispettivo di essa Lente; il tutto secondo la maniera di Newton (*a*). Opponendo ora al corso dei Raggj la Sostanza colorata trasparente io notava quali dei sette colori anzidetti scomparissero dalla Tavola, i quali poi in levando la detta Sostanza ricomparivano. Il terzo metodo più facile e più sicuro per conoscere le Classi dei Raggj trasmesse od intercette consisteva nel gettare come poc' anzi, col soccorso della Lente e del Prisma, l' Immagine del Sole ben divisa sulla Tavola, e nell' osservare poi essa Immagine, portando lo sguardo attraverso del Corpo colorato pellucido. In tal guisa l' Occhio vede subito, applicando sulla Tavola una Scala di divisione, qual parte dell' Immagine prismatica penetri il Corpo suddetto, e quale ne venga rintuzzata od estinta.

Per lo più ho verificate le Esperienze con tutti tre i Metodi pur ora descritti. I Prismi erano sempre di Flint; e quando nominerò i Raggj di un dato Colore, questo nome indicherà non tanto la tinta in se medesima, quanto e piuttosto il luogo che tali Raggj occupano nella *menoma* Rifrazione prismatica secondo la distribuzione fattane da Newton; la quale importa che dividendo in 120 parti la Dispersione totale, ne tocchino per un press' a poco al Rosso parti 15, al Dorè *9*, al Giallo *16*, al Verde 20, altrettante all' Azzurro, $13\frac{1}{2}$ all' Indaco, e $26\frac{2}{3}$ al Violetto. Supporrò sempre che il Rosso rimanga al basso dell' Immagine prismatica; e però se io dica per es. *la parte alta o superiore del Giallo*, vorrassi intendere quella che è più prossima al Verde; e così degli altri.

Un Corpo colorato suol trasmettere più generi di Raggj, quando è sottile o diradato, che non quando sia assai grosso e ben carico di tinta. L' una e l' altra di queste due circostanze (sottigliezza e diradamento) producono un medesimo effetto sulla quantità e sulla specie dei Raggj trasmessi. Quindi nella Tavola seguente ho considerato cinque diversi gradi per l' addensamento o per la profondità

(*a*) Opt. Lib. 1. part. 1. Experim. 11.

della tinta. E per brevità di discorso segnerò con un A il grado del colore più carico, o del più lungo tragitto dei Raggj, oltre il quale il Corpo diventa opaco; le lettere B, C, D indicheranno i gradi successivi di sempre minor densità del Çorpo; ed E finalmente significherà il grado ultimo di diradamento, oltre il quale, attraverso la Sostanza che si esamina, veggonsi passare di tutti sette i Generi de' Raggi. La Tavola contiene descritti i Generi de' Colori *puri*, che passano in ciascheduno de' sopradetti cinque Gradi di assottigliamento nella sostanza, o di leggerezza nella tinta.

Se il Lume cresca in intensione, si veggono allora comparire attraverso di una data grossezza nuove specie di Raggj, le quali dietro la grossezza medesima non erano prima sensibili in minor vivacità d' illuminazione. Quindi i varj Gradi di densità e diradamento qui vogliono considerarsi non come Quantità assolute, ma come relative ad una misura costante di Illuminazione, e inoltre ad una ordinaria e sempre egual Forza di Vista.

Per regola generale, quel Colore, il quale penetra oltre la Sostanza Colorata nelle maggiori densità o profondità, esce poi nelle minori sempre più vivace e più pieno degli altri Colori, che sono a Lui posteriori nel nascere.

T A V O L A

Delle specie diverse dei Raggj prismatici puri trasmessi da alcune Sostanze colorate, nelle varie Densità di tali Sostanze.

1. Oro disciolto nell' Acido nitro-muriatico.

A. Rosso, Dorè.
B. Rosso, Dorè, Giallo.
C. Rosso, Dorè, Giallo, Verde.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco.

Cinque Dramme d' oro puro erano disciolte in tre once di Acido. Nel Caso A del colore più carico, il tragitto della Luce attraverso la Soluzione facevasi per una lunghezza o vogliam dire profondità di otto pollici di liquore.

2. Oro

II. Oro precipitato dalla Soluzione stessa coll' intermezzo dello Stagno (*Porpora di Cassio*).

A. Rosso.
B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, Azzurro.
D. Rosso, Dorè, metà bassa del Giallo; Azzurro, Indaco.
E. Rosso, Dorè, i tre quarti bassi del Giallo, i tre quarti alti del Verde; Azzurro, Indaco, la metà bassa del Paonazzo.

La Porpora di Cassio si ottiene anche senza l' intermezzo dello Stagno, anche solo bruciando l' Oro con una forte scintilla elettrica. Il suo Colore adunque non dipende per nulla nè dallo Stagno nè dall' Acido, ma è proprio e particolare dell' Ossido d' Oro.

III. Solfato di Rame.

A. Verde, Azzurro.
B. La metà alta del Giallo; Verde, Azzurro, Indaco.
C. Giallo, Verde, Azzurro, Indaco, metà bassa del Paonazzo.
D. Dorè, e tutti gli altri superiori a lui.
E. La metà alta del Rosso, e gli altri sei.

I Colori medesimi escono appress' a poco dal Nitrato di Rame, dall' Acetito di Rame, e dalla Soluzione di Rame nel Tartrito acidulo di Potassa; la quale ultima forma il Color d' Acqua di Mare degli Acquarellanti.

IV. Rame disciolto nell' Ammoniaca.

A. Paonazzo.
B. Paonazzo, Indaco.
C. Paonazzo, Indaco, Azzurro.
D. Paonazzo, Indaco, Azzurro, Verde.
E. Escono anche i tre Colori bassi, ma il Giallo in maggior copia degli altri due.

V. Ossido di Rame fuso col Vetro e con pochissimo Croco di Marte in color di Smeraldo.

A. La parte alta del Giallo, i tre quarti bassi del Verde.
B. Giallo, Verde, la parte più bassa dell' Azzurro.
C. Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
D. La terza parte più alta del Rosso; Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco.

E. Non manca se non la parte più bassa del Rosso, e la più alta del Paonazzo.

VI. Prussiato di ferro (*Azzurro di Berlino*).

A. La metà del Verde e dell' Azzurro sul loro confine scambievole.
B. Verde, Azzurro, Indaco.
C. Metà alta del Giallo, Verde, Azzurro, Indaco, metà bassa del Paonazzo.
D. Giallo, Verde, Azzurro, Indaco, Paonazzo.
E. Non rimane più intercetto che il Rosso.

Il Prussiato di ferro diviso e quasi disciolto dall' Acido Muriatico, oppur macinato con olio di Trementina, indi schiacciato in pochissima quantità fra due Vetri divien trasparente.

VII. Ossido Rosso di ferro tratto dal Solfato di ferro (*Colcotar*); disciolto nell'Acqua per alcuni giorni.

A. Rosso, metà bassa del Dorè.
B. Rosso, Dorè, Giallo.
C. Rosso, Dorè, Giallo, Verde.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco.

VIII. Vetro fuso con molto Croco di Marte, e poco Ossido di Rame.

A. La terza parte più alta del Rosso, il Dorè.
B. La metà alta del Rosso, il Dorè, la metà bassa del Giallo.
C. Rosso, Dorè, Giallo, Verde.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Tutti, fuorchè il Paonazzo.

IX. Ossido di Cobalto fuso con Vetro.

A. Paonazzo.
B. La quarta parte più bassa del Rosso; Azzurro, Indaco, Paonazzo.
C. La terza parte più bassa del Rosso; la terza parte più alta del Verde; Azzurro, Indaco, Paonazzo.
D. Metà bassa del Rosso; metà superiore del Dorè; metà bassa del Giallo; metà alta del Verde; Azzurro, Indaco, Paonazzo.

E. Nell' Immagine prismatica rimangono due mancanze, o vogliam dire strozzature. La prima cade sul confine del Rosso col Dorè; la seconda sul confine del Giallo col Verde.

X. Cobalto ed Acido Nitro-Muriatico (*Inchiostro Simpatico*); dopo averne prima precipitato tutto il Bismuto che potevasi, col diluirlo in molt' Acqua, e poi concentrandolo colla Evaporazione.
A. Dorè.
B. La terza parte più alta del Rosso; Dorè, i due terzi bassi del Giallo.
C. Metà superiore del Rosso; Dorè, Giallo.
D. Metà superiore del Rosso; Dorè, Giallo, Indaco.
E. I due terzi superiori del Rosso; Dorè, Giallo, Azzurro, Indaco, la parte inferiore del Paonazzo.
Non separandone il Bismuto come sopra, escon più presto il Rosso intero ed il Paonazzo.

XI. Vetro fatto rosso coll' Ossido di Manganese.
A. Rosso.
B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, Giallo.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde.
E. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.

XII. Indaco macinato con olio e schiacciato fra due vetri piani.
A. Verde, la metà bassa dell' Azzurro.
B. Giallo, Verde, Azzurro.
C. Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco.
D. La terza parte più alta del Rosso; Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco; la metà inferiore del Paonazzo.
E. Manca solamente l' estremità inferiore del Rosso.

XIII. Indaco disciolto nell' Acido Sulfurico (*Azzurro di Sassonia*).
A. L' estremo più basso del Rosso, la terza parte più alta del Verde, e i due terzi più bassi dell' Azzurro.
B. La terza parte più bassa del Rosso, la metà alta del Verde; l' Azzurro.

C. La metà bassa del Rosso, Verde, Azzurro, Indaco.
D. I due terzi bassi del Rosso; Verde, Azzurro, Indaco, la metà bassa del Paonazzo.
E. Manca il solo Dorè.

XIV. Indaco e potassa disciolti in Acqua.
A. Giallo, la terza parte più bassa del Verde.
B. Dorè, Giallo, Verde.
C. La parte superiore del Rosso; Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
D. Più della metà alta del Rosso; Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco.
E. Tutti, eccetto il Paonazzo.

Questa medesima serie di Colori ottiensi colla preparazione detta dai Tintori *Indaco di Tino*, prima che questa esposta all' aria prenda la tinta nativa dell' Indaco, come poc' anzi al num. 12.

XV. Coccíniglia bollita nell' Acqua (*Cremisi*).
A. Rosso.
B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, Indaco.
D. Rosso, Dorè, parte bassa del Giallo; Azzurro, Indaco, la metà inferiore del Paonazzo.
E. Manca il solo Verde.

Se alla Decozione suddetta aggiungasi Allume, in tal Caso nello Spettro prismatico rimangono alla fine due mancanze, o vogliamo dire strozzature, l' una fra il Dorè ed il Giallo, l' altra alla banda superiore del Giallo stesso.

XVI. Cocciniglia ed Alkool.
A. Rosso.
B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, Giallo.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Indaco, Paonazzo.
E. Manca solo la parte superiore del Verde sul Confine dell' Azzurro.

La Cocciniglia bollita in Acqua con Tartrito acidulo di potassa rende press' a poco la serie stessa di Colori; salvo che la mancanza ultima cade piuttosto sull' Azzurro che sul Verde.

XVII. Cocciniglia, Acqua, e Soluzione di Stagno nell' Acido Nitro-Muriatico (*Scarlatto*).

A. Rosso, Dorè, la metà inferiore del Giallo.
B. Rosso, Dorè, Giallo.
C. Rosso, Dorè, Giallo, Indaco.
D. Rosso, Dorè, Giallo, metà inferiore del Verde; Indaco, Paonazzo.
E. Manca soltanto una porzion dell' Azzurro.

Gli Acidi Sulfurico, Nitrico, e Muriatico inducono ciascun d'essi sull' Infusione di Cocciniglia press' a poco le medesime apparenze. Lo che dimostra, che non allo Stagno, ma all' Acido unito col medesimo devesi la trasformazione del Cremisì nello Scarlatto.

Se la dose dell' Acido sia eccedente, la serie dei Colori è la stessa, che nella Infusione di Croco, o d' Ancusa al num. 24.

XVIII. Tornasole in pani, ed Acqua. (*Lacmus*).

A. La metà più bassa del Rosso.
B. Rosso; un po' d' Azzurro e d' Indaco sul loro confine scambievole.
C. Rosso, la metà superiore del Verde; Azzurro, Indaco.
D. Rosso, Verde, Azzurro, Indaco, Paonazzo.
E. Rosso, la metà inferiore del Dorè, la superiore del Giallo; e tutti gli altri superiori a lui.

I medesimi Colori ottengonsi, aggiungendo Ammoniaca nel Liquore; eccetto che adesso nel Grado A esce tutto il rosso, e non la sola sua parte inferiore.

XIX. Lo stesso, ed Acqua subacida.

A. Rosso.
B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, Azzurro, Indaco.
D. Rosso, Dorè, parte inferiore del Giallo, metà superiore del Verde; Azzurro, Indaco.
E. La mancanza o strozzatura ultima rimane fra il Giallo ed il Verde.

XX. Campeccio bollito nell' Acqua (*Hæmatoxilon Campechianum* Linn.).

A. Rosso.

B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, Indaco.
D. Rosso, Dorè, Azzurro, Indaco, Paonazzo.
E. Rimane soltanto una strozzatura a mezzo il Giallo.

XXI. Campeccio, Acqua, ed Allume.
A. La metà inferiore del Rosso.
B. Rosso.
C. Rosso la metà inferiore del Dorè, il confine fra l' Azzurro e l' Indaco.
D. Rosso, Dorè, il Verde alto, Azzurro, Indaco, Paonazzo.
E. Resta una strozzatura a mezzo il Giallo, come nel num. precedente.

XXII. Verzino bollito nell' Acqua (*Cæsalpinia Brasiliensis* Linn.)
A. Rosso.
B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, parte bassa del Giallo.
D. Rosso, Dorè, due terzi bassi del Giallo, due terzi alti del Verde; cominciano a spuntare i tre superiori ma assai languidi.
E. Non manca più che il confine fra il Giallo e il Verde.

L' Alkool estrae dal detto Legno una egual serie di Colori, se non che la mancanza ultima al Grado E cade tutta sul Giallo. Lo stesso interviene se all' infusione in Acqua aggiungasi Allume.

XXIII. Vino Rosso di Scandiano.
A. Rosso.
B. Rosso, Dorè.
C. Rosso, Dorè, Azzurro.
D. Rosso, Dorè, Verde, Azzurro, Indaco.
E. Manca una porzione del Giallo.

XXIV. Gomma gotta, Acqua, ed Alkool.
A. Rosso, Dorè.
B. Rosso, Dorè, Giallo.
C. Rosso, Dorè, Giallo, Verde.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Manca il solo Paonazzo.

Questa serie di Colori combina con quelli della Solu-

zion d' oro (num. 1.). Li medesimi Risultati ho ottenuto pure press' a poco dalla Trementina colorata da se; dall' Ambra; dal Vino bianco di Scandiano; dal Cartamo tintorio lavato ben prima e poi disciolto con Potassa nell' Acqua; dalla Curcuma; dalla Potassa ferruggirosa.

L'Infusione di Zafferano, (*Crocus sativus* Linn.), e quella di Legno giallo (*Morus tinctoria* Linn.) nell'Acqua o nell' Alkool, e la radice d' Ancusa disciolta nell' Alkool, al Grado A danno passo al Rosso solo, indi poi seguono la medesima progressione della Gomma gotta.

XXV. Il succo delle bacche del Rhamnus Catharticus con Allume diluite nell'Acqua (*Verde di Vessica*).

A. Giallo.
B. Dorè, Giallo, Verde.
C. Metà superiore del Rosso; Dorè, Giallo, Verde, metà inferiore dell' Azzurro.
D. I tre quarti più alti del Rosso; Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco.

XXVI. Infusione di Foglie di Trifoglio nell' Alkool fatta di recente.

A. Parte infima del Rosso, il Confine fra il Giallo e Verde.
B. La parte infima del Rosso, tutto il Giallo; i due terzi bassi del Verde.
C. La parte infima del Rosso; Dorè, Giallo, Verde.
D. La parte infima e la metà superiore del Rosso; Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Vi rimane tutta via una strozzatura di sotto alla metà del Rosso; tutti gli altri, eccetto il Paonazzo.

Esposta la detta Infusione per un' ora al Sole nel grado D, è mancato l' Azzurro e la metà superiore del Verde, ed è venuto fuori invece intero il Rosso col Dorè, Giallo, e metà bassa del Verde; onde à preso ad occhio in totale un color Giallo.

XXVII. Infusione di fiori di Viole nell' Acqua, chiarificata per filtrazione.

A. Rosso languido, Verde, Azzurro.

B. Rosso, due terzi bassi del Dorè, parte alta del Giallo; Verde, Azzurro.
C. Rosso, due terzi bassi del Dorè, due terzi alti del Giallo; Verde, Azzurro, Indaco.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro, Indaco.
E. Esce anche il Paonazzo ma debole.

XXVIII. La stessa Infusione di Viole con Carbonato di Potassa.
A. La metà superiore del Giallo, e l'inferiore del Verde.
B. Giallo, Verde.
C. Metà alta del Dorè; Giallo, Verde, metà bassa dell' Azzurro.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Tutti, fuorchè il Paonazzo.

Se la Potassa sia in troppa dose, i Colori trasmessi comincian dal Rosso anche nella maggior densità, ed il liquore ad occhio allora divien giallo.

XXIX. La stessa Infusione di Viole del num. 27. con poche gocce d'Acido nitrico.
A. Rosso.
B. Rosso, Dorè, un poco d'Azzurro.
C. Rosso, Dorè, parte alta del Verde; Azzurro, Indaco.
D. Rosso, Dorè, principio basso del Giallo, Verde superiore, Azzurro, Indaco, Paonazzo.
E. Rimane tuttavia una strozzatura fra il Giallo ed il Verde.

XXX. Oricello ed Alkool. (*Lichen Roccella* Linn.).
A. Rosso.
B. Rosso, principio del Dorè, Confine fra l' Indaco e il Paonazzo.
C. Rosso, metà del Dorè; Indaco, Paonazzo.
D. Rosso, Dorè, Azzurro, Indaco, Paonazzo.
E. Manca il solo Giallo.

CA-

CAPITOLO III.

Quattro maniere diverse, con cui può un Corpo divider la Luce ne' suoi Raggi più semplici, e quindi comparir colorato.

QUando Newton osservato ebbe le Lamine sottili colorate parve allora, e per quasi tutto il cadente Secolo è paruto ad una gran parte de' Fisici, che quel solo Fenomeno bastar potesse a render ragione di tutti i Colori naturali dei Corpi. Ma quì pure, come altrove, conviene metter freno alla impazienza di spingere fuor di tempo un sistema a quella Universalità, di cui esso, almeno per ora, non è suscettibile. Radunando e combinando tutte insieme le Cognizioni che la Scienza naturale possiede oggi intorno alla Luce e restingendoci al puro Fatto, scorgeremo essere non una, ma quattro, e queste separate e distinte fra loro, le Maniere o vogliam dire Circostanze e Cagioni, onde i Corpi agiscono a separare la Luce in guisa di comparir colorati.

La prima Circostanza, nota già da gran tempo, si è la semplice Rifrazione. A questa Cagione appartengono i Colori dei Corpi veduti attraverso d'un Prisma, e quelli dell' Iride, e quelli del Diamante tagliato a faccette, e quei che tingono l'orlo degli Oggetti guardati con Cannocchiale non Acromatico, &c.

La seconda Circostanza atta a far nascere i Colori si è il ripercotersi del Lume, quand' esso rade esteriormente le parti sottili e sporgenti dei Corpi, senza esservi in modo alcuno penetrato dentro. H. Brougham nella Memoria sovracitata, estendendo le Esperienze del Grimaldi, à fatto vedere, che la Luce bianca mentre passa vicino ad un Ago, non solo è *diffratta*, ma che inoltre ne è *riflettuta*, e che per tale ripercotimento eziandio si sparge e divide ne' suoi colori. Da questa *anterior Riflessione* della Luce nascono i seguenti Casi di Coloramento nei Corpi. 1.° Le superficie metalliche levigate sì, ma poi segnate da qualche minutissimo solco od asprezza, ed illuminate dalla viva Luce del Sole si tingono d'Iridi vario-pinte sul confine di ciascun

solco o prominenza od asprezza. 2.° Il Cioccolatte bollito, l'Inchiostro, e simili Infusioni rese torbide ed oscure da qualche densa materia imperfettamente disciolta, anche senza esser formate in ischiuma, osservandole da vicino in lume abbastanza forte, presentano de' minutissimi punti colorati, i quali sono altrettanti corpicciuoli nuotanti nel liquido, e riflettenti la luce con dispersione e division di Colori. 3.° Non diversa è la natura delle Iridi, le quali talvolta si mostrano sulle tele di ragno, sui veli tessuti di rara e finissima Seta o di sottilissimi fili metallici.

4.° Alla Classe dei Colori nati per semplice Riflessione appartiene eziandio il seguente Esperimento il quale ci guida, non per vaghe Ipotesi ma per i retti Analogia, a spiegare con facilità alcune luminose Apparenze Atmosferiche. Espongasi una Lamina piana di Cristallo al vapore del Mercurio bollente; questo le si attacca appannandola ed aggrumandovisi a mo' di nebbia in pallottoline quasi insensibili; le quali, se tengasi esposta più a lungo la Lamina abbastanza fredda al vapore stesso, divengono successivamente più grosse. Si guardi poi nella oscurità una Candela accesa attraverso di essa Lamina così appannata di Mercurio, e si vedrà una Corona di Lume colorato circondar la Candela. Non si può dire che una tale Corona si generi nè per *Rifrazione*, nè per trasmissione di Luce attraverso le sferette mercuriali; sì perchè queste hanno già grossezza tale, che basta a renderle opache; sì perchè essa Corona suol esser rossa allo esterno ed azzurra allo interno, lo che discorda dalla semplice Rifrazione di una pallottola trasparente. Non si può dire nè anche, la suddetta Corona essere prodotta per *Difrazione*; perchè il suo Diametro apparente riesce di sei, dieci, e più gradi; mentre nelle Osservazioni di Comparetti (*a*) la Difrazione non torce i Raggj, se non per un angolo di tre o quattro, o tutt' al più sei minuti. Rimane adunque, che un tale Fenomeno succeda per *Riflessione* dalla anterior superficie delle sferette mercuriali; nel qual Caso appunto il Rosso torcesi più del violetto. Or la suddetta Corona è un Immagine di quelle più grandi, che col nome di *Aloni*, in un

---

(*a*) De Luce Inflexa pag. 107.

Cielo seminebbioso, talvolta circondan la Luna od il Sole; per le quali adunque non è uopo nè con Ugenio supporre noccioletti di ghiaccio opachi al centro che nuotino nell' atmosfera, nè, come Newton, Accessi di facile e difficile trasmissione per l' interna sostanza delle Vessichette vaporose, o delle particole acquee semiprecipitate dall' aria. La Riflessione prodotta al loro esterno basta ad intenderne le apparenze; e se ne à chiaro e parlante l' esempio nella sopradescritta Iride Mercuriale; il quale esempio si può imitare egualmente appannando la Lamina di Cristallo con Vapor acqueo o con brina, oppure segnandola con finissimi taglj paralleli fra loro, od anche formando un tessuto di sottilissime fila metalliche. Si potrebbe forse tutt' al più ammettere la Rifrazione per quegli Aloni, che hanno il Rosso allo interno; sebbene anche un dato avvicinamento di sferette fra loro possa dare maggior rimbalzo al Paonazzo eziandio nella anterior Riflessione delle sferette medesime. Nell' addotto Esperimento della Lamina offuscata dal Mercurio il Campo intimo fra la Corona e il Lume della Candela osservasi notabilmente più oscuro del resto, e ciò avvien pure nelle Corone della Luna e del Sole. In oltre il Diametro apparente della Corona suddetta è tanto maggiore, quanto sono più tenui le pallottole mercuriali, lo che spiega egregiamente la moltiplicazione e la varietà di grandezza che riscontrasi nelle Corone Meteorologiche. Anche nelle Lamine di vetro segnate da finissimi solchi non una sola Iride si vede, ma due o tre successivamente più distanti dal Lume Centrale. Ma non si vuol qui entrare nel minuto esame de' suddetti capricciosi Fenomeni meteorologici, dai quali poi nascono i Parelj, e chi sa che non fors' anche le Aurore Boreali; basti avere assicurata con deciso Esperimento questa nuova via d' intenderli, più naturale e più vera delle comunemente adottate. Non può per altro questa via strascinarsi mai fino all' Iride comune; della quale abbiamo un troppo esatto esemplare nei Raggj rifratti entro una palla di vetro piena d' Acqua.

La seconda classe de' Colori, che abbiamo pur ora veduto nascere da luce ripercossa sul confine anteriore dei Corpi, induce una particolare eccezione alla dottrina di que' Fisici valorosi, i quali pretendono che il Colore in un

Corpo non venga prodotto mai, se non da Luce penetrata già entro la sostanza del medesimo Corpo.

Ma se la Luce colorasi anche per la semplice Riflessione, come avvien egli adunque, che quando un Corpo abbia unite e bastantemente eguali le sue superficie, il Lume del Sole riflettuto dalla prima ed anteriore di esse suol tutto apparire d'una sola tinta uniforme? Avviene questo; non già perchè intervenga equilibrio tra le Forze che riflettono le divesse fila eterogenee del medesimo Raggio; ma bensì e piuttosto, perchè le Iridi generate dai punti continui successivi del Corpo illuminante, non meno che della superficie illuminata, si sormontano l'una l'altra, si mescolano insieme e si confondono in guisa di ripristinar la bianchezza. Non diversamente succede, quando si guarda una superficie uguale attraverso d'un Prisma; anche in tal Caso per ciascun punto di detta superficie si fa separazione de' Raggi eterogenei; ma con tutto ciò neppure in questo Caso i Colori non si manifestano se non che agli orli, e dovunque sia interruzione di tinta. Se il tenue solco d'una superficie metallica bianca e pulita venga opportunamente illuminato da un vivo e sottil Raggio di Sole, e l'occhio sia in positura conveniente; vedesi l'una delle due sponde del solco apparir tinta dai colori alti Prismatici, e l'altra sponda opposta osservasi tinta dai bassi. Or ciò succede egualmente nelle maggiori interruzioni d'una superficie bianca opportunamente guardata col Prisma, e dimostra che i due Casi sono analoghi fra loro, anzi identici quanto alla sovrapposizion delle Iridi successive. Tutto il divario consiste in ciò solo; che piccolissima è la Dispersione dei Raggj riflettuti ed ogni menoma confusion li ripristina in bianco; ampia all'incontro e non sì facilmente correggibile è la Dispersione dei Raggj rifratti dal Prisma.

La terza Cagione produttrice di colore nei Corpi si è la proposta da Newton, e della quale abbiam parlato nel Capitolo primo. Quando che il Corpo sia composto di particole e d'interstizj alternati con esse in una data proporzione di sottigliezza e di forza rifrangente; in tal Caso la Luce, penetrata che sia in esse particole, ne vien divisa, ed una data porzione de' suoi Colori torce indietro il suo viaggio e ripercotesi, mentre l'altra porzione passa ol-

tre e trasmettesi; il tutto a norma delle Lamine sottili colorate. Si à in pronto un Criterio onde assicurare, che la Colorazione di certi Corpi attribuire si debbe ad una tal circostanza. Qualunque volta il Corpo presenta per trasparenza una tinta opposta a quella che esso dimostra per riflessione, allora è forza concludere, che la Colorazion di quel Corpo spiegar si deve secondo la Teoria del sommo Filosofo Inglese. Giova qui indicare alcuni dei Corpi che si colorano certamente per tal maniera.

1. L'Oro. E' noto, che le Foglie d'oro gialle per riflessione sono azzurre per trasparenza. Esaminate le medesime coi Metodi del Cap. 2.°, ho veduto passare attraverso le medesime principalmente il Verde, l'Azzurro, l'Indaco; gli altri, specialmente i bassi, venir ripercossi in massima parte.

Nelle trine d'oro la veste di questo metallo, che ricopre i fili d'argento onde son tessute le trine medesime, à talvolta di sottigliezza fino a 0,0000003 di pollice (*a*). Ma la più sottil lamina d'aria che possa rendere il giallo non à che 0,000007 (*b*), la quale è una grossezza 23 volte maggior della prima. Converrà dunque, stando alla Teoria di Newton, che per l'oro immerso nell'aria il seno d'Incidenza della Luce stia a quello di Rifrazione come 23 : 1. A dir vero ho trovato che una parte d'oro disciolta in cinque d'Acido nitro-muriatico non aumenta in esso Acido la Ragione dei Seni suddetti se non di circa 0,004. Ma forse l'oro in combinarsi coll'Acido perde la massima parte di quella Forza rifrangente, che à nel suo stato metallico di pura aggregazione.

2. L'Infusione di Legno Nefritico. (*Guilandina* Linn.) Ecco i colori che la penetrano secondo i consueti gradi di concentrazione.

A. Rosso.
B. Rosso, Dorè, la metà bassa del Giallo.
C. Rosso, Dorè, Giallo, la metà bassa del Verde.
D. Rosso, Dorè, Giallo, Verde, Azzurro.
E. Tutti fuorchè il Paonazzo.

(*a*) Reaumur Acad. des Sciences An. 1713. pag. 206.
(*b*) Newton Optic. lib. 2. part. 2.

La suddetta Infusione comparisce per Riflessione d' un color Blò più forte che mai nei due gradi B, e C.

3. L' Aria. Di giorno, in faccia di un Cannocchiale Acromatico di Dollond espongasi un Cerchio affatto nero e bastantemente ampio, in campo chiaro, in situazione opposta al Sole, alla distanza di trecento tese, d' un Miglio, di due Miglia ec.; si vedrà col Cannocchiale il detto Cerchio tingersi in colore azzurro, e questo colore farsi viavia più sensibile, a proporzione che esso Cerchio più e più si allontana, vale a dire quanto è maggiore la quantità d' aria interposta. Per lo contrario un Lume bianco e splendente veduto col detto Cannocchiale in notte oscura si colora in giallo-rossigno, e la tinta diviene tanto più carica quanto più il Corpo è discosto dal Cannocchiale. Cessino dunque omai le molte Dispute dei Filosofi sul perchè dei colori del Cielo: L' aria riflette i Raggj alti del prisma, e trasmette i bassi; non altrimenti che l' Oro, e l' Infusione di Legno Nefritico. Osservò già Newton, che lo Spettro Prismatico del Sole, anche meridiano, riunito di nuovo col mezzo di una lente risusciva un bianco assai più puro, quando si tolga prima dallo Spettro medesimo una porzione dei Raggj bassi, con che si equilibra la perdita d' una porzione degli alti ripercossi indietro dall' aria in tragittandola. Se il Lume, venendo a noi per la linea dello Zenit, incontra in una grossezza di circa 20 miglia d' aria capace di spogliarlo dei colori alti, esso ne deve poi tragittare le quattrocento e più miglia d' egual natura sulla via dell' Orizzonte: onde chiara apparisce la ragione, per cui l' Aurora si vede sorgere *colla fronte di rose e coi piè d' oro*, e perchè la Luna interamente ecclissata ammantasi in colore di rame. Gli Alberi e i Monti di fondo oscuro non valgono co' proprj Raggj a smorzare la tinta azzurra che loro sovrainduce l' Aria altronde illuminata, la quale trovasi interposta fra gli Oggetti medesimi e l' Occhio; e quindi veduti in parte diversa dal Sole si mostrano tinti in Celeste tanto più carico, quanto sono più lontani dall' Occhio; effetto noto già da gran tempo ai Dipintori (*a*). La Luce bianca delle Montagne nevate e lontane,

(*a*) Vinci della Pittura Cap. 163, 164, 165.

nel venire a noi, perde una porzione de' suoi colori alti, ripercossi indietro dall' Aria che essa Luce è costretta di tragittare; e dovrebbero esse Montagne per questo motivo comparire a Noi rosso-gialle non altrimenti che il Sol nascente: Ma l' Aria stessa interposta fra quelle Montagne e l' Occhio, quando sia altronde illuminata dalla banda nostra, mescola con loro il proprio color Celeste; rende così da una banda ciò che à levato dall' altra, e in esse Montagne ripristina più o meno il color bianco. Per simil motivo la Luna piena che nasce appena dopo il tramonto del Sole comparisce bianca, od almeno assai meno rossa di quello che Essa si mostri sott' altre Fasi, in notte oscura, sull' Orizzonte medesimo. La sovrindicata compensazione di colori, e la conseguente ripristinazione del bianco nelle Montagne nevate è sfuggita alla penetrazione dell' Illustre Fisico Ginevrino (*a*). Ma tutta questa Teoria sul Color duplice dell' Atmosfera sussiste a rigore sol fino a tanto che questa ritrovasi nello stato di trasparenza perfetta: Perchè i vapori mescolati e non ben disciolti nell' Aria le danno un' occhio opaco biancastro, che altera e distrugge più o meno le tinte di lei primigenie; quindi il Color celeste dell' Aria è sempre più vivo e più puro verso il Zenit e di su le altissime Cime dei monti, che non veduto dai bassi Piani e verso l' Orizzonte (*b*); ed a ragione il prelodato instancabile Viaggiatore giudicò potere dal suo *Cianometro* argomentare la quantità e lo stato diverso dei Vapori diffusi per l' Atmosfera.

4. Il Quarzo Cristallizzato, il Vetro, la Mica, il Gesso Speculare, l' Adularia, e in generale i fossili trasparenti o semitrasparenti di frattura lamellare, qualunque volta portino nel loro interno qualche tenuissimo e quasi impercettibile screpolamento, nel luogo di tale fenditura sogliono presentare una varia e moltiplicata degradazion di colori diversi; i quali nascono or da sottilissime Laminette di

---

(*a*) Saussure Voyages Note au §. 2083.

(*b*) Sulla Cima dei Monti nevati la forte ripercussion della neve illuminando vivamente di sotto in su l' Aria sovrapposta deve renderne il colore viemaggiormente carico e cupo.

materia separatasi dalla massa totale, ed ora dal vano stesso della aperta Screpolatura.

5. L' Indaco macinato in pochissima dose sopra una lamina di Cristallo si attacca ad essa Lamina a mo' d' una vernice; la quale veduta per riflessione mostra una lucentezza metallica ed il colore del rame, ma guardata per trasparenza presenta il color naturale dell' Indaco, e le degradazioni descritte sopra (Cap. 2. Esper. 12.) L' Indaco più ordinario è men àtto ad imprimersi di tale doppio colore per macinazione, anche quello che mostra da se all' esterno la somiglianza del rame. L' Indaco fino poi deve ad una mescolanza di tali due colori quell' apparenza violetta, che lo adorna.

6. Le Sostanze oleose, ferruginee, mucilaginose distendono talvolta sulla Superficie dell' Acqua o del Vetro un sottilissimo velo colorato da molte Iridi; le quali guardate contro la Luce si osservano cambiar di colore, e però appartengono esse pure alla Classe dei Colori generati per sottigliezza estrema di Lamine.

Rimane adesso da rintracciare, qual sia la quarta Circostanza produttrice di Colore nei Corpi; essa deve comprendere tutte le Tinte che abbiam messe a cimentò nel Capitolo 2.°, e tant' altre simili a queste; le quali tutte insieme costituiscono la Classe di Colori la più numerosa, e la più usuale. Qui conviene innanzi tutto mostrare, che questa sì copiosa Classe di Colori non nasce da veruna delle tre Cagioni enunziate finora, e che però conviene per Essi rinvenire nella Natura una diversa e particolare maniera di eccitarli.

Non molto occorre a persuaderci, che la tinta di tali Corpi non si genera per semplice Rifrazione prismatica; basti il riflettere che essa tinta si ottiene anche da' Raggj, che penetrano ed escono dal Corpo sempre in linea perpendicolare alle sue Superficie; e si sa che i Raggj perpendicolari ad una Superficie non soffrono Rifrazione.

Una Esperienza ricordata già dal Grimaldi (*a*) valerà per convincerne, che tali Colori non nascon neppure da Luce ripercossa o divisa nella prima faccia anteriore delle an-

(*a*) De Lumine. Prop. VIII. n. 5.

anzidette Sostanze, che fu già la seconda maniera di Coloramento nei Corpi. Un Vetro piano colorato nella Fornace abbia le sue facce opposte ben pulite e Levigate; l' Immagine del Sole ripercossa dalla prima ed anteriore di esse facce è bianca, mentre l' altra Immagine ripercossa dalla faccia posteriore è tinta del Colore del Vetro. Non altrimenti succede, se al Vetro si sostituisca qualsiasi Gemma naturale colorata. Bianca altresì e pura è la Luce riflettuta dalla prima Superficie di ciascuno dei Liquori tinti del Capitolo precedente. Sanno gli Amatori dei Quadri che, se una Tavola dipinta quantunque non velata di Vernice si guardi dal Sito dove vanno a ferire i Raggj della Finestra ripercossi dal Quadro con Angolo d' incidenza eguale a quello di Riflessione, Chi sta in quel Sito non può discernere i Colori della Pittura: Ei dice allora di averla in *Lume falso*, perchè il Lume bianco ripercosso ivi dalla Scorza anteriore del Quadro confonde la Vista, e smorza il Senso dei Colori, che rappresentar debbono le varie Figure del Quadro stesso, e che nascono dalle sole interne parti delle tinte che il Pennello distese già sulla tela. Abbiam già veduto sopra il perchè la Riflessione anteriore di una Superficie continuata ed eguale non valga a dividere la Luce in colori separati e sensibili all' Occhio.

Le sopranominate Tinte non sono neppure da annoverarsi nella Classe terza, vale a dire in quella delle Lamine sottili trasparenti di Newton. Imperciocchè 1.° G. Delaval, in una sua Memoria posteriore (*a*), e molto preferibile all' altra sua già tradotta in Italiano, fa vedere che i Corpi come sopra colorati se si rendano trasparenti, e se in tale stato vengano guardati di faccia a molta profondità di Volume, o sovra un Fondo perfettamente oscuro, compariscono allora assolutamente neri; onde in tale stato di pellucidità il loro Colore non si comprende, se non guardandoli attraverso e per trasparenza. Quindi Egli rettamente conchiude e convince col Fatto, che i suddetti Corpi intanto a Noi sembrano colorati per Riflessione, in quanto che la Luce si tinge in passando attraverso i medesimi, e colla tinta presa in quel passaggio ritorna indietro; o per-

(*a*) Memoirs of the Manchester Society Vol. 2.

chè ripercossa viene da un Corpo bianco sottoposto alla Vernice pellucida colorante, come accade nell' Arte d' acquarellare in Carta e in tutta quanta la Professione tintoria; o perchè la Luce stessa colorata come sopra riflettesi dalla faccia ultima posteriore del Corpo trasparente, come osservasi nei Vetri colorati dell' Esperienza poc' anzi descritta; o perchè finalmente rimbalza dagli Interstizj frapposti alla Sostanza colorante, come nel Biadetto macinato. Ma se in tali Sostanze la Luce non si divide in modo che i Colori dalle medesime riflettuti riescano diversi da quelli che passan oltre; non si può neppur sostenere, che tali Sostanze si trovino nel Caso della Lamina d' aria compresa fra i due Vetri, nella quale i Colori trasmessi formano il residuo e il complemento di quelli che vengono riflettuti.

2.° Supponiamo di volere con fragmenti di una data sottigliezza formare un Corpo; e con tale proposito supponiamo d' aver soffiato alla Lampana de' Barometristi una quantità di Lamine di Vetro sottili in modo che tutte ci appariscano di colore Azzurro per trasparenza e Rosso per riflessione; avuto riguardo in preparar ciò, se fia uopo, alla densità del Cemento, da cui dovranno poi essere collegate. Dividiamo poi dette Lamine in frantumi tali che non venga per sì fatto sminuzzamento alterata la Specie de' Colori da ciascun d' essi frantumi trasmessa e riflettuta; e con frantumi tali componiamone un Corpo. Questo Corpo a dir vero potrà comparire opaco, e potrà in esso mancare il Colore Azzurro di Trasmissione; il quale quantunque suppongasi posto in accesso di facile transito riguardo ai frantumi comunque moltiplicati, forse non può poi superare il cemento o le vacuità frapposte nella unione e nella accumulazion dei frantumi. Ma il Color Rosso di Riflessione non dovrà giammai perdersi per questo solo, perchè dietro alla prima Lamina se ne aggiungano altre ed altre successive. Però ogni volta che il Colore d'un Corpo debba ripetersi dalle Lamine sottili di Newton, potrà bensì quel Corpo talvolta presentare il solo Color riflettuto, consumando poscia nelle interne parti il trasmesso, come avviene in un pezzo d' oro massiccio; ma non potrà esso giammai rimandare all' Occhio il solo Colore di trasmissione, come pure veggiamo accadere in tutti i casi del Capitolo

precedente. Che se ad evitare la forza di quest' Argomento, volesse Alcuno immaginare nelle Vacuità sottoposte ai fragmenti una Sostanza dotata di tal forza rifrangente, che valga a distruggere in ciascun fragmento la separazion della Luce in Colori trasmessi per una parte e riflettuti per l' altra; Egli con ciò renderebbe Egli stesso la spiegazione di Newton inapplicabile al Caso.

3.° Le Serie de' Generi diversi di Raggj, che negli Esperimenti del Capitolo precedente ho trovato passare attraverso delle Sostanze colorate, per lo più discordano nella forma e progression loro dalla Serie e progression de' Colori, che Newton à assegnato alle diverse grossezze e forze rifrangenti delle sue Lamine (*a*). Per es. non avvi Lamina, che secondo una Teoria tale trasmetter possa in un tempo i tre soli, Rosso Dorè ed Azzurro, come li rende l' Ossido d' Oro al grado C di densità; oppur che renda i tre soli, Rosso Verde Azzurro, come ottengonsi dal Blò di Sassonia al grado B. Questi e molti altri Corpi, a loro simili in ciò, tramandano più sorte di Raggj, con tali frapposte interruzioni nell' ordine prismatico, che la Teoria di Newton non ammette in verun modo. Essa Teoria esige inoltre, che al variarsi la densità nel Corpo colorato le Serie de' Colori si variino bensì od ascendendo o discendendo nella Scala prismatica, ma non soffre giammai che dette Serie ascendano e discendano nel medesimo tempo: eppur ciò vedesi ben di frequente accadere negli esposti Esperimenti; come nel Solfato di Rame, nel Prussiato di Ferro, nel Verde di vessica &c. Finalmente non si troverà nelle Lamine trasparenti Grossezza tale, che dia transito al solo Dorè primitivo come pur fa l' Inchiostro Simpatico di Cobalto, o al solo Giallo confinante col Verde, come fa il Vetro colorato a Smeraldo, l' Indaco e Potassa &c.

4.° A dimostrare che questa Classe di Colori non è da spiegarsi colla Teoria di Newton, gioverà eziandio il seguente curioso ed a più altri fini giovevole Esperimento. Con un' oncia di Cocciniglia si sono tinte in Cremisi dieci once di Seta; le quali mostravano con ciò una tinta lodevole e sufficiente; e misurandone una data porzione con

Zzzz 2

(*a*) Optic. lib. 2. Tav. 2. fig. 6.

diligenza, si ricavò la lunghezza di dette dieci once essere in totale 145 mila piedi di Organzino. Il filo di questo Organzino esaminato in più luoghi col Microscopio si è trovato per una misura media composto di 50 fila semplici, quali escono dalla trafila naturale del loro Verme; onde le dieci once suddette contenevano circa 7'250'000 Piedi di fila semplici di Seta: e queste fila col Microscopio vedevansi coperte d' una continuata lucida trasparente rossa vernice di Cocciniglia. Un' oncia della medesima Cocciniglia bollita due ore in centoventi once d' Acqua e poi lavata ancora à deposto più della sua metà e presso a cinque Dramme di Sedimento inetto a tingere i Corpi; Onde non è irragionevole stabilire, che sole tre Dramme della tinta di Cocciniglia hanno dato la Vernice rossa a quei sette milioni di Piedi: Quanta era dunque la grossezza di questa Lamina di Colore distesa sopra le dieci once di Seta? Col Micrometro di un Microscopio di Dollond ho misurato molti dei sopranominati fili semplici e primitivi del filugello, e gli ho rinvenuti la più parte avere di Diametro fra $\frac{1}{200}$ e $\frac{1}{300}$ di Linea. Prendendo per il medio $\frac{1}{250}$ di Linea, e fatto il calcolo, si troverà, le tre Dramme di Colore essersi distese in una Superficie unita non minore di 627 piedi quadrati. L' Estratto di Cocciniglia non à gravità Specifica notabilmente maggiore dell' Acqua; perciò tre Dramme di esso debbono occupare circa 0, 58 di pollice Cubico; e quindi i 627 Piedi quadrati di Vernice data alla Seta non aveano di grossezza che presso a $6\frac{1}{2}$ parti milionesime di pollice. Ma perchè la vernice non poteva essere eguale in tutti i fili e in ciascuna parte dei medesimi, conviene per necessità metterne di tale che non avesse neppur cinque milionesimi di grossezza. Or ciò posto dico, che il Color rosso della Seta nel riferito Esperimento non nasce da una data grossezza di corteccia distesavi sopra dalla Cocciniglia secondo la Legge delle Lamine sottili. Perchè la Decozione ben carica di quest'Insetto non mi à manifestato maggior forza refringente dell' Acqua; e però stando alla Teoria di Newton, una Lamina di essa non può discende-

re sotto a 0,0000067 di grossezza, senza cambiare il suo aspetto rosso in Dorè od in Giallo. Ma noi abbiamo veduto la grossezza della sopradetta Corteccia in alcune parti dei fili dover essere al di sotto di 0,000005; nè mai intanto alcuna parte di essi si vede prendere una tinta gialla od arancia. Che anzi assottigliando vieppiù la Corteccia, col tingere dodici once di Seta in una sola di Cocciniglia, il Colore lungi dal mutarsi in Dorè, si volse piuttosto alla parte contraria, al Violetto od al Vinato, come appunto avviene alla Decozione di Cocciniglia diradata al grado D. E similmente, se la tinta d' un' oncia di Cocciniglia si esaurisca in sole sette, o in sole cinque once di Seta, la Corteccia colorata ingrossa allora fino a 0,000010 e più; ma non perciò il Colore cambiasi in Indaco od in Azzurro, come importerebbe la Teoria; esso non fa che vieppiù caricarsi nel Cremisi.

Basterà, cred' io, il fin quì detto a concludere, che i Colori di pura trasparenza da me esaminati nel Cap.° 2.° non sono da riferirsi, nè al Principio delle Lamine colorate per sottigliezza, nè all' altro della Riflessione sulla anterior Superficie del Corpo, nè al primo della semplice Rifrazione. Formano essi adunque un Genere di Fenomeni a parte; il quale sta egregiamente per quarto nell' Ordine, e intanto si rimane distinto e separato dai tre precedenti, in quanto che i Colori del Prisma vengon fuori per Trasmissione e Rifrazione insieme, senza aver uopo di Riflessione; quelli prodotti dal Principio di Brougham nascono per Riflessione senz' aver uopo di Trasmissione o di Rifrazione; i Colori di Newton sono un effetto combinato di Riflessione e di Trasmissione senza aver uopo di Rifrazione; e il quarto Genere di Colori da noi stabilito ora si diranno prodotti per semplice Trasmissione, senz' aver uopo di Riflessione o di Rifrazione veruna.

Non è strano che i Corpi si colorino per semplice trasmissione. Noi veggiamo, che i Corpi neri hanno la facoltà di annientare e distruggere tutta la Luce che ricevono nel loro interno. Ma non è forse in Natura nessun Corpo totalmente opaco, ed i Corpi neri eziandio, finchè non sieno ingrossati a un certo segno, lasciano tuttavia passar oltre una porzione di Luce. Il Corpo nero adunque

non distrugge tutta in un tratto la Luce che viene a percoterlo, ma la consuma dirò così per gradi, mentre essa penetra gli strati successivi, in che si può concepire divisa li Corteccia esterior di quel Corpo. Or ciò che il Corpo nero effettua spiegando in breve tratto un' azion forte su tutta quanta la Luce, i Corpi colorati per trasparenza lo effettuano riguardo solo ad alcune parti di essa Luce: *soffocano questi ed estinguono certe determinate specie di Raggj più presto e più facilmente dell' altre*. Dico più presto e più facilmente; perchè al finire del conto, siccome tutti in Natura o per poco non tutti i Corpi assottigliati quanto occorra divengono trasparenti, così pur tutti o per poco non tutti ingrossati quanto occorra diventano opachi.

Codesto annientamento d' alcune sorte di Raggj nell' interno de' Corpi a preferenza dell' altre deve per necessità ammettersi anche nella più parte di quelli che si colorano alla maniera di Newton (*a*). Un grande rotondo matraccio di vetro pieno d' infusione assai carica di Legno nefritico non presenta più alla vista se non i Colori della sua Riflessione; dove son iti quelli di Trasmissione? Essi han penetrato il liquore, lo han penetrato per linea retta, ma non ne escono da veruna banda, perchè nel trapassarne la molta profondità sono andati mancando l' un dopo l' altro a poco a poco, fino a svanire e perdersi interamente. Lo stesso abbiam veduto intervenire all' Oro, e forse al Rame, ed a chi sa quanti altri.

Ho voluto osservare se siavi corrispondenza veruna fra i Raggj che si estinguono in un dato Corpo, e i cambiamenti che la Luce effettua sul medesimo Corpo. A questo fine ho versato in cinque eguali Bicchieri di cristallo cinque eguali porzioni di Color verde estratto dal Trifoglio coll' Alkool, e denso al grado C. Ho quindi riposto i cinque Bicchieri in altrettanti Vasi di Latta, nei quali la Luce non poteva percotere il Liquor colorato, se non entrando per una Finestra larga sì ma unica aperta in una faccia di ciascuno de' vasi medesimi ed eguale in ognun d' essi. Ho chiuso le cinque Finestre eguali, ponendo avanti:

(*a*) Optic. lib. 1. part. 2. ad Prop. 10.

alla p:ª — Una Cassetta parallelepipeda di Cristallo simile alle descritte nel Cap.° 2.°, e piena di Tintura d'Alkool col Trifoglio, in densità eguale a quella contenuta entro i bicchieri.

alla 2:ª — Una eguale Cassetta piena d'Infusione di Croco densa al grado C.

alla 3:ª — Una simil Cassetta piena d'acqua tinta con Cocciniglia ed Allume, al grado C.

alla 4:ª — Una semplice carta bianca da scrivere.

alla 5:ª — Un panno nero addoppiato in maniera di impedire alla Luce ogni ingresso entro del Vaso.

Questi Bicchieri, Vasi, e Cassette così combinate ho esposto nel mese d'Ottobre al Raggio del Sole; sono andato rinnovando i liquori contenuti nelle Cassette così spesso come occorreva per conservare ai medesimi la loro tinta primitiva che il Sole andava successivamente alterando. Dopo dieci ore interrotte di Sole, i due Bicchieri num. 1. e 5. conservavano tuttora il loro color primitivo: Un po' scolorato era il bicchiero del num. 2; più scolorato quello del num. 3; e perduta poi erasi interamente la tinta verde del num. 4. Eppure, per quanto può Occhio giudicare in mezzo alla diversità dei Colori, non maggiore quantità di Luce penetrava l'una che l'altra delle tre Cassette num. 1, 2, e 3.

Da tale Esperimento per prima immediata conseguenza inferisco, non tutte le specie di Raggj solari esser capaci di scolorare un dato Corpo; ma ciò esser opera di quelle sole specie, che restano assorbite e distrutte nel passare attraverso il medesimo Corpo. La Cassetta num. 1 non dava passo che a una parte di Rosso, al Dorè, al Giallo, ed al Verde; ma questi Raggj medesimi penetravano egualmente attraverso il Bicchiere posto dietro la Cassetta medesima, e perciò non la scoloraron mai. La Cassetta num. 3 dava passo all'Azzurro ed all'Indaco, i quali arrestati nel Bicchiere ad essa corrispondente lo scolorarono prima del num. 2.

Con eguale esito, avend'io tinti diversi panni lini colla stessa infusione di Trifoglio nell'Alkool, e rinchiusili poi entro i cinque Vasi di Latta colle stesse circostanze di sopra indicate; primo d'ogn'altro svanì il Colore del pan-

no lino chiuso nel Vaso num. 4, come sopra; poi quello del num. 3; poi il num. 2; ed assai più lungo tempo d'ogn' altro resistette il Colore nei Vasi num. 1, e 5.

Per eguale motivo nelle belle Esperienze di Senebier (*a*) la Luce filtrata attraverso il liquor tinto dal Tornasole agì con più celerità a colorare in Verde le Piante vegetanti, ed a svilupparne i Fiori, di quello che operasse la luce passata attraversso la Soluzione di Curcuma o di Carmino. Il Parenchima delle Foglie tosto che incomincia a colorarsi in verde diventa in ciò simile alla Tintura del Trifoglio nell' Alkool; assorbe per conseguenza e distrugge tutti i Raggj alti trasmessigli dal Tornasole; ma non può ritenere dentro se molta porzione dei Raggj trasmessigli dalla Curcuma o dal Carmino.

Anche Tessier vide colorarsi più in Verde le Foglie di Cicoria esposte alla Luce trasmessa attraverso d'un Vetro di color Indaco, che non le percosse da' Raggj passati per un Vetro Giallo (*b*).

Convalidata così da altre Prove quella Conseguenza prima del riferito Esperimento, possiamo convertirla in massima generale, e stabilire: Che *un dato Genere di Raggj non agisce ad indurre cangiamento se non in que' Corpi, dai quali non è trasmesso nè riflettuto*. Poniamo ora questa Massima insieme con l' altra già nota, che *il Calore non viene mai eccitato nei Corpi dalla Luce che passa oltre o riflettesi, ma da quella sola che si perde e nasconde entro i medesimi Corpi*; e troveremo esser queste due Leggi parallele ed onninamente corrispondenti fra loro. E quindi concluderemo di nuovo che i Corpi colorati per sola Trasparenza annientano e distruggono certe Specie di Raggj, appunto come i Corpi neri annientano e distruggono tutta intera la Luce.

Non fia meraviglia, che i varj Corpi agiscano diversamente sulle varie e diverse Specie di Raggj, ad infievolire ed estinguere le une in preferenza dell' altre; mentre nella Scoperta di Dollond li vediamo distraere e dividere l' Immagine prismatica in proporzioni diverse, e non sempre cor-

(*a*) Sur l'Influence de la Lumiere pour modifier les trois Regnes de la Nature tom. 2. pag. 55. & 105.

(*b*) Acad. des Sciences de Paris An. 1783. p. 154.

corrispondenti alla divisione del Monocordo osservata da Newton. Per le recenti Esperienze di Blair *(a)* il Muriato di Antimonio sublimato produce una distrazione di Colori presso che tripla del Vetro comune; il Verde cade ivi tutto sotto della Rifrazion media; dove al contrario nella Distrazione effettuata dall' Acido nitrico o dal muriatico il Verde cade tutto al di sopra della medesima Rifrazion media.

Ma come si fa Ella codesta estinzione di certe determinate Specie di Raggj nelle interne parti di un Corpo? Dire che essa si fa per le moltiplicate Riflessioni e Rifrazioni fra le molecole componenti quel Corpo è dir nulla. Imperocchè *riflettere* o *rifrangere* un Raggio significa semplicemente *piegarlo* dal retto cammino, ma non vuol già dire *distruggerlo*. E se a quella prima Forza di *torcere* un filo luminoso non ne uniamo l' altra nuova diversa e separabile dalla prima di *annientarlo*, quel filo di Luce, anche dopo aver corse entro del Corpo le migliaja di andirivieni, per certo dovrebbe da qualche banda giungere al confine estremo di esso Corpo, e da quella banda uscir finalmente a percoter la Vista; lo che non veggiamo arrivare a quelle Classi di Raggj, che si nascondono e si perdono assolutamente fra le interne parti del Corpo, sì nelle Sostanze colorate per semplice trasparenza, che in molte di quelle colorate alla maniera di Newton. Una grossa palla di Vetro Fuso con molto ossido di Cobalto appar nera; onde allora i Raggj alti si perdono entro la Sostanza di quel Vetro, che pur essi penetrano in linea retta: lo stesso Vetro ridotto in fina polvere impalpabile si cambia in Smaltino, e i Raggj alti adesso trovan via d' uscirne dopo le moltiplicate riflessioni per entro gli Interstizj di quella polve. Dunque sta la distruzione dei Raggj senza loro distorcimento, e sta il distorcimento dei medesimi senza la distruzione.

Dir che un Raggio di Luce non può penetrare attraverso d' un Corpo, se le menome parti di questo Corpo, o dell' Etere diffuso e rannicchiato entro il medesimo, non prendono esse pure una Vibrazione, la quale sia armonica a quella data Specie di Raggio; e che nell' eccitare una tal Vibrazione quel Raggio perde sua forza in proporzione del-

---

(a) Transact. of Edimburgh Vol. 2.

la inerzia e resistenza che incontra in dette parti a concepire o secondare le Oscillazioni necessarie all' oggetto di poter esso andar oltre : il dir ciò è un piegare verso il Sistema delle *Vibrazioni*, del quale Newton medesimo non si dimostrò, almeno per una parte, assolutamente nemico. Ma si andrebbe oltre i confini del verosimile, se si volesse promovere un tale Sistema fino a sostener che la Luce colorata dei Corpi opachi sia una Vibrazione propria e particolare di essi Corpi, e non già parte e continuazione di quella che è venuta dal Sole a percoterli. Certamente la Luce colorata di un Corpo opaco e scabro è la stessa identica con la Luce colorata del medesimo Corpo ridotto a stato di levigatezza e di trasparenza; ora quest' ultima è fuor d' ogni dubbio la Luce stessa del Sole penetrata nel Corpo, e secondo le consuete Leggi ivi entro o riflettuta o rifratta; tale dunque si è anche la prima. I Corpi fosforescenti di Beccari mostrano qual sia la Luce che i Corpi eccitati dal Sole son capaci di produrre e vibrare del proprio; essa è per lo più bianca, nè il suo Colore dipende dal genere de' Raggj Solari cadutivi sopra, nè dal Colore che il Corpo fosforescente dimostra in faccia alla Luce del giorno.

Dire, che fra la materia grave dei Corpi e le variocolorate particole della Luce passa un' attrazion tale, che queste introdotte in essi Corpi cessano a poco a poco del movimento loro progressivo e della facoltà di eccitare la Retina, ed entrano in nuove Combinazioni coi suddetti Corpi, l' una specie di particole più presto e più facilmente dell' altre secondo i rispettivi loro gradi di scambievole affinità col dato Corpo: Il dir ciò è un supporre il Sistema della *Emanazion* della Luce, è un secondare le Teorie più illustri della Chimica odierna.

E' riserbato forse all' industria del Secolo che sta per nascere, il determinare con certezza il vero motivo del distruggimento d' alcune Classi di Raggj per entro i Corpi colorati di sola trasparenza. Conviene esser contenti per ora, se abbiamo intanto assicurato farsi un tale distruggimento; se abbiamo separate bene e distinte quattro maniere di coloramento nei Corpi, affinchè la Scienza proceda con ordine, e gli Studiosi qui non ripetan più oltre la ragion de' Fenomeni da principj non suoi.

CAPITOLO IV.

Ulteriori Conseguenze degli Esperimenti addotti nel Capitolo secondo.

I

I Prismi, anche Inglesi, rade volte sono liberi affatto da interni filamenti, i quali ne conturbano sempre un tal poco l' effetto; e quando eziandio sien puri e limpidissimi, essi lasciano tuttavia confusi fra loro i Colori confinanti; nè il ripiego della Lente aggiunta al Prisma è bastante per togliere interamente la Confusione; che ve ne rimane sempre, in ciascun punto dell' Immagine colorata, tanta almeno, quant' è grande il Diametro del Foro, per cui s' introducono i Raggj. Non è però meraviglia, se le Esperienze col Prisma istituite da Newton molta ripugnanza e lunga contraddizione incontrarono nel Continente, dove per sopraggiunta mancavano i Prismi di Flint, i quali, com' è noto, distraggono i Colori in una metà più di ampiezza, che non que' di Cristallo comune. Ma se al Foro, per cui la Luce bianca del Sole entra in una Camera ben oscurata, si applichino una o più Sostanze diafane capaci di trasmettere un solo Color puro, allora ogni Confusion sarà tolta, e gli Esperimenti riesciranno meno brigosi, e più decisivi. I Fisici moltiplicando e migliorando le Prove da me incominciate, stabiliranno la Serie dei Corpi trasparenti colorati più facili a prepararsi, più durevoli a conservare, più sicuri ad ottenere lo scopo. Intanto ecco un primo tentativo di questo nuovo

Metodo per separar dalla Luce i Colori prismatici puri, senza Rifrazione.

1. ROSSO. Vetro carico di Manganese; ovvero Campeccio, o Cocciniglia bolliti nell' Acqua; oppur Vino rosso: Tutti al grado A.
2. DORE'. Inchiostro Simpatico di Cobalto al grado A: oppure Infusion di Verzino al grado B; con avanti ad essa, in una seconda Cassetta, Solfato di Rame al grado D.

3. GIALLO. Gomma Gotta od altro Color giallo dei Notati al num. 24. degli Esperimenti, al grado B; e davanti a quelli Solfato di Rame al grado C.
4. VERDE. Gomma Gotta, &c. come sopra al grado C; con avanti Rame disciolto nell' Ammoniaca al grado D, o Color d' Acqua marina al grado A.
5. AZZURRO. Vetro in Color di Smeraldo al grado C; con davanti Rame disciolto nell' Ammoniaca al grado C.
6. INDACO. Il Vetro suddetto al grado D; pure con Rame disciolto nell' Ammoniaca al grado B.
7. PAONAZZO. Vetro carico di Cobalto, oppur Rame disciolto nell' Ammoniaca; ambidue al grado A.

Perchè, come abbiam detto, nel Prisma i Colori, specialmente gli intermedj, rimangono sempre confusi un poco e compenetrati insieme; però Uomini insigni, anche dopo avere con buoni Prismi ripetute le Esperienze di Newton, ed anche a dì nostri, sostengono tuttavia tre soli essere i Colori primitivi, il Rosso cioè, il Giallo, e l' Azzurro: e vogliono che per es. il Verde in qualunque Caso non nasca mai se non dalla confusione dell' Azzurro col Giallo sul loro confine scambievole. Ma se si istituisce l' Esperimento col Verde ben separato nella maniera da me proposta pur ora, si vede esso conservar sempre una sola unica tinta non resolubile nelle sue conterminali. Lo stesso avviene per gli altri Colori, che si pretendono composti sempre e secondarj, ma che messi a cimento, dopo essere stati ben separati come sopra col soccorso dei Liquori a ciò opportuni, si trovano certamente semplici essi pure e primitivi non meno degli altri.

Osservando la Tavola del Capitolo 2.°; potrà il Curioso combinar la maniera di ottenere non un solo, ma due o più Generi di Raggj in un tempo separati dal rimanente. E non questo unicamente; ma inoltre potrassi, volendo, ottenere ben pura la sola porzione più bassa o la più alta di un dato Colore, o qualsiasi altro Grado intermedio a piacimento. Ciascuno dei quali Gradi avrebbe diritto di erigersi in Genere primitivo distinto e separato da' suoi vicini, se la Lingua e l' Uso non avessero già limitata la Classificazione principale a quei sette.

II.

Giudico d' essere stato io il primo a sostenere contro gli insegnamenti di Euler, che gli Umori dell' Occhio non formano una combinazione di Lenti acromatiche (*a*). Posso ora col mezzo dei Liquori colorati per trasparenza dare una prova anche più evidente e più sensibile del mio asserto. Dinanzi ad un piccolo Foro ed unico, per cui s' introduce il Lume nella Camera oscura, si applichi una delle già descritte Cassette parallelepipede di Cristallo, con entro Infusion di Campeccio o di Tornasole, od Oricello disciolto nell' Alkool, tutti al grado C. Si guardi poi dalla Camera oscura il Foro stesso, rendendo i proprj occhj or Presbiti, or Miopi, ed ora di Vista perfetta; e ciò o col mezzo di Lenti, o col discostarsi più o meno dal Foro, oppur finalmente col saper dare internamente all' Occhio i movimenti necessarj a tal fine. Se la Vista sarà corta o da Miope, si scorgeranno gli orli del Foro tinti di un' elegante color Paonazzo; se poi la Vista è da Presbita, gli orli stessi appariranno colorati di un Rosso vivace. Nella Fig. 5., se il punto A manda nella Lente non acromatica BC Raggj misti di Rosso e d' Indaco, que' di color Indaco raccolgonsi in D, i Rossi in E. Se dunque la Retina si trovi in D, la Vista è da Presbita, i Raggj alti raccolgonsi al centro, e rimangono contornati dai Rossi. Ma se la Retina pongasi in E, la Vista è da Miope, e qui i Raggj rossi rimangono contornati dagli alti. La Vista più distinta formasi in F; dove i Colori bassi si confondono interamente cogli alti, ed il Foro comparisce tutto d' un color uniforme. Se l' Occhio fosse una Combinazione acromatica di Lenti, non si potrebbe avere nel Caso una tanta varietà di apparenze, che pur vi si scorge discernibile e chiara al maggior segno.

III.

Esaminiamo negli Esperimenti del Capitolo 2.° le Serie diverse dei Raggj trasmessi dalle Sostanze trasparenti, nella varia o densità o corpulenza loro; e scorgeremo fa-

---

(*a*) Soc. Ital. Vol. 3. pag. 272.

cilmente il perchè la più parte di tali Sostanze, cambiando o densità o corpulenza, cambiano tutt' insiem di Colore. Le Tinte gialle del num. 24 della Tavola e più altre simili, nella maggior densità loro traspariscono in Rosso; diradandole passano al Giallo, e talvolta ancora sin presso al Verde, perchè nel Liquor diradato, col Rosso escono insieme il Dorè, Giallo, Verde, ed Azzurro. Le Infusioni di Campeccio, di Cocciniglia, di Tornasole, nella maggior carica di tinta presentano un Rosso puro; diradandole volgono al Paonazzo, perchè col Raggio rosso vengono ora a mescolarsi l' Azzurro, e l' Indaco. Per simil ragione l' Azzurro di Sassonia al grado A di condensamento vestesi in color di Viola, e diluito poi prende un aspetto azzurro; la Decozione di Guado allungata in molt' Acqua piegasi al Verde &c. Newton subodorò già il vero motivo di questi cambiamenti di Tinta. Ma essi non tengono assolutamente al Principio delle Lamine sottili colorate; sì perchè trattasi qui di Liquori colorati per semplice trasmissione; sì perchè tali cambiamenti si ottengono egualmente coll' aggiunger più o meno Cassette dello stesso Liquore una dopo l' altra di seguito per tragittarvi la Luce, nel qual caso certamente non si altera nè la forza rifrangente, nè la grossezza di alcuna delle molecole componenti il Liquore.

Noi abbiamo adesso una Regola per decidere, quali Tinte debbano per diradamento cambiar di Colore, e quali debbano conservarlo inalterato in qualsiasi mutazione di densità. Avvertii già sin da principio, che i Colori, i quali escono nelle maggiori profondità o nei maggiori condensamenti di Liquore, continuano ad uscire in tutti i successivi diradamenti od assottigliamenti. Se le nuove Specie di Raggj che spuntan fuori dopo in diradando il Liquore, e che mescolandosi coi primi che tragittavano anche una maggior densità formano con questi il Color totale e composto del Liquor diradato, se tali nuovi e posteriori Generi di Raggj si distendono sul Cerchio dell' Immagine Prismatica (*a*) con regolata distribuzione, egualmente dall'

(*a*) Suppongo divisa la Circonferenza d' un Cerchio secondo la distribuzion comune de' Colori nel Prisma, in guisa che il Violetto venga contiguo e continuato col Rosso; come Newton lib. 1. part. 2. prop. 6.

una, e dall' altra banda di quello che uscì primo degli altri; in questo caso il Color totale composto del Corpo non cambierà d' aspetto: tale, anche nei successivi diradamenti, conservasi press' a poco il Colore del Verde di Vessica, e quello del Vetro fuso in color di Smeraldo. Ma il Colore del Corpo, inspessandolo o diradandolo, ingrossandolo od assottigliandolo, cambierà certamente, se i Generi successivi de' Raggj di cui sopra, nascano tutti da una banda sola del primo uscito, o se rimangono sparsi con diseguale ripartizione intorno a quel primo; così abbiam veduto succedere al Campeccio, al Legno giallo, all' Azzurro di Sassonia.

Non è vero che, come asseriscono alcuni, il Raggio rosso sia quello che penetri sempre a maggiore profondità i Corpi semiopachi, e che sia l' ultimo in essi ad estinguersi. Abbiam veduto che il medesimo è il più lento e il più debole d' ogn' altro ad oltrepassare le preparazioni di Rame, la Tintura dell' Indaco, ed il Prussiato di ferro. In generale non pare che riguardo a ciò verun Colore abbia particolar privilegio sugli altri. L' ultimo ad estinguersi è talvolta il Paonazzo (num. 4, 9 della Tavola); talvolta il Verde-Azzurro (num. 3, 6); ora il Verde-Giallo (num. 5); ora il Giallo puro (num. 25); ed ora il Dorè (num. 10). Dipende ciò dalla reciproca od affinità od armonia che passa fra le diverse Specie di Raggj e le particole del Corpo che debbesi tragittare.

I V.

L' Alterazion di colore, che pur ora abbiam veduto in più Corpi trasparenti colorati succedere per la cambiata Densità o Profondità loro, che è quanto dire per lo cambiato Numero delle particole coloranti sovrapposte l' una all' altra, ci rende facile ed immediata ragione del cambiamento di Colore a cui, nelle diverse elaborazioni della Natura o dell'Arte molte Sostanze soggiacere si veggono; senza che nè a ciò contribuisca il Principio delle Lamine Sottili di Newton, nè che sia in tali Sostanze cambiata la Affinità loro rispettiva colle varie Specie dei Raggj.

Prendete un pezzo di Ragia trasparente di color Rancio oscuro, ammollitela col calore un poco; impastatela

allora colle mani sinchè irrigidisca di nuovo, e la vedrete divenire opaca, ed insieme il suo Color bruno trasformarsi in un aperto gialliccio. Il macinar delle mani non à fatto che produrre molti e minuti screpolamenti nell' interno di quella Ragia; la Luce non vien più all' Occhio dopo averne passato molta profondità, ma appena entratavi nelle prime superficiali particole torna subito indietro ripercossa dalle prodotte interne divisioni e screpolamenti; e da quella Ragia perciò non più i soli Rossi e Dorè, ma altri ed altri più alti vengono con essi all' Occhio, e ne ingialliscono e ne rischiaran la tinta. Accade qui come se quella Ragia fosse ridotta in gran sottigliezza; e come nella Gomma Gotta e nel Croco diradati al grado E. Per simil Cagione la Terra Oriana (il Succo della *Bixa Orellana* Linn.) in pani è d' un color Rosso scuro; disciolta e diluita nell' Acqua con potassa, o nell' Alkool, prende una tinta gialla od arancia; e queste Soluzioni ingrossate poi di mole, o sovracariche di colore traspariscono esse pure di nuovo in rossiccio. Così parimenti la Miniera di Piombo rossa e il Risigallo limati o stritolati somministrano una raschiatura non più rossa ma gialla; e al giallo volgon pure il Minio ed il Cinabro macinati lungo tempo sul Porfido. Non già perchè la semplice Stritolatura arrivi a cambiare la Chimica costituzione di tali Corpi, o l' Azione dei primi loro elementi sul Lume; ma perchè attraverso i fragmenti della massa loro anche solo grossamente divisa passano ora nuove Specie di Raggj, che dentro ad un maggior volume di detti Corpi si rimanevano prima affogate e distrutte. I grossi e solidi cristalli di Solfato e d' Acetito di Rame appariscono di colore Azzurro; polverizzati o raschiati danno un tritamento verde simile nella tinta al Verderame: Nè sembra che questi Sali abbiano per sì fatto sminuzzamento presa maggior quantità d' Ossigeno, poichè la loro polve cristallizzata di nuovo e concentrata in masse solide aggregate riprende il colore di prima.

Fors' anche l' Ossigeno stesso, allora quando si combina in maggior dose entro di un Corpo, non fa talvolta che separarne vieppiù gli elementi, e con ciò diradarne la massa; lo che in ogni modo ci ricondurrebbe alla stessa spiegazion precedente: Onde anche senza supporre cambia-

ta

ta dall' Ossigeno l' Affinità d' un Corpo colle diverse fila componenti la Luce, potremmo, in forza delle premesse Esperienze e per sola meccanica divisione di parti e diradamento di Sostanza, comprendere come l' Ossigeno stesso trasformar possa l' Azzurro di Montagna nel Verde pur di Montagna ed in Malachite, ed il Color rosso cupo del Sangue Venoso nel florido Arterioso. In simil guisa la terra Selciosa frapposta in più o men dose ai Colori metallici cambiar può il Rosso del Minio nel Vetro giallo di Piombo, l' Azzurro del Rame nel falso Smeraldo &c.

Sia quì permesso ripetere anche per tutti questi Casi la Regola enunziata nel Numero precedente. Que' Corpi i quali appartengono al quarto Genere di Coloramento descritto nel Capitolo terzo, di frequente soggiacciono a cambiamento di tinta, col solo sminuzzare od ingrossare meccanico delle loro Parti, senza che cambiata sia perciò in essi Corpi la Chimica natura, nè cambiati in loro gli accessi di facile o difficile trasmission della Luce. Soggiacciono i suddetti Corpi a cambiamento di tinta anche per ciò solo, perchè i nuovi Raggj che perivano nella molta profondità di Sostanza unita e continua e che escono ripercossi dalle internamente interrotte e con ciò diradate parti della Sostanza stessa divisa e sminuzzata, perciò solo perchè tali Raggj di nuova sortita non si trovano distribuiti nell' Ordine della Scala prismatica con pari equilibrio di quà e di là di quel primo colore, che vinse la maggior profondità di Sostanza, e col quale quei posteriori vengono per li successivi diradamenti a contemperarsi e confondersi. Certamente la Decozion di Verzino diradata al grado C non può più comparir rossa, ma debbe ad occhio tingersi in rancio; il Rame disciolto nell' Ammoniaca al grado C non apparisce più Paonazzo, ma Indaco; &c.

Gioverà pure nel presente Argomento aver sempre dinanzi al pensiero il Dimostrato da Delaval: (*a*) Che i Corpi, dei quali or favelliamo, o sieno essi fluidi o sien solidi, anche quando appariscono colorati per *Riflessione*, lo sono tuttavia per semplice *Trasmissione*; in quanto che la Luce

(*a*) Veggasi anche Mariotte *des Couleurs*. Part. 2. Disc. 3. Régle 1.

colorasi nell' atto di penetrarli, entrando in essi e poi tornandone fuori, dopo essere stata ripercossa da qualche interna o Superficie od Interruzione o eterogenea Sostanza sparsa e mescolata per entro i medesimi Corpi. Le quali Cagioni riflettenti la Luce dall' interno dei Corpi quanto sono più moltiplicate e più frequenti, tanto è minore la profondità del tragitto, in cui la Luce colorasi per trasmissione. Onde quando in tale meccanica subdivisione intima d' un Corpo e nel conseguente diradamento delle sue parti coloranti abbia luogo la Regola precedentemente enunziata dei varj Generi di Raggj che escano un dopo l' altro con perturbata distribuzione, allora debbe quel Corpo di necessità trasmigrare in un Colore essenzialmente diverso dal primo. Così, per aggiungere ulteriori Esperimenti ai già riferiti, l' Urina concentrata coll' evaporazione, di gialla che era, divien rancia e poi rossa. Gli Artisti, se vogliono con poca spesa dare ai Legni ed ai Cuoj il Color giallo brillante dell' Oro, costumano di inargentar prima tali Corpi, e poi gli inverniciano con un sottil velo di Catrame disciolto nell' Acqua (ossia Olio) di Ragia; ma questa Soluzione medesima guardata attraverso alla profondità del Vaso di vetro che la contiene si vede trasparire in un Rosso puro. I Balsami ispessati al fuoco diventan gialli e poi rancj e poi rossi. Tanti sono i Casi, nei quali i tre Colori suddetti trasmigran l' uno nell' altro per solo ingrossamento o assottigliamento, condensamento o diradamento di sostanza, che Westring (*a*), dopo avere estratto dai Licheni un numero sì copioso di tinte, fu indotto a concludere „ che il Color bruno ed il Rosso bene spes„ so forse altro non erano, se non una semplice varietà „ del Color giallo. „

Monge à saggiamente avvertito (*b*), che quando si divide o si stritola un Corpo, ciascuno dei grani della stritolatura manda all' Occhio dalla prima sua Superficie un riflesso di Luce bianca, la quale mescolandosi colla tinta propria ed interna del Corpo le dà un aspetto tanto più dilavato e bianchiccio, quanto è più finamente macinato

---

(*a*) Memorie dell' Accademia di Stockolm An. 1791. 2.° Trimestre.

(*b*) Annales de Chymie Tom. 3. p. 138.

quel Corpo. L' Avvertimento batte sul vero: ma una Cagion tale per se sola non basta a cambiare la Specie del colore di Rosso in Giallo, di Paonazzo in Azzurro, di Indaco in Verde &c.; il che pure abbiamo poc' anzi veduto accadere per semplice tritamento od assottigliamento di parti. Convien dunque unirvi l'altra da me addotta Cagione, ed ambedue insieme somministreranno piena e completa la ragiòne di tali Fenomeni. Ambedue queste Cagioni insieme fan sì che lo Zolfo, il Vetro verde, il Vitriolo, &c. ridotti in sottilissima polve finiscono a comparir quasi affatto bianchi. Ambedue le suddette Cagioni insieme fan sì, che la raschiatura del Corno Bruno, e quella dello Schisto Scrittorio, e quella della Steatite appajon bianchiccie: mentre al Lume ripercosso dalla Superficie anteriore di tali minime raschiature si unisce una ulterior quantità di Raggj ripercossi ora eziandio dalla posteriore; alla quale atteso l' assottigliamento delle raschiature stesse può il Lume adesso arrivar senza estinguersi. Il bianco stesso della Neve non nasce dalla Luce riflettuta nella sola prima faccia delle gelate puntine di ghiaccio, ma ben anche nell' ultima posteriore, dove si sa che la Riflessione suole bene spesso riuscire più forte, che in quella prima: se ciò non fosse, la Neve non comparirebbe mai più bianca del Ghiaccio compatto che veggasi a Cielo aperto. Il Legno d' Abete sottile a segno che comincj appena a divenir trasparente tinge in rosso la Luce guardatavi a traverso per trasmissione; assottigliatelo più, trasparisce in giallo; sminuzzatelo in segatura, e questa è già quasi bianca.

Nelle Esperienze di Wilson sui Fosfori, una sottilissima Veste metallica è dessa che trasmettendo colora la languida Luce vibrata nell' oscurità dall' interno della Calce fosforescente dell' Ostriche. Ma quella sottilissima Veste non basta a colorare il Lume copioso del giorno ripercosso dalla Calce medesima; però questa veduta in aperta Luce comparisce bianca; perchè, come già avvertii nel 2.° Capitolo, quando la Luce è forte passano allora attraverso una data grossezza del Corpo colorato quelle specie di Raggj, che non valgono a penetrarlo in quantità sensibile quando e' sono più rari.

Che se negli Interstizj dei Corpi solidi o polveriz-

zati introducasi un nuovo Fluido, il quale per se non abbia colore, ma abbia Forza rifrangente meno lontana dalla Forza rifrangente delle particole proprie del Corpo, di quel che avesse il Fluido che v' era prima; in tal Caso la tinta del Corpo diviene più profonda o più forte: come quando s' inzuppano d' Acqua o d' Olio i Drappi colorati, o i Legni, o le Terre, o le polveri de' Dipintori; i quali per analoga industria sogliono inumidire con vernice o con olio quelle parti d' un vecchio Quadro, delle quali bramano cavar fuori e rendere più discernibili i colori. Facile di questi Fenomeni è la spiegazione, appoggiandola sui premessi Esperimenti. Il fluido novellamente introdotto fra le parti del Corpo, per i principj noti altronde, apre l' adito ai Raggj di penetrarle più addentro; e questi perciò ritornano indietro filtrati per una maggior profondità di Sostanza colorante. Succede qui, come quando negli Esperimenti del Capitolo 2.° i Raggj si fan tragittare più Cassette del medesimo Fluido colorato, addossate l' una dopo l' altra di seguito.

Concludiamo quì per ultimo, esser falso che, quando si diradano o si assottigliano le particole componenti un Corpo, la sua tinta debba *sempre* discendere a Colori successivamente più bassi nella Scala prismatica, fino a ricominciare poscia di nuovo dal Paonazzo. Questa Proposizione sussiste per i Corpi colorati alla maniera di Newton: ma si è tentato in vano da egregj Sperimentatori di renderla generale; imperciocchè essa non tiene per i Corpi soggetti al 4.° Genere di coloramento, e dei quali abbiam ragionato sin ora. Dai riferiti esempj si vede, che in questa Specie di Corpi l' assottigliamento delle loro parti talvolta li trasforma in un colore più basso nell' ordine prismatico, tal volta li porta ad un colore più alto, e tal altra volta li lascia con la medesima tinta di prima.

V.

I Tintori e i Dipintori mescolando insieme più Sostanze coloranti ne ricavano una terza Tinta, per lo più intermedia di quella degli Ingredienti che han mescolato. In queste *Composizioni Tintorie* distinguo due Casi: o gli Ingredienti come sopra uniti insieme si combinano per Chi-

mica trasformazione a creare un terzo Composto, che prende natura diversa da' suoi componenti e diversa maniera d' affinità colle varie parti del Lume; o gli Ingredienti medesimi nel mescolarsi e confondersi insieme conservano ciascun d' essi intatta la loro propria natura, e le loro diverse facoltà per riguardo al dividere ne' suoi Colori la Luce. Il primo Caso si appartiene tutto alla Chimica, ned è ora il mio scopo. Parlo quì unicamente del secondo Caso, che dirò di *Mescolanza meccanica*; e dico, che quand' esso à luogo, ciascuno dei due Ingredienti uniti escludono quei Generi di Colori che essi escludevano separati; in guisa che consultata la Tavola del Cap.° 2.°, si può anzi tratto indovinare qual nuovo Colore debba nascere dalla tale o tal altra Composizione di due o più Ingredienti. Tre Esperimenti renderanno chiaro il mio Assunto. — 1.° Pongasi una Cassetta parallelepipeda piena di Gomma Gotta nell' Alkool al Grado D davanti ad una simile Cassetta con entro Azzurro di Sassonia pure al Grado D (n. 24, 13 della Tavola); e si vedrà, che passando la Luce bianca attraverso le due Cassette una dietro l'altra, non possono sortirne da ambedue insieme che il Raggio Rosso, il Verde, e l' Azzurro; i quali uniti insieme debbono imprimer nell' Occhio un color Paonazzo. Or bene; mescolo ora i due Liquori suddetti in una Cassetta sola, ma eguale in profondità alle due precedenti insieme, e passando la Luce attraverso di tale Composizione ne ottengo di nuovo i suddetti tre Generi di Raggj; e ad occhio il Liquore così mescolato mi comparisce di quel medesimo color Paonazzo, che ottenevasi dalle due Cassette ravvicinate ma non peranche mescolate insieme. — 2.° La Soluzione di Croco al Grado D, e l' Acetito di Rame al grado C, combinati insieme sia in due Cassette separate sia in una sola come sopra, non danno più transito che al Giallo ed al Verde; da tale Composizione risulta per conseguenza ad Occhio un Color Verde-Giallo. — 3.° La Cocciniglia in Acqua, e l' Azzurro di Sassonia ambidue al grado D, (n. 15, 13) apposti o misti insieme nella medesima profondità, son penetrati da una parte di Rosso, dall' Azzurro, dall' Indaco, e dal Paonazzo; e per conseguenza rendono ad Occhio un bel Color Paonazzo. — Queste tre maniere di Composizio-

ne messe in opera da un Tintore imprimono in un Drappo quegli stessi Colori intermedj, che m' hanno reso nei tre Esempj Sovracitati; sicchè dobbiam credere che il medesimo sia nell' un Caso e nell' altro il Processo della Natura e dell' Arte.

Se si compone a Miniatura punteggiata una Tavola, con frequenti e minutissimi tratti azzuri e gialli distribuiti ed alternati fra loro equabilmente per tutta la Tavola, questa comparirà il più delle volte d' un Color Verde composto nell' Occhio dalla mescolanza di tutti insieme i Raggj, che davano prima separatamente il Giallo, e l' Azzurro. Quest' Esempio si è creduto da Alcuni bastante a spiegare tutte le *Composizioni Tintorie* fatte per mescolanza meccanica di Colori: Si suppose, che quando per es. un Panno si colora prima coll' Indaco, e poi colla tinta gialla del Guado quel medesimo Panno si tira al Verde, si suppose che ciascun Pelo di questo Panno contenesse distribuiti sopra se a miniatura tratteggiata, o vogliam dire a *Mosaico* i due Colori Giallo ed Indaco; e che quindi poi dalla mescolanza di tutti insieme i loro Raggj nell' Occhio si componesse la sensazione del Verde. Ed è questo nol nego alcune volte, e specialmente in Pittura, il Segreto dell' Arte. Ma i tre addotti Esperimenti dimostrano, che bene spesso l' affare combinasi tutt' altrimenti. I Raggj mandati all' Occhio nelle da me addotte mescolanze, che dirò di *Sovrapposizione*, non sono l' Aggregato e la Somma di tutti i Raggj che si ottenevano prima dalle due tinte separate; Essi sono piuttosto l' Avanzo ed il Resto di quelli che si estinguono nell' uno e nell' altro dei due Liquori composti. Talchè nei suddetti tre Casi, e in molti altri simili a loro, la Composizione manda all' Occhio assai meno Specie di Raggj, che non vi mandano i suoi Componenti; e può talvolta mandarne una sola Specie; e può in ultimo non mandarne nissuna, se tutti quei Raggj, che penetrano uno dei due Liquori componenti, son poscia tutti affogati e distrutti dall' altro.

Ossia che le due Tinte componenti si distendano ambedue a formare due Foderi, o vogliam dire due Corteccie continuate sui fili ond' è tessuto il Drappo, una sovrapposta all' altra, come nelle due Cassette applicate insieme al

Foro della Camera oscura; ossia che le stesse due Tinte sciogliendosi e confondendosi l' una nell' altra si compenetrino a formare un Fodero solo: Nell' un Caso e nell' altro potranno tuttavia la Luce e l' Ossigeno e gli altri Agenti Chimici penetrare la troppo sottil veste del Fodero ed alterare col tempo e distruggere la più fuggitiva delle due Tinte, lasciando intatta l' altra più resistente e più solida; quand' anche il Color fuggitivo si trovasse coperto o mescolato dal solido. Non vediamo noi quanto facilmente l' Ossigeno penetri a più o meno profondità i Liquori contenuti in un Vaso; e come prontamente và, attraverso le Membrane d' una Vessica ed i Vasi polmonali, a mescolarsi col Sangue da esse Membrane e Vasi ricoperto e rinchiuso?

Ho detto sopra, che le Tinte composte per sovrapposizione possono alcuna volta escludere tutti affatto i Colori; nella qual circostanza esse debbono comparir nere. Non un Caso solo di questo Genere, come già Hook presso Newton, ma molti e molti possiamo adesso combinare dipendentemente dalla Tavola del Capitolo 2.°. Ben è vero, che nell' Arte pratica del tingere, la Veste distesa sopra i fili del tessuto dalle due Tinte composte insieme non suol crescere tanto in densità, che l' una Tinta giunger possa mai sempre a soffocar pienamente i Raggj trasmessi dall' altra: quindi l' intermedio Colore che ne risulta sovente riesce bruno, ma rade volte perviene ad acquistare la profonda oscurità del nero. Ma quando esso vi arriva, allora certamente la Teoria sovraesposta può avervi non poca parte. Il Solfato di Ferro coll' Acido od Astringente gallico diluito in molt' Acqua trasparisce Rosso-violato, perchè assorbe e distrugge i Raggj Dorè, Gialli, Verdi, ed una parte dei Rossi. Il Solfato medesimo colla Decozion di Campeccio assai diluita apparisce di Color Indaco, perchè distrugge i Raggj Dorè, Gialli, Verdi, e Paonazzi. Ponete queste due Soluzioni in due Cassette, una dopo l' altra, oppur mescolatele insieme in una sola Cassetta: nell' un Caso e nell' altro esse imbruniscono viemaggiormente, e non trasmettono più se non un languidissimo Colore Indaco-Azzurro. Questa è la Ragione per cui secondo le Esperienze di Lewis, l' Inchiostro comune ed il Nero dei Tin-

tori acquistano maggiore oscurità, qualora nel comporli si uniscano tutt' insieme col Solfato di ferro il Campeccio e la Galla. Innanzi di recare i Panni alla tinta del Nero, si sogliono passar prima nell' Indaco; perchè quest' ultimo smorza già per se tanta parte di Luce, che poca poi ne rimane da distrugger col Nero. Ma un bagno rosso di Robbia sovraggiunto al Drappo colorato pur solo dall' Indaco lo imbruna ed oscura poco meno della volgare Composizion nera; perchè la Robbia non dà transito ai Colori alti dell' Indaco, e l' Indaco toglie vigore ai bassi Color della Robbia.

Il cambiamento di Colore, che secondo le Leggi sovraenunziate sorge di mezzo alle Tinte addossate l' una sull' altra, è una Circostanza di più, che rende scabrosa sommamente ed incerta la Pittura a smalto; nella quale i Colori sovrapposti l' uno all' altro in più vetrificazioni successive, ommesse anche le altre molte Cagioni che troppo di frequente ne conturbano la riuscita, debbono inoltre per necessità alterare diversamente la loro Tinta originale, secondo che è diverso il Colore del Fondo sul quale vanno ad appoggiarsi, e secondo la diversa lor trasparenza.

Newton disse, che certi Colori misti insieme compongono il Bianco; Castel (*a*) disse che gli stessi Colori misti insieme compongono il Nero. Non vi è quì se non una apparente Contraddizion di parole; imperciocchè il primo suppose che una mescolanza di polveri colorate fosse fatta *a Mosaico*; il secondo volgeva in mente una mescolanza formata *per Sovrapposizione* di tinte. Per tal modo ambedue disser vero; ma l' ultimo si riferiva ad una Circostanza diversa da quella del primo.

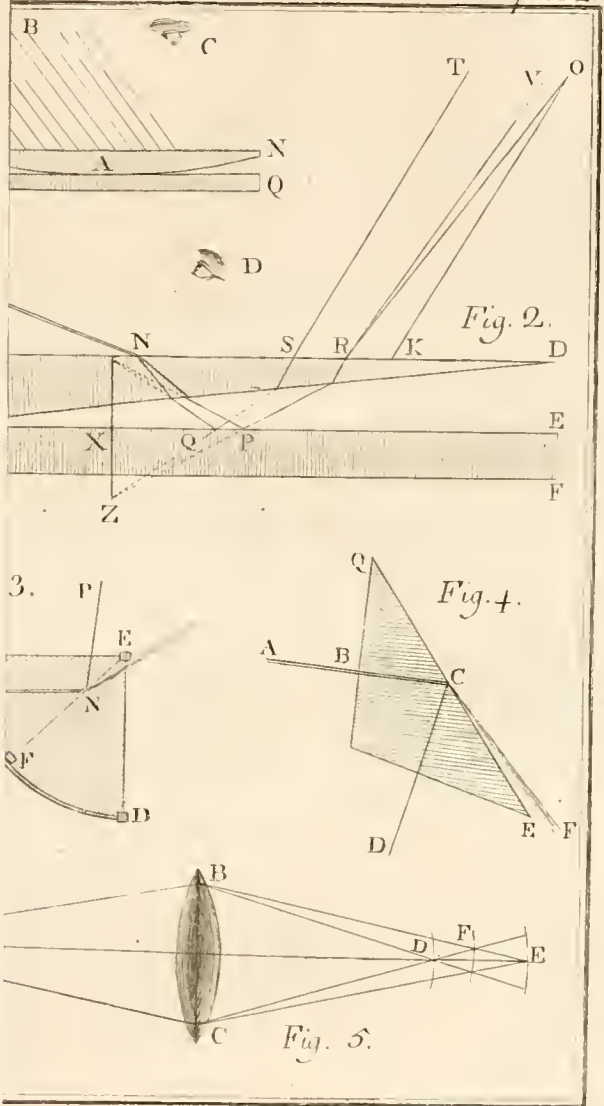
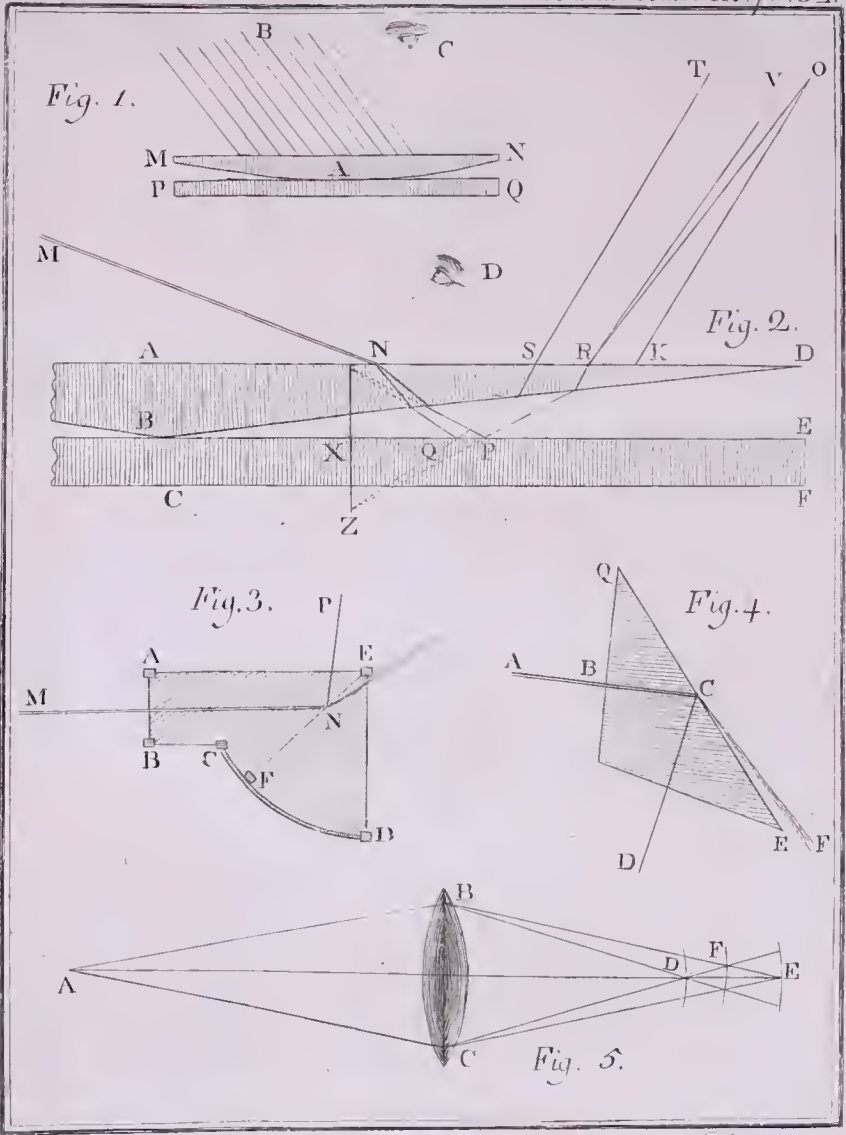
Molti Fisici illustri e più recenti di Castel, seguendo le tracce del Cel. Mayer (*b*) hanno tentato di creare la Serie intera e minutamente graduata di tutti i Colori, col mescolare insieme in varia proporzione tre sole Tinte, Rossa, Gialla, ed Azzurra; e si sono lusingati che il Colore di ciascun Grado intermedio a quei tre riuscir debba proporzionato alla rispettiva dose degli Ingredienti combina-

na-

(*a*) V. anche Schiffermuller Versuch eines Farbensistem. 4. 1772.
(*b*) Opera inedita Vol 1. pag. 31.

B
C
A
N
Q
D
T
V
O
Fig. 2.
N
S
R
K
D
E
X
Q
P
F
Z
3.
P
E
N
F
D
Q
Fig. 4.
A
B
C
D
E
F
B
D
F
E
C
Fig. 5.

G. Gajani sc.

Tav. XVIII.
Soc. Ital. Tom. VIII. p. 752.
Fig. 1.
B
C
M
N
A
P
Q
Fig. 2.
M
D
T
V
O
A
N
S
R
K
D
B
E
X
Q
P
C
F
Z
Fig. 3.
P
A
E
M
N
B
C
F
D
Fig. 4.
Q
A
B
C
D
E
F
A
B
D
F
E
C
Fig. 5.
G. Gujani sc.

nate: in guisa che per es. tre dramme di Azzurro ed una di Giallo producano un Verde-Azzurro; tre dramme di Giallo ed una d' Azzurro compongano un Verde-Giallo; &c. Finchè essi mischiano *a mosaico* le loro Tinte, giungeranno forse a riescir nell' intento, e il Color intermedio sarà in tal Caso veramente secondario e composto. Ma se vorranno stemperare insieme e sovrapporre le Tinte, potrà nascerne alcuna volta un Colore lontano e diverso affatto da quello che importerebbe la loro Teoria, anche nel supposto che le Tinte mischiandosi non producano verun Chimico cambiamento l' una sull' altra: così l' Azzurro di Sassonia posto avanti al Fiele di Bue con le dovute proporzioni di densità rispettiva non trapariscono già in Verde, ma in Rosso. Tal altra volta il Color terzo che nasce dalla mescolanza di sovrapposizione spetterà veramente a quel Grado medio che corrisponde colla proporzion delle Dosi; ma questo Color medio lungi dall' esser composto di più specie di Raggj, sarà anzi un Colore prismatico puro, od almeno sarà più semplice di quelli delle Tinte che si son mescolate a formarlo: così dall' Infusione di Gomma Gotta congiunta al Color d' acqua marina abbiamo ottenuto un Verde puro, mentre composto era il Colore di ciascuno dei due Liquori che l' han procreato unendosi insieme. Ma finalmente non veggo perchè non si potrebbe con egual diritto e facilità comporre e ricavare la serie intera de' Colori dai tre soli, Paonazzo Verde e Dorè, se la Natura somministrato avesse per questi tre Colori una copia sì doviziosa di Tinte solide e resistenti, quanta ne fornisce riguardo agli altri tre, Azzurro Giallo e Rosso. Per certo riesce facile egualmente di comporre un Colore Azzurro col Paonazzo del Rame disciolto nell' Ammoniaca e il Verde di Vessica che abbiam già sopra congiunti insieme a questo fine, come lo è di comporre un Color Verde col Giallo del Croco e l' Azzurro dell' Indaco uniti insieme. I diversi Colori prismatici non hanno in se veruna prerogativa singolare, per cui gli uni debbano credersi primitivi a preferenza degli altri: combinandoli nelle dovute proporzioni, tutti possono comporne altri, e possono venir composti da loro; e come ho detto altra volta, la Luce del Sole considerata in se stessa, non tre unicamente non sette, ma

contiene assai più Specie di Raggj, tutti egualmente puri e distinti l' uno dall' altro per un dato grado di Flessibilità e di Tinta loro propria. Newton medesimo confessa che in Natura sembrano darsi innumerabili gradi di Colore, come innumerabili sono i Generi de' Raggj diversi fra loro di Rifrangibilità che escon dal Sole (*a*); ma in mezzo a tanta copia di Colori primitivi Egli ha prescelto di nominarne sette di quelli, che a lui parvero bastantemente lontani fra loro di Tinta. Per tutto ciò l' Opinione, che vuole primitivi i tre soli Rosso Giallo ed Azzurro a preferenza degli altri, e che piacque ducent' anni fa anche ad Aquilonio, non sembra contenere di Vero se non questo; che l' Arte finora à scoperto fra i Corpi terrestri un maggior numero di Sostanze tintorie capaci di rendere quei tre Colori più stabilmente e più frequentemente degli altri.

(*a*) Lib. I. part. 1. Exper. 5.; e part. 2. Exp. 4.

OSSERVAZIONE DEL PASSAGGIO DI MERCURIO PER IL DISCO DEL SOLE

Dei 6—7 Maggio 1799.

DI VINCENZO CHIMINELLO.

Presentata li 15. Ottobre 1799.

NEll' Ingresso; Contatto interiore dei due Lembi 22^h 1' 5",3 t. v. Questa osservazione fu fatta con Acromatico Dollondiano di 4 $\frac{1}{2}$ piedi Inglesi, ed è precisa.

Al Quadr. Murale; Appulso del Lembo del Sole al primo filo del Tubo 23^h 57' 36",6 t.v.
del Lembo di Mercurio 59 18,6
Distanza del Lembo super. del Sole dal Zenit 28° 14' 42"
di Mercurio 28 32 27

Le nubi impedirono di fare altre osservazioni. Sulle osservazioni fatte si dà questo calcolo:

Longitudine del Sole nell' istante dell' appulso di Mercurio al Murale secondo le noviss. Tavole di De la Lande, aggiunta l' aberrazione di 20", era .. 1' 16° 49' 44",7,
l' obbliquità apparente dell' Eclittica ... 23 27 58,5
onde l' Ascensione Retta del Sole .... 44 21 26,0.

Quindi supposto il mezzo tempo del passaggio del Sole per il meridiano 1 6,3,
e il semidiametro di Mercurio 6,2,
proviene l'Ascensione Retta di Mercurio 44 30 29,2,
e la longitudine nell' Ecclittica corrispondente a questa Ascensione Retta . 1' 16 58 46,2,
la Declinazione a tal longitudine 16 55 33,3,
l' angolo dell' Eclittica col cerchio di tal declinazione 73 30 7,0

Supponendo il semidiametro poi del Sole 15' 51",83, la sua parallassi orizzontale 8",5, onde la differenza delle parallassi orizzontali del Sole, e di Mercurio 6",9, e nel meridiano 3",28, proviene la differenza di declinazione tra i

Centri di Mercurio e del Sole 1′ 56″,1; e poichè la declinazione del Sole secondo il calcolo era in quell' istante 16° 52′ 59″,1, la declinazione di Mercurio si fu 16° 51′ 3″,0; onde sottratta la declinazione di Mercurio dalla superiore 16° 55′ 33″,3, dalla differenza di queste trovo per esatto calcolo la longitudine geocentrica apparente di Mercurio per l' istante del suo appulso al Murale 1′ 16° 57′ 29″,42, e la sua latitudine geoc. apparente 4′ 19″,17.

Mercurio dunque nell' appulso al Murale distava dalla congiunzione apparente un arco di Eclittica 7′ 44″, 7, ed essendo allora il moto orario geocentrico di Mercurio secondo le Tavole 1′ 33″, 9, quello del Sole 2′ 24″, 9, onde il moto composto 3′ 58″, 8, si conclude, che l' istante della congiunzione fu a 1^h 56′ 4″,1 t. v. della sera. Il moto orario geocentrico poi in latitudine dedotto da più latitudini per le Tavole intorno quell' istante essendo 44″, 28, fatta la debita proporzione, risulta la latitudine geocentrica apparente in congiunzione 5′ 45″, 27.

Quindi per il moto composto, e per il moto in latitudine risulta l' inclinazione dell' orbita relativa 10° 29′ 10″, 8, il moto orario nell' orbita relativa 4′ 2″, 86, la più breve distanza tra i centri 5′ 39″, 7, e la distanza di tempo tra l' istante della congiunzione e l' istante del contatto interiore nell' ingresso 3^h 53′ 34″,7, levato il qual intervallo dall' ora della congiunzione risulta l' istante del detto contatto a 10^h 2′ 29″, 4 della mattina. Essendo poi l' angolo del verticale coll' orbita relativa 28° 58′ 48″ a quell' altezza di Mercurio, l' effetto della parallasse ritardante nell' orbita relativa doveva essere 30″, 1 di tempo, e così risultarebbe l' istante del contatto interiore a 10^h 2′ 59″,5 mattina.

Ma l' istante del contatto realmente osservato fu a 10^h 1′ 5″, 3 mat., dunque la superior differenza di longitudini 7′ 44″, 7 protrae di troppo il tempo della congiunzione, ed è credibile, che ciò provenga da qualche minuzia di secondo di tempo nell' appulso del Sole, o di Mercurio al Murale, o in tutti e due, compresa nella enumerazione al Pendulo più del giusto, piuttostochè da difetto di calcolo. In fatti mezzo secondo di tempo dà 7″,5 nell' Asc. Retta

di Mercurio, 7'',8 nella sua longitudine, e 1' 57'',9 di tempo nella distanza della congiunzione; la qual porzione di tempo se si levi da 1ʰ 56' 4'',1, il calcolo corrisponde bene.

Sembra dunque, che si possa stabilire, senza sensibile errore la longitudine geoc. appar. di Mercurio nell' appulso al Murale 1ˢ 16° 57' 21'',6, l' istante della congiunzione apparente nell' Eclittica 1ʰ 54' 6'',2, la longitudine sua geocentrica apparente in congiunzione 1ˢ 16° 54' 21'',9, e l' apparente latitudine geocentrica 5' 43'',8.

La longitudine geocentrica apparente di Mercurio secondo le Tavole di Lambre (Connoissance des temps 1797-1798) e le notissime di de la Lande per lo stabilito istante della congiunzione si è 1ˢ 16° 54' 19'',2, e la latitudine geocentrica apparente 5' 47'', 5. Dunque l' error delle Tavole in longitudine — 2'',7 soltanto, in latitudine + 3'',7.

Separatamente dal solo contatto interiore, supposta una latitudine geoc. apparente 5' 50'',8, avevo concluso la congiunzione a 1ʰ 53' 54'' sera, nel qual istante la longitudine del Sole, aggiunta l' aberrazione 20'' si e 1ˢ 16° 54' 21'',3.

OCCULTAZIONI DI STELLE PER LA LUNA OSSERVATE A NAPOLI

DA GIUSEPPE CASSELLA.

Presentate da Antonio Cagnoli li 15. Novembre 1798.

		Tempo vero		
Latitudine del Reale Museo . . . . . per le mie Osservaz. nel grande Gnomone alla R. Biblioteca		40°	50′	54″
1793. 21 Ottobre. γ del Toro . . .	Immers.	10$^{or.}$	29′	53″,7
	Emers.	11	36	38,0
Acr. di Dollond. di pied. 3½ di fuoco.				
21 Ottobre . . . α del Toro . . .	Imm.	19	52	13,3
Coll' istesso Acromatico. Manca l'Em. pel chiarore del giorno.				
1794. 21 Gennajo. γ dello Scorpione	Imm.	13	26	37,2
	Emer.	14	27	8,2
Coll' istesso Acromatico.				
5 Marzo . . . μ della Balena . .	Imm.	8	13	59,7
Telescop. Gregor. pied. 1½ di fuoco. La posizione del luogo impedì d'osservarsi l' Emersione.				
7 Marzo . . . α del Toro . . .	Imm.	7	43	35,3
	Emers.	8	55	26,4
Coll' istesso Telescop. Gregoriano.				
Latitudine 40° 49′ 40″ secondo le determinazioni del Sig. Zannone; l' istesso meridiano del R. Museo, che passa pella Casa di S. E. il Capit. Generale Acton.				
1798. 21 Agosto . . . φ del Sagittario . .	Imm.	7	30	40,0
	Emers.	9	0	1,9
Con un Telesc. Newt. di Herschel di fuoco pied. Inglesi 7; ingrandimento 84. volte				

Fine della Parte Seconda del Tomo VIII.

INDICE

Di ciò, che si contiene in questa Seconda Parte.

Tentativo sul Problema delle pressioni, che soffrono gli appoggj collocati agli angoli di una Figura derivate da un peso posto dentro la sua Aja.
Di G. Francesco Malfatti. pag. 319.
Sul Trappò del Monte Simmolo presso Intra in Riva al Verbano, e sui Vetri che se ne sono formati.
Di Carlo Amoretti. 416.
Delle Aste Ritrometriche e di un nuovo Pendolo per trovare la Scala delle Velocità di un' Acqua corrente.
Di Teodoro Bonati. 435.
Congetture intorno alle Cagioni del vario colore degli Africani e di altri Popoli, e sulla prima origine di questi.
Di Leopoldo M. A. Caldani. 445.
Nuove Osservazioni sulle Cagioni del vario Colorito negli Animali.
Di Floriano Caldani.
Nuovo Metodo per istabilire i Confini dei Terreni.
Di Vincenzo Chiminello. 473.
Sullo Stabilimento d alcuni nuovi Generi di Piante.
Di Gaetano Savj. 477.
Sopra il Sal Sedativo d' Hombergio, ossia Acido Boracico, che si trova ai Lagoni del Volterrano e del Senese

e sopra diversi Borati che pur ivi si trovano. Commentario primo.
Di Paolo Mascagni. pag. 487.
Sopra alcuni Stromenti meteorologici, che segnano per se stessi le variazioni Atmosferiche per 24. ore o più.
Di Anton Maria Vassalli. 516.
Lettera in risposta a Leopoldo Marco Antonio Caldani.
Di Giovanni Verardo Zeviani. 521.
Difesa e conferma della comune misura della Velocità dei Fluidi uscenti pei fori dei Vasi.
Di Pietro Zuliani. 533.
Della Integrazione dell' Equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime.
Di Pietro Paoli. 575
Della più esatta costruzione delle Carte Geografiche.
Di Antonio Cagnoli. 658.
Sull' Azione specifica della China China sulle Vie Urinarie.
Di Pietro Rubini. 665.
Indagine Fisica sui Colori.
Di Giambatista Venturi. 699.
Osservazioni del passaggio di Mercurio per il Disco del Sole li 6-7 Maggio 1799.
Di Vincenzo Chiminello. 755.
Occultazioni di Stelle per la Luna Osservate a Napoli.
Di Giuseppe Casselli. 758.

Le Tavole delle Figure appartenenti a questa seconda Parte sono dal N.° X. al XVIII. inclusive; e ciascuna d' esse porta in fronte il numero della pagina, alla quale deve esser posta dirimpetto.

Nella seconda Parte del Tomo VIII.

pag.	lin.	ERRORI PIU' IMPORTANTI.	CORREZIONI.
326.	16.	numeri.	Numeratori.
336.	10.	$m:n$.	$m:n$ (fig. 6).
341.	1.	$d\gamma$	$\theta\gamma$
345.	1.	$\frac{XR}{VM}$	$\frac{VR}{VM}$
347.	6.	$\frac{VR}{VM} -$	$\frac{VR}{VM} =$
357.	1.	$n - 10$	$n = 10$
363.	14.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$
367.	17.	$\frac{n-5}{n-2} \ldots\ldots \frac{2}{r}$	$\frac{n-5}{n-3} \ldots\ldots \frac{2}{n}$
369.	1.	-2	$-2x$
412.	13.	(fig. 16)	(fig. 18).
440.	29.	sia ABC.	sia ABC (fig. 6).
443.	20.	DF	BF
577.	15.	$\varphi(x+2)$	$\varphi(x+3)$ &c.
579.	16.	$\varphi.y - \Sigma$	$\varphi.y + \Sigma$
	17.	z^x	z_x
	20.	$x-2$	$x+2$
581.	13.	$\left(\frac{\alpha 1}{\alpha^2}\right)$	$\left(\frac{\alpha 1}{\alpha}\right)$
582.	6.	X''_x;	X''_x; &c.
588.	14.	$\int^{x+1} dy^{x+1} dy^{x+1} P$	$\int^{x+1} dy^{x+2} P$
591.	18.	$\frac{1+b_{x+y}}{a^x}$	$\frac{1+b_{x+y}}{a_x}$
	19.	a^x	a_x
592.	15.	z_{x+x}	z_{x+2}
593.	4.	K 1	X 1
598.	8.	Pdx	Xdx
	21.	$\int e^{q(n+1)} x$	$\int e^{q(n-1)x}$
599.	16.	$\frac{\Phi}{dy^2}$	$\frac{\Phi}{dt^2}$
601.	ult.	$\pm \int y^{x-1}$	$\pm y \int y^{x-1}$

ERRORI PIU' IMPORTANTI.			CORREZIONI.
pag.	lin.		
602.	8.	$\frac{a^2 y^2}{dt^2}$	$\frac{a^2 y^2}{2}$
603.	7.	$\frac{d^x z_x}{dy^{x-1} dy}$	$\frac{d^x z_x}{dy^{x-1} dt}$
604.	22.	$az_{x+1} bz_x$	$az_{x+1} + bz_x$
606.	2.	$d^{x+y+1} Z_{x,y+1}$	$d^{x+y+1} Z1_{x,y+1}$
617.	19.	$B1z'_x$	$B1z''_x$
618.	17.	α_x	α^x
	24.	$e_{1,x} \frac{d\wp''}{dy^2}$	$c_{1,x} \frac{d\wp''}{dy}$
619.	18.	$Ca_{1,x} Da_{0,x}$	$Ca_{1,x} + Da_{0,x}$
620.	21.	$b_{1,x}\alpha$	$b_{1,x}$
622.	19.	$x - 1$	$x + 1$
623.	1.	$a_{1,x+1}$	$a_{1,n+1}$
	11.	$dy^{(x+2):2}$	$dy^{(x+2):2} \varphi . y$
624.	16.	$Z_{x,x+1}$	$Z_{1,x+1}$
	ult.	$B1_x^{-2n}$	$B1^{x-2n}$
625.	6.	$F_2(x-3)$	$F_2 + (x-3)$
632.	4.	z^x	z_x
634.	8.	E_x	E^x
638.	14.	$H \frac{d^2 u_1}{dt^v}$	$H \frac{d^2 u_1}{dt^2}$
640.	5.	$\ldots\ldots C\, \delta^x$	$\ldots\ldots + C^x \delta^x$
	6.	$e\delta t$	$e^{\delta t}$
641.	7.	$\omega' ye$	$\omega'^y e$
644.	pen.	$\frac{(-B)^x}{A^y(-B)}$	$\frac{(-B)^y}{A^y(-B)^x}$
645.	18.	$Kt(L-E)$	$Kt : (L-E)$
646.	15.	$b_{x-1,1,x}$	$b_{x-1,0,x}$
648.	ult.	$\frac{d^2\varphi}{dt^2}$	$\frac{d^2\varphi}{du^2}$
649.	14.	a^x	α^x
652.	1.	$a'dx$	$\alpha'dx$.
691.	10.	varietà	verità